REVUE

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/revuedemathmat06pari

Math.

REVUE

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

RÉDIGÉE PAR MM.

E. HUMBERT
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE LOUIS-LE-GRAND

ET

G. PAPELIER
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE D'ORLÉANS

AVEC LA COLLABORATION DE MM.

N. CHARRUIT,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DE MATHÉMATIQUES, PROFESSEUR AU LYCÉE DE LYON

E. DESSENON,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DE MATHÉMATIQUES, PROFESSEUR AU LYCÉE SAINT-LOUIS

P. LAMAIRE,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DE MATHÉMATIQUES, PROFESSEUR AU LYCÉE DE LILLE

CH. RIVIÈRE,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
DOCTEUR ÈS SCIENCES, PROFESSEUR AGRÉGÉ DE PHYSIQUE AU LYCÉE SAINT-LOUIS

A. TARTINVILLE,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,
AGRÉGÉ DE MATHÉMATIQUES, PROFESSEUR AU LYCÉE SAINT-LOUIS

H. VUIBERT,
RÉDACTEUR DU *Journal de Mathématiques élémentaires*.

TOME TROISIÈME

ANNÉES 1894-95 & 1895-96

291726/9 33

PARIS
LIBRAIRIE NONY & Cie
17, rue des Ecoles, 17.

QA
1
Ahn
cop. 6

REVUE
DE
MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LE COMPLEXE DES DROITES DE MOMENT NUL
PAR RAPPORT A UN SYSTÈME DE FORCES,

par M. **A. Durand**,
Ancien élève de l'Ecole normale supérieure, agrégé des sciences mathématiques, chargé d'une mission en Allemagne.

Avant d'aborder le sujet qui fait l'objet principal de cet article, il me semble bon de reprendre rapidement la solution du problème de la réduction des forces appliquées à un corps solide, en admettant toutefois les résultats les plus essentiels qui sont démontrés aujourd'hui dans tous les cours de mathématiques spéciales.

Tous les modes de réduction ont pour but de remplacer un système donné de forces par d'autres systèmes équivalents, en général irréductibles à d'autres systèmes plus simples, sous certaines conditions imposées *a priori*.

Les deux modes les plus intéressants sont la réduction à une force et à un couple et la réduction à deux forces.

1. Pour effectuer la première réduction, je prends un point quelconque, A; je considère une force quelconque du système, F, et j'applique au point A deux forces, F′ et — F′, égales et directement opposés, dont la première soit égale et parallèle à F et de même sens qu'elle; je fais de même pour toutes les forces dont le système est composé; en agissant ainsi je ne change pas l'action du système de forces, d'après un principe admis en statique.

Cela fait, je compose entre elles toutes les forces F′, puis tous les couples tels que (F, — F′). J'obtiens ainsi une force R appliquée au point A dont la grandeur, la direction et le sens ne dépendent aucunement de la position du point A, et un couple G dont l'axe dépend en général du choix du point A. La force R se nomme la *résultante générale* du système et le couple G le *couple résultant*.

Comme une force peut être appliquée en un point quelconque de sa ligne d'action, il est évident que le couple résultant ne change pas quand le point A se déplace parallèlement à la résultante générale.

Si nous désignons par X, Y, Z les projections sur les trois axes de la résultante générale, par L, M, N les projections de l'axe du couple résultant relatif à l'origine, on sait que les conditions d'équilibre sont $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, et que, pour que deux systèmes Σ et Σ' soient équivalents, il faut et il suffit que l'on ait par rapport aux mêmes axes de coordonnées rectangulaires

$$X = X', \quad Y = Y', \quad Z = Z', \quad L = L', \quad M = M', \quad N = N'.$$

De là résulte immédiatement que si l'on désigne par L, M, N les projections de l'axe du couple résultant relatif à l'origine des coordonnées, par L_1, M_1, N_1 celles relatives à un point quelconque de

coordonnées x_1, y_1, z_1, nous aurons

$$(1)\qquad \begin{cases} L = y_1Z - z_1Y + L_1, \\ M = z_1X - x_1Z + M_1, \\ N = x_1Y - y_1X + N_1; \end{cases}$$

ces équations montrent que les valeurs de L_1, M_1, N_1 dépendent en général des coordonnées du centre de réduction, x_1, y_1, z_1. Le couple résultant n'est invariable que lorsque la résultante générale est nulle.

Si l'on veut que l'axe du couple résultant soit parallèle à la résultante générale, il faudra exprimer que les équations suivantes sont satisfaites :

$$\frac{L_1}{X} = \frac{M_1}{Y} = \frac{N_1}{Z},$$

ou

$$(2)\qquad \frac{L - y_1Z + z_1Y}{X} = \frac{M - z_1X + x_1Z}{Y} = \frac{N - x_1Y + y_1X}{Z};$$

on trouve ainsi pour lieu du point x_1, y_1, z_1 une ligne droite.

D'après une remarque faite plus haut, cette droite est évidemment parallèle à la résultante générale ; cela se vérifie d'ailleurs aisément, car on voit de suite que si x_1, y_1, z_1 vérifient les équations (2), les nombres $x_1 + \lambda X$, $y_1 + \lambda Y$, $z_1 + \lambda Z$ les vérifient également.

Cette droite se nomme l'*axe central* du système de forces : elle est la même pour tous les systèmes équivalents au système donné, car pour tous ces systèmes X, Y, Z, L, M, N ont les mêmes valeurs.

Lorsque les éléments de la réduction en un point sont connus, ils sont connus pour tout point de l'espace, d'après les formules (1) ; car X, Y, Z ne changent pas, et L_1, M_1, N_1 sont bien déterminés par le système (1). On ne peut d'ailleurs pas prendre arbitrairement L_1, M_1, N_1, car les équations (1), regardées comme déterminant les inconnues x_1, y_1, z_1, ne sont compatibles que si l'on a

$$L_1X + M_1Y + N_1Z = LX + MY + NZ;$$

si cette relation a lieu, les équations (1) représentent une droite parallèle à l'axe central, et qui est le lieu des points pour lesquels on obtient la réduction demandée.

Les quantités X, Y, Z, R et $LX + MY + NZ$ sont des invariants pour la réduction la plus générale, c'est-à-dire des quantités qui ne changent pas quand on déplace le centre de réduction. Il serait même facile de montrer que les deux quantités R et $LX + MY + NZ$ sont des invariants, pour tout changement d'axes rectangulaires ; mais notre but n'est pas d'épuiser la question actuelle, nous voulons simplement préparer l'étude des droites de moment nul.

Il résulte de ce qui précède que l'on ne peut pas prendre l'axe du couple résultant perpendiculaire à la résultante générale ; car cela exigerait que l'on eût $L_1X + M_1Y + N_1Z = 0$, et cette condition est équivalente à $LX + MY + NZ = 0$, qui n'a pas lieu, puisque L, M, N, X, Y, Z sont quelconques. Mais ces directions exceptées, on peut prendre l'axe du couple perpendiculaire à un plan quelconque.

Quand la relation $LX + MY + NZ = 0$ est vérifiée, la résultante générale et les forces du couple sont dans le même plan ; le système de forces proposé se réduit à une force unique. Nous écarterons les deux cas où $R = 0$ et où $LX + MY + NZ = 0$; dans le premier cas, le système se réduit à un couple, et nous venons de voir que, dans le second, il se réduit à une force unique.

2. *Réduction à deux forces.* — Supposons le système donné réduit déjà à une force R appliquée en un point A et à un couple situé dans un plan α passant par le point A, et considérons une droite quelconque AT passant au point A ; nous allons montrer que l'on peut réduire le système à deux forces dont l'une soit appliquée sur la droite AT.

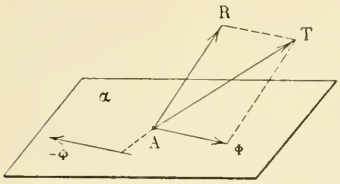


Fig. 1.

Pour apercevoir ce point, il suffit de remarquer que le plan RAT coupe le plan α suivant une droite déterminée, $A\Phi$, que l'on peut toujours construire un parallélogramme dont la résultante soit dirigée suivant AT, dont l'un des côtés issus de A soit AR, et qui ait l'autre dirigé suivant $A\Phi$; soit Φ cette force ; on peut remplacer le couple obtenu antérieurement par le couple $(\Phi, -\Phi)$, et alors la réduction à deux forces est effectuée, dans les conditions où nous voulions qu'elle le fût ; ces deux forces sont T et $-\Phi$.

Il y a cependant deux cas d'exception, évidents d'ailleurs *a priori* : le cas où la direction imposée AT coïncide avec celle de la résultante générale, et celui où la direction AT est dans le plan du couple. Dans le premier cas, la force Φ devrait être nulle ; dans le second, elle devrait être infinie, et il est impossible de transformer le couple de façon que l'un de ces deux résultats soit obtenu, en supposant, comme nous l'avons fait, que la résultante générale et le couple ne sont nuls ni l'un ni l'autre. Dans le second cas, la droite AT, rencontrant la force AR et les deux forces du couple, est une droite de moment nul. On peut donc conclure ainsi : *étant donnée une droite Δ qui n'est pas parallèle à la résultante générale et qui n'est pas non plus une droite de moment nul, on peut toujours remplacer le système des forces par deux forces appliquées, l'une sur la droite Δ, et l'autre sur une droite Δ' qui ne rencontre pas la première.* (Si ces droites se rencontraient, le système se réduirait à une force unique, ce qui n'est pas admis.)

Ceci n'est possible que d'une seule manière. En effet, si l'on trouvait deux systèmes équivalents P, P′ et Q, Q′, tels que P et Q fussent appliquées toutes deux sur Δ, les quatre forces P, $-$Q, P′ et $-$Q′ seraient en équilibre ; or ces forces se réduisent à trois, puisque P et $-$Q sont sur la même droite ; d'autre part, elles ne se rencontrent pas, puisque P et P′ ne se rencontrent pas ; elles ne peuvent donc être en équilibre que si $P = Q$, et si les deux forces P′ et Q′ sont égales et appliquées sur la même droite. Par suite, si l'on se donne la ligne d'action de l'une des deux forces, la réduction du système à deux est parfaitement déterminée. Chacune des droites Δ et Δ' entraîne donc l'autre. Nous appellerons ces lignes, *lignes d'action conjuguées.*

3. *Propriétés des lignes d'action conjuguées.* — 1° Deux lignes d'action conjuguées ne se rencontrent jamais.

2° Si on prend un point A sur une droite Δ, le plan du couple relatif à ce point et mené par A passe par la droite conjuguée de Δ, Δ'.

3° Le plan parallèle à deux lignes d'action conjuguées est parallèle à la résultante générale, et, par suite, à l'axe central.

4° La perpendiculaire commune à deux lignes d'action conjuguées est perpendiculaire à l'axe central et rencontre cette droite.

En effet, les trois premières parties résultent de ce qui a été dit antérieurement ; quant à la quatrième, il suffit de remarquer que cette perpendiculaire commune étant droite de moment nul pour le système total et pour le couple de la réduction relative à un point de l'axe central est aussi droite de moment nul pour la résultante générale appliquée sur l'axe central.

5° Si l'on considère deux couples de lignes d'action conjuguées Δ, Δ' et D, D′, ces quatres droites appartiennent à une même quadrique.

En effet, toute droite qui s'appuie sur Δ, Δ' et D est droite de moment nul pour le système total ; elle rencontre donc aussi D′, et, par suite, elle engendre une quadrique qui contient D′.

Nous allons maintenant étudier la distribution de ces droites dans l'espace.

A cet effet, prenons trois axes de coordonnées rectangulaires, Oz étant l'axe central, Ox la perpendiculaire commune à deux droites conjuguées, et Oy une perpendiculaire au plan des deux autres. Désignons par x et x' les abscisses des points de rencontre de Ox avec les deux lignes d'action, par P et P' les deux forces appliquées sur ces droites et par α, α' les deux angles que font leurs directions avec la direction de Oz, ces deux angles étant comptés à partir de Oz et lus par un observateur placé sur Ox ; soient enfin R l'intensité de la résultante générale et G le moment du couple résultant relatif à un point de l'axe central.

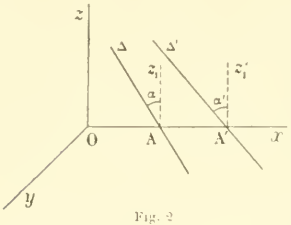


Fig. 2

Si nous projetons les forces des deux systèmes équivalents sur Oz et sur Oy, et si nous prenons les moments par rapport aux mêmes axes, nous obtenons les quatre équations

$$(3)\quad \begin{cases} P\cos\alpha + P'\cos\alpha' = R, & -Px\sin\alpha - P'x'\sin\alpha' = G, \\ -P\sin\alpha - P'\sin\alpha' = 0, & Px\cos\alpha + P'x'\cos\alpha' = 0. \end{cases}$$

Si nous calculons successivement P et P' avec les équations de la première colonne, puis avec celles de la seconde, nous obtenons, en égalant les valeurs ainsi trouvées,

$$(4)\qquad x\,\mathrm{tg}\,\alpha' = \frac{G}{R}, \qquad x'\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{G}{R};$$

ces deux relations expriment nettement la réciprocité entre les deux lignes d'action conjuguées ; elles montrent aussi qu'un plan quelconque perpendiculaire à l'axe central coupe l'axe central et les deux lignes d'action conjuguées en trois points en ligne droite ; par conséquent une droite qui glisse sur les trois droites engendre un paraboloïde hyperbolique droit dont les plans directeurs sont, l'un perpendiculaire à l'axe central, et l'autre parallèle aux deux droites conjuguées.

Lorsque l'une des droites tourne autour de son point de rencontre avec Ox, en restant perpendiculaire à cet axe, l'autre se déplace en restant parallèle à elle-même et en s'appuyant constamment sur Ox.

Quand α tend vers 0, x' augmente indéfiniment : les équations (3) montrent que P' tend vers 0 ; on arrive au cas d'exception déjà signalé où la ligne d'action donnée est parallèle à l'axe central. Au point de vue géométrique, on peut dire que la ligne conjuguée d'une droite parallèle à la résultante générale est située dans le plan de l'infini.

Enfin si on considère une droite Δ telle que $x\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{G}{R}$, elle coïncide avec sa conjuguée ; ces droites particulières ont une importance exceptionnelle ; mais au point de vue mécanique, la réduction correspondante est illusoire, car les formules (3) fournissent alors pour P et P' des valeurs infinies. Nous sommes alors dans le second cas d'exception qui a été signalé, puisqu'on a

$$Rx\sin\alpha - G\cos\alpha = 0,$$

et que cette équation exprime que, par rapport à la droite Δ, la somme des moments est nulle.

4. *Système-nul.* — Nous pouvons étudier maintenant le système des droites de moment nul, que, pour abréger, nous appellerons *système-nul*.

Comme une droite de l'espace dépend de quatre paramètres et que les droites d'un système-nul ne sont assujetties qu'à une condition, elles dépendent encore de trois paramètres ; il y a donc une simple infinité de ces droites qui passent par un point ou qui sont dans un plan, et une double infinité qui rencontrent une droite fixe.

Supposons d'abord que le système des forces considéré se réduise à une force unique ; le système-nul est alors formé de toutes les droites de l'espace qui rencontrent la ligne d'application de cette force ;

les droites qui passent par un point engendrent le plan formé par ce point et la ligne d'action de la résultante ; celles qui sont dans un plan enveloppent le point de rencontre du plan et de la résultante.

Supposons, en second lieu, que le système donné de forces se réduise à un couple ; le système-nul se compose alors de toutes les droites parallèles au plan du couple, c'est-à-dire encore de toutes les droites qui rencontrent une droite rejetée, cette fois, à l'infini.

Nous appellerons de pareils systèmes des *systèmes-nuls dégénérés*.

Plaçons-nous maintenant dans le cas général, où la réduction relative à un point quelconque de l'espace donne naissance à une résultante et à un couple non nuls.

Considérons alors un point quelconque A ; le système donné peut se remplacer par une force égale et parallèle à la résultante générale appliquée en A et par un couple, ou bien par une force de direction quelconque appliquée en A et par une autre force située dans le plan perpendiculaire à l'axe du couple et mené par le point A. L'un ou l'autre de ces modes de réduction montre que les droites de moment nul qui passent au point A sont dans le plan du couple.

Les droites du système-nul qui passent par un point A *forment donc un faisceau plan.*

Considérons maintenant un plan quelconque α ; nous avons vu qu'on peut réduire le système à un couple d'axe perpendiculaire au plan α et à une force égale et parallèle à la résultante générale ; cette force perce le plan α en un point A ; par suite, *les droites du système-nul situées dans un plan* α *forment aussi un faisceau du premier ordre.*

La relation qui existe entre le point A et le plan α est visiblement réciproque ; nous dirons que le plan α est le *plan polaire* du point A et que le point A est le *pôle* du plan α par rapport au système-nul.

Si le point B est dans le plan polaire de A, la droite AB est une droite de moment nul, et, par suite, elle est aussi dans le plan polaire de B ; il en résulte que si un point parcourt une droite du système-nul, le plan polaire du point tourne autour de cette droite ; de même, si un plan tourne autour d'une droite du système-nul, son pôle se meut sur cette droite.

Si un point se déplace sur une parallèle à l'axe central, la direction de l'axe du couple résultant reste invariable ; par conséquent les plans polaires des points de la droite restent parallèles à un plan fixe ; en particulier, les plans polaires des points de l'axe central sont perpendiculaires à cet axe.

Examinons maintenant le cas où le point se déplace sur une droite quelconque qui ne fasse pas partie du système-nul et qui ne soit pas parallèle à l'axe central ; soient Δ cette droite et A le point mobile ; la droite Δ a une conjuguée, Δ', et les droites de moment nul qui rencontrent Δ rencontrent aussi Δ'. Le plan polaire du point A est donc le plan (Δ, Δ'). Chacune des droites Δ, Δ' est ainsi le lieu des pôles des plans qui passent par l'autre et l'intersection des plans polaires de deux points quelconques de l'autre. Quatre plans passant par une droite quelconque Δ, qui ne fait pas partie du système-nul, ont donc le même rapport anharmonique que leurs pôles. Cette propriété est encore évidente si les plans considérés sont parallèles, d'après ce qui a été dit plus haut. Nous verrons plus tard qu'elle est encore vraie quand les quatre plans passent par une droite du système-nul.

Nous nommerons maintenant les deux droites Δ et Δ' des *droites conjuguées* simplement, et nous résumerons la plupart des résultats précédents en disant que toute droite qui s'appuie sur deux droites conjuguées appartient au système-nul et que, réciproquement, toute droite du système-nul qui rencontre une droite Δ rencontre aussi sa conjuguée Δ'.

Envisageons plus particulièrement la réduction à une force et à un couple relative à un point de l'axe central ; cette réduction nous montre que le système de forces n'est altéré ni par une translation dans le sens de l'axe central, ni par une rotation autour de cet axe, ou, pour parler plus exactement, que l'action du système de forces n'est pas changée ainsi ; aucun des deux mouvements dont nous venons de parler ne change le système-nul dans son ensemble, ce qui veut dire que toute translation parallèle à l'axe central, toute rotation autour de cet axe amène une droite de moment nul sur une autre

droite de moment nul. Il en résulte que si l'on connaît la disposition des droites de moment nul qui rencontrent à angle droit une perpendiculaire à l'axe central, on connaîtra le système-nul tout entier, car on peut amener toute droite de moment nul sur une de celles-ci par une combinaison des deux mouvements permis.

Prenons pour axe des z l'axe central, pour axe des x une perpendiculaire à cet axe et pour Oy une perpendiculaire au plan des deux premières ; désignons par D une droite du système-nul perpendiculaire à Ox, par x sa distance au plan des yz et par α l'angle qu'elle fait avec Oz, compté à partir de Oz et lu par l'observateur placé sur Ox. Si nous exprimons que la somme des moments de la résultante générale, R, et du couple minimum, G, par rapport à cette droite D est nulle, nous avons l'équation déjà obtenue,

$$x \operatorname{tg} \alpha = \frac{G}{R}, \tag{3}$$

qui détermine l'ensemble des droites de moment nul.

Si l'on amène les axes centraux de deux systèmes-nuls à coïncider, ces ensembles de droites ne coïncideront que si le rapport $\frac{G}{R}$ a la même valeur pour les deux systèmes. Ce rapport se nomme le *paramètre* du système-nul ; il ne dépend que des lignes d'action des forces données et des rapports de leurs intensités. C'est un invariant, dans le sens que nous avons antérieurement attribué à cette expression, et sa valeur à l'aide des six nombres fondamentaux X, Y, Z, L, M, N, est

$$\frac{LX + MY + NZ}{X^2 + Y^2 + Z^2};$$

il suffit, pour le voir, de calculer la projection de l'axe du couple L, M, N sur la résultante générale X, Y, Z.

L'ensemble des droites de moment nul qui rencontrent Ox à angle droit forme un système réglé du second ordre, car on a $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{y}{z}$, et, par suite, le lieu de ces droites est le paraboloïde hyperbolique droit $xy = -\frac{G}{R} z$, rapporté à ses deux plans directeurs et au plan tangent au sommet.

Les droites de moment nul dont la distance à l'axe central est petite sont presque perpendiculaires à cette droite ; à mesure que cette distance augmente, l'angle que chacune d'elles fait avec l'axe central diminue, et cet angle devient infiniment petit quand la distance devient infiniment grande.

Comme dans l'équation du paraboloïde trouvé précédemment, les axes des x et des y jouent absolument le même rôle, les génératrices des deux systèmes appartiennent au système-nul. Il en résulte que les plans polaires des divers points de l'une de ces droites sont les plans tangents au paraboloïde, et que, par conséquent, quatre plans passant par une droite du système-nul ont même rapport anharmonique que leurs quatre pôles.

L'étude rapide que nous venons de faire nous a montré que les six éléments analytiques d'un système de forces suffisent à déterminer complètement le système-nul qui lui correspond ; ils ne suffisent pas, au contraire, à déterminer le système de forces, même en réduisant ces forces à leur nombre minimum. Il y a donc un certain avantage à considérer, au lieu d'un système de forces, le système-nul qui lui correspond.

5. *Relations entre deux systèmes-nuls.* — Cherchons d'abord si deux systèmes nuls ont des droites communes et quelles sont ces droites. Il y a deux cas dans lesquels la réponse est évidente.

D'abord dans le cas de deux systèmes-nuls dégénérés ; car alors il est clair que les droites communes sont toutes celles qui rencontrent les axes des deux systèmes dégénérés.

Ensuite, dans le cas où l'un des deux systèmes-nuls est dégénéré, car, en appelant Δ son axe et Δ' la droite conjuguée de Δ dans le second système-nul, il est visible encore que les droites communes sont celles qui rencontrent Δ et Δ'.

Examinons maintenant le cas où aucun des deux systèmes-nuls n'est dégénéré. Dans ce cas, les deux systèmes ont encore des droites communes ; en effet, soit Δ une droite quelconque ; toutes les droites du premier système qui rencontrent Δ rencontrent aussi sa conjuguée Δ_1 ; toutes celles du second système qui rencontrent Δ rencontrent aussi sa conjuguée Δ_2 dans le second système ; les droites communes aux deux systèmes et qui rencontrent Δ sont donc les génératrices du système réglé qui admet pour directrices Δ, Δ_1, Δ_2.

Nous allons montrer que, pour une certaine position de Δ, les droites Δ_1 et Δ_2 coïncident, c'est-à-dire que les deux systèmes-nuls ont deux droites conjuguées communes.

Pour cela, remarquons que s'il y a un couple de droites conjuguées communes aux deux systèmes, Δ et Δ', la perpendiculaire commune à ces deux droites est perpendiculaire à chacun des axes centraux et coïncide avec la perpendiculaire commune à ces deux axes. Prenons alors cette droite pour axe des x, et pour axes des y et des z les bissectrices de l'angle formé par les parallèles aux axes centraux et menés par le milieu de la perpendiculaire commune. Appelons a l'abscisse de l'un de ces axes et ω l'angle qu'il fait avec Oz, x et x' les abscisses des deux droites conjuguées et α et α' les angles qu'elles font avec Oz. En désignant encore par K_1 et K_2 les paramètres des deux systèmes-nuls $\left(K_1 = \frac{G_1}{R_1},\ K_2 = \frac{G_2}{R_2}\right)$, et exprimant successivement que les deux droites supposées sont conjuguées par rapport aux systèmes nuls 1 et 2, nous obtenons

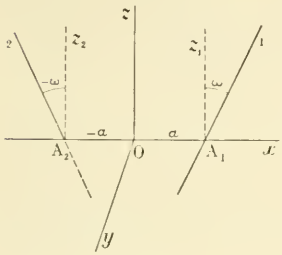


Fig. 3.

$$(6)\qquad \begin{cases} (x-a)\operatorname{tg}(\alpha'-\omega) = K_1, \\ (x'-a)\operatorname{tg}(\alpha-\omega) = K_1, \\ (x+a)\operatorname{tg}(\alpha'+\omega) = K_2, \\ (x'+a)\operatorname{tg}(\alpha+\omega) = K_2. \end{cases}$$

Si nous éliminons x ou x' entre les deux équations qui la contiennent, nous obtenons deux fois la même équation en t, pour donner les valeurs de $\operatorname{tg}\alpha$ ou de $\operatorname{tg}\alpha'$; cette équation est

$$(7)\qquad (K_1+K_2)\theta + 2a]t^2 + (K_1-K_2)(1+\theta^2)t + (K_1+K_2)\theta - 2a\theta^2 = 0,$$

en posant $\theta = \operatorname{tg}\omega$.

Nous tirerons de là les valeurs de $\operatorname{tg}\alpha$ et $\operatorname{tg}\alpha'$, et les équations (6) nous donneront alors sans ambiguïté les valeurs de x et x'.

Il y a donc toujours deux droites conjuguées communes, réelles ou imaginaires ; d'où la conséquence suivante : *deux systèmes-nuls ont en commun une infinité de droites, toutes celles qui s'appuient sur les deux droites conjuguées communes.*

On peut déterminer géométriquement ces deux droites : il suffit de se rappeler que les droites du système-nul qui rencontrent l'axe central sont perpendiculaires à cet axe ; par suite les deux droites conjuguées communes et l'axe central du premier système déterminent un paraboloïde droit, dont l'un des plans directeurs est perpendiculaire à l'axe central et l'autre parallèle aux deux droites conjuguées communes, c'est-à-dire aux deux axes centraux ; avec le second axe central, elles déterminent aussi un autre paraboloïde droit, et ces deux paraboloïdes ont en commun la perpendiculaire commune aux deux axes centraux, une génératrice à l'infini et les deux droites conjuguées communes aux deux systèmes-nuls.

Considérons deux systèmes-nuls et leurs droites conjuguées Δ, Δ', et coupons-les par un plan P,

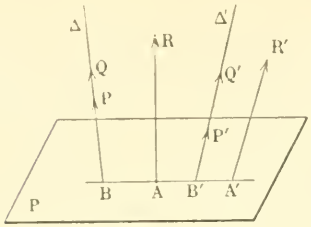


Fig. 5

quelconque, qui rencontre les droites conjuguées en B et B' la droite BB' appartient aux deux systèmes-nuls, et, par suite, les pôles du plan P, par rapport aux deux systèmes, sont sur cette droite; soient A et A' ces points. Si le plan P se déplace parallèlement à lui-même, les points A et A' décrivent des parallèles aux résultantes générales des deux systèmes de forces, AR, A'R'. Les quatre droites Δ, Δ', AR, A'R' sont donc sur un même paraboloïde, et, par suite, le rapport anharmonique (AA'BB') est constant; il est le même, en particulier, que celui des quatre directions de ces droites; nous voyons donc que ce rapport anharmonique ne dépend pas de la direction du plan P. Au surplus, menons par un point O des parallèles, Ox et Oy, aux deux droites Δ et Δ', et portons sur ces droites des segments P, P' et Q, Q' qui mesurent pour chacun des systèmes les intensités des deux forces qui lui sont équivalentes; les parallèles aux résultantes générales menées par le point O auront alors pour équations $\frac{y}{x} = \frac{P'}{P}$, $\frac{y}{x} = \frac{Q'}{Q}$; le rapport anharmonique des quatre directions a donc pour valeur $\frac{P'}{P} : \frac{Q'}{Q}$; il ne dépend que des rapports des forces données dans chaque système.

Nous pouvons donc énoncer ce théorème important : *étant donnés deux systèmes-nuls, les pôles d'un plan quelconque par rapport à ces deux systèmes et les points de rencontre de ce plan avec les deux droites conjuguées communes sont en ligne droite, et, en outre, le rapport anharmonique de ces quatre points est indépendant du plan choisi.*

Nous verrions de même que *si on considère un point quelconque, les plans polaires de ce point par rapport aux deux systèmes-nuls et les plans menés par ce point et les deux droites conjuguées communes passent par la même droite et que, de plus, le rapport anharmonique de ces quatre plans est indépendant du point choisi et a la même valeur que le précédent.*

Dans le cas particulier où $\frac{P'}{P} \cdot \frac{Q}{Q'} = -1$ ou $PQ' + QP' = 0$, les éléments dont nous avons parlé sont toujours en situation harmonique, et l'on dit que les deux systèmes-nuls sont en involution.

L'équation $PQ' + QP' = 0$ exprime que la somme des moments des deux forces P et P' par rapport aux forces Q et Q' est nulle. On démontre d'ailleurs aisément que la somme des moments des forces d'un système par rapport aux forces d'un autre système ne change pas si on échange les deux systèmes entre eux et si on remplace l'un ou l'autre par un système équivalent. On trouve sans peine que l'équation $PQ' + QP' = 0$ peut s'écrire

$$XL' + YM' + ZN' + X'L + Y'M + Z'N = 0.$$

Si l'on considère tous les systèmes de forces obtenus en portant deux forces P et P' sur deux droites données Δ et Δ', on obtient une infinité de systèmes-nuls dépendant d'un paramètre variable $\frac{P}{P'}$ et ayant évidemment deux droites conjuguées communes, les deux droites Δ et Δ'; parmi eux il y a deux systèmes nuls dégénérés : l'un, ayant pour axe Δ, et qui correspond à $P' = 0$; l'autre, ayant pour axe Δ', et qui correspond à $P = 0$.

Si l'on considère tous les systèmes de forces obtenus en portant trois forces quelconques sur trois droites données Δ_1, Δ_2, Δ_3, il leur correspond une infinité de systèmes-nuls qui dépendent de deux paramètres, les rapports de deux des forces à la troisième; parmi ces systèmes de forces, il y en a une infinité qui se réduisent à une force unique dirigée suivant l'une des génératrices du même système que les droites données de la surface du second degré qu'elles déterminent; à chacun de ces systèmes particuliers correspond un système-nul dégénéré. Il y a donc, dans l'ensemble à deux paramètres des

systèmes-nuls que nous avons ainsi définis, une infinité de systèmes-nuls dégénérés dont les axes forment les génératrices d'un système d'une quadrique. Il est visible que les génératrices de l'autre système sont des droites de moment nul communes à tous les systèmes de forces et, par suite, appartiennent à tous les systèmes-nuls correspondants.

Considérons enfin trois systèmes-nuls correspondants à trois systèmes de forces donnés ; on peut, d'une infinité de manières, remplacer les trois systèmes de forces chacun par trois forces appliquées suivant les trois mêmes droites ; il en résulte que trois systèmes-nuls ont en commun toutes les génératrices d'un même système d'une quadrique, au moins. Il serait facile de montrer qu'ils n'ont pas d'autres droites communes.

Les systèmes-nuls que nous rencontrons ainsi en statique, sont étudiés en géométrie analytique sous le nom de *complexes linéaires*. Il nous a paru utile de les étudier au point de vue mécanique et de compléter ainsi les notions que l'on donne aujourd'hui aux élèves de mathématiques spéciales sur la réduction des forces appliquées à un corps solide.

Note de la rédaction. — Les lecteurs qui seraient désireux d'approfondir l'étude des complexes linéaires pourront consulter avec fruit, parmi les ouvrages les plus récents qui s'occupent de cette question, le premier volume de *Cinématique* de M. Kœnigs, la *Géométrie réglée*, du même auteur, ainsi qu'une brochure de M. Fouret, intitulée *Notions géométriques sur les complexes et les congruences de droites.*

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

399. — *On considère un cercle* (C) *de rayon un, et sur ce cercle une origine d'arcs,* A, *et un sens positif ; on prend sur le cercle* (C) *un point* M *et un point* M′ *tels que arc* AM′ $= \frac{1}{3}$ *arc* AM. *On demande :*

1° *De déterminer les points* M′ *par l'intersection du cercle et d'une hyperbole équilatère* H, *ayant l'un de ses axes parallèle au diamètre qui passe en* A ;

2° *De dire quels sont les points de rencontre du cercle et de l'hyperbole.*

Cela fait, on fait varier l'arc AM *et on demande alors :*

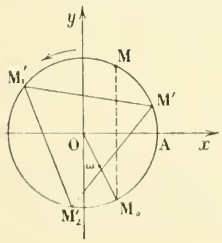
3° *De trouver le lieu du centre de l'hyperbole* H, *et le lieu des centres des coniques singulières qui passent par les points de rencontre de* (C) *et de* H ;

4° *De former l'équation de l'enveloppe de ces coniques singulières et de construire cette courbe ;*

5° *De trouver le lieu des sommets de* H ;

6° *De déterminer l'enveloppe de la droite* ωM, *qui joint le centre de* H *au point* M, *et de construire cette courbe ainsi que les précédentes.*

Prenons pour axe des x le diamètre du cercle qui passe au point A, et, pour direction positive sur cet axe, la direction OA ; prenons pour axe des y le diamètre perpendiculaire au précédent, et, pour direction positive sur cet axe, la demi-droite Oy, qui fait avec Ox l'angle $+\frac{\pi}{2}$. Dans ce système d'axes, l'équation du cercle donné est $x^2 + y^2 - 1 = 0$, et les coordonnées du point M sont $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$, en désignant par α l'un quelconque des arcs AM.



1° Les coordonnées de l'un des points M′ sont alors $x = \cos\frac{\alpha}{3}$ et $y = \sin\frac{\alpha}{3}$, et les relations qui les unissent sont données par la formule de Moivre,

$$(x + iy)^3 = \cos\alpha + i\sin\alpha.$$

Cette équation se décompose en deux autres.

$$x^3 - 3xy^2 = \cos\alpha,$$
$$3x^2y - y^3 = \sin\alpha,$$

et, parmi les solutions communes à ces deux équations, celles qui appartiennent au cercle $x^2 + y^2 = 1$ fournissent les coordonnées des trois points M'.

Si l'on multiplie la première équation par x, la seconde par y, et qu'on ajoute les résultats ainsi obtenus, on trouve l'équation

$$x^4 - y^4 = x\cos\alpha + y\sin\alpha,$$

qui représente une courbe passant aux trois points M. Il n'y a plus qu'à remplacer dans le premier membre de cette équation le facteur $x^2 + y^2$ par 1, pour obtenir l'équation de l'hyperbole indiquée,

$$H = x^2 - y^2 - x\cos\alpha - y\sin\alpha = 0.$$

2° Les points de rencontre de cette hyperbole avec le cercle sont : d'abord les trois points M, qui sont les sommets d'un triangle équilatéral MM_1M_2 ; puis le point $x = \cos\alpha$, $y = -\sin\alpha$, qui est en évidence sur l'équation $H = 0$, et qui est le point M_0, symétrique de M par rapport à l'axe des x.

3° Les coordonnées du centre de l'hyperbole sont données par les deux équations

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial y} = 0,$$

ou

$$2x - \cos\alpha = 0, \qquad 2y + \sin\alpha = 0.$$

L'élimination de α entre ces deux équations est immédiate et donne l'équation du lieu du centre,

$$(1) \qquad x^2 + y^2 = \frac{1}{4};$$

cette équation représente un cercle concentrique au cercle proposé et ayant pour rayon $\frac{1}{2}$. En outre, il n'y a qu'à se reporter aux équations du centre pour voir que le centre de l'hyperbole, ω, est au milieu de OM_0.

Les coniques singulières qui passent aux points de rencontre de l'hyperbole $H = 0$ et du cercle $C = 0$ sont des coniques particulières du faisceau $H + \lambda C = 0$, celles qui ont un point double ; or on exprime que la conique $H + \lambda C = 0$ a un point double, en exprimant que les trois dérivées partielles du premier membre ont une solution commune ; on obtient ainsi

$$2x - \cos\alpha + 2\lambda x = 0,$$
$$-2y - \sin\alpha + 2\lambda y = 0,$$
$$x\cos\alpha + y\sin\alpha + 2\lambda = 0,$$

et il n'y a plus qu'à éliminer α et λ entre ces trois équations pour avoir le lieu du point double : les deux premières donnent $\cos\alpha = 2(\lambda + 1)x$, $\sin\alpha = 2(\lambda - 1)y$; en portant ces valeurs dans la dernière équation, on obtient $\lambda = \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2 + 1}$; de là on déduit $\lambda + 1 = \frac{2y^2 + 1}{x^2 + y^2 + 1}$, $\lambda - 1 = \frac{-2x^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}$; il suffit alors d'exprimer que $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, pour avoir le lieu demandé.

L'équation de ce lieu peut s'écrire sous deux formes également simples :

$$(2) \quad \begin{cases} 16x^2y^2(x^2 + y^2 + 2) - (x^2 + y^2 - 1)^2 = 0, \\ (x^2 - y^2)^2(x^2 + y^2 + 2) - \left(x^2 + y^2 - \frac{1}{4}\right)(x^2 + y^2 + 1)^2 = 0. \end{cases}$$

Ces deux équations montrent que la courbe admet pour axes de symétrie les deux axes de coordonnées et les bissectrices de l'angle des axes ; la première montre en outre que cette courbe admet quatre points doubles sur le cercle C aux points où les axes le rencontrent et deux à l'infini sur ces axes

eux-mêmes; la seconde montre de même que la courbe (2) admet quatre points doubles imaginaires situés sur le cercle $x^2+y^2+1=0$ aux points où les bissectrices des axes le rencontrent. Cette courbe, qui est du sixième degré, admet donc son nombre maximum de points doubles, et, par suite, elle est unicursale. Rien n'est plus aisé d'ailleurs que de trouver les coordonnées du point courant de ce lieu en fonction rationnelle d'un paramètre. En effet, revenons aux équations qui donnent le point double, et tirons des deux premières $x=\frac{\cos\alpha}{2(\lambda+1)}$, $y=\frac{\sin\alpha}{2(\lambda-1)}$; puis portons ces deux valeurs dans la dernière ; nous aurons

$$\frac{\cos^2\alpha}{2(\lambda+1)}+\frac{\sin^2\alpha}{2(\lambda-1)}+2\lambda=0;$$

cette équation, combinée avec la relation $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$, donne les valeurs de $\cos^2\alpha$ et $\sin^2\alpha$,

$$\frac{\cos^2\alpha}{(2\lambda-1)^2(\lambda+1)}=\frac{\sin^2\alpha}{(2\lambda+1)^2(1-\lambda)}=\frac{1}{2}.$$

On déduit immédiatement de là

$$\cos\alpha=\sqrt{\frac{\lambda+1}{2}}\,(2\lambda-1),$$

et

$$\sin\alpha=\sqrt{\frac{1-\lambda}{2}}\,(2\lambda+1);$$

puis,

$$x=\frac{2\lambda-1}{2\sqrt{2(\lambda+1)}},$$

$$y=\frac{2\lambda+1}{2\sqrt{2(1-\lambda)}}.$$

Si maintenant l'on pose $2(\lambda+1)=4\cos^2\varphi$, on obtient de suite $2(1-\lambda)=4\sin^2\varphi$; et, par suite, les valeurs de x et de y prennent les formes

$$x=\pm\frac{4\cos^2\varphi-3}{4\cos\varphi},$$

$$y=\pm\frac{4\cos^2\varphi-1}{4\sin\varphi},$$

dans lesquelles les doubles signes sont indépendants l'un de l'autre. En prenant maintenant, comme on le fait habituellement, pour paramètre variable, $t=\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, les valeurs de x et de y prennent les formes rationnelles

$$x=\pm\frac{4(1-t^2)^2-3(1+t^2)^2}{4(1-t^4)},$$

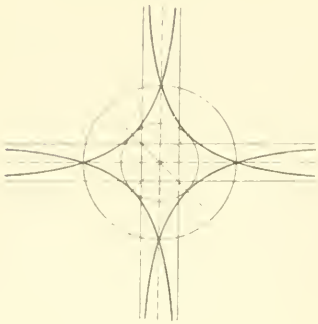
$$y=\pm\frac{4(1-t^2)^2-(1+t^2)^2}{8t(1+t^2)}.$$

Il est facile de voir alors que la combinaison $++$ suffit à représenter toute la courbe ; car, par le changement de t en $-t$, elle donne la combinaison $+-$, par le changement de t en $\frac{1}{t}$, la combinaison $-+$, et par le changement de t en $-\frac{1}{t}$, la combinaison $--$. La courbe est donc représentée entièrement par les deux équations

$$(3)\qquad \begin{cases} x=\dfrac{t^4-14t^2+1}{4(1-t^4)}, \\[2ex] y=\dfrac{3t^4-10t^2+3}{8t(1+t^2)}, \end{cases}$$

et il ressort des deux premières remarques que nous venons de faire que cette courbe est symétrique par rapport à Ox et à Oy, et, qu'en tenant compte de ces symétries, il suffit de faire varier t de 0 à 1,

et de construire la portion de courbe correspondante. Les variations des deux fonctions x et y, dans l'intervalle $(0, 1)$, sont très faciles à étudier : si l'on y adjoint cette propriété que la courbe a d'être tangente extérieurement au cercle $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, aux points où les bissectrices des axes le rencontrent, propriété évidente sur la seconde équation (2), la courbe se trace immédiatement (voir la figure ci-contre).



4° Désignons maintenant par $ux + vy + w = 0$, $u'x + v'y + w' = 0$ les deux droites en lesquelles se décompose l'une des coniques impropres du faisceau $H + \lambda C = 0$; nous aurons l'identité

$$x^2 - y^2 - x\cos\alpha - y\sin\alpha - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$
$$= (ux + vy + w)(u'x + v'y + w'),$$

qui équivaut aux six égalités

$$uu' = 1 + \lambda, \qquad vv' = -1 + \lambda, \qquad uv' + vu' = 0,$$
$$uw' + wu' = -\cos\alpha, \qquad vw' + wv' = -\sin\alpha, \qquad ww' = -\lambda;$$

il nous suffira d'éliminer u, v, w, λ et α entre ces six équations pour avoir l'équation tangentielle de l'enveloppe de la droite $ux + vy + w = 0$.

Or les deux premières nous donnent $u' = \frac{1+\lambda}{u}$, $v' = \frac{\lambda - 1}{v}$, et la troisième devient alors $u^2 + v^2 \lambda + v^2 - u^2 = 0$; elle donne $\lambda = \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2}$. La dernière donne $w' = -\frac{\lambda}{w}$; puis, en exprimant que $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, la quatrième et la cinquième donnent la relation

$$(uw' + wu')^2 + (vw' + wv')^2 = 1,$$

où il suffit de porter les valeurs que l'on vient d'assigner à u', v', w', pour obtenir l'équation de l'enveloppe. Cette équation est

$$(4) \qquad (u^2 + v^2 - 4w^2)(u^2 - v^2)^2 - w^2(u^2 + v^2)^2 = 0;$$

elle se décompose en deux. $u^2 + v^2 - 4w^2 = 0$, qui représente un cercle concentrique au cercle C et de rayon $\frac{1}{2}$, et une courbe de quatrième classe, $(u^2 - v^2)^2 - w^2(u^2 + v^2) = 0$. La première est l'enveloppe, évidente *a priori*, des côtés du triangle équilatéral $M_0M_1'M_2'$; la seconde est l'enveloppe des droites M_0M', M_0M_1', M_0M_2'. Si l'on fait tourner les axes de 45° autour de l'origine, la seconde équation se transforme en $\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} - \frac{4}{w^2} = 0$, et, sous cette forme, on reconnaît l'hypocycloïde à quatre rebroussements qui correspond à la longueur $l = 2$. Cette deuxième courbe est donc l'enveloppe d'une droite de longueur constante $(l = 2)$, dont les deux extrémités glissent sur les bissectrices de l'angle des axes. C'est une courbe bien connue ; nous ne nous arrêterons pas à la construire.

5° Les axes de l'hyperbole $H = 0$ ont pour équations

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial y} = 0,$$

ou

$$2x - \cos\alpha = 0, \qquad 2y - \sin\alpha = 0.$$

En éliminant successivement α entre ces deux équations et l'équation $H = 0$, on obtient les deux lieux de sommets :

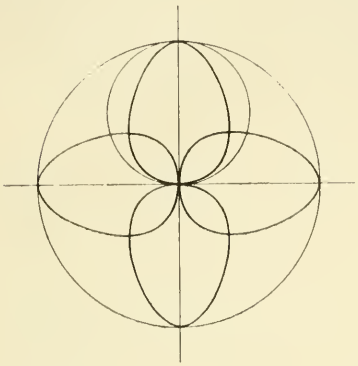
$$(5) \qquad \begin{cases} (x^2 + y^2)^2 + 4x^2y^2 - y^2 = 0, \\ (x^2 + y^2)^2 + 4x^2y^2 - x^2 = 0. \end{cases}$$

Chacun d'eux est une courbe fermée, symétrique par rapport aux deux axes de coordonnées ; ils sont d'ailleurs symétriques l'un de l'autre par rapport aux deux bissectrices, et il suffira de construire

la portion du premier qui est dans le premier angle des axes. Or la première équation (5) peut s'écrire

$$(x^2+y^2-y)(x^2+y^2+y)+4x^2y^2=0;$$

sous cette forme, on voit que la portion envisagée, qui est à l'extérieur du cercle $x^2+y^2+y=0$, est forcément à l'intérieur du cercle $x^2+y^2-y=0$, et que de plus elle touche ce cercle aux points où il est coupé par Oy. L'équation de la courbe, successivement envisagée comme une équation bicarrée en y ou en x, nous montre aisément que y a deux valeurs réelles et positives, tant que $x<\frac{1}{2\sqrt{2}}$, et que x a une valeur réelle et positive, tant que $y<1$. Cette portion de courbe est alors aisée à construire : c'est une demi-ovale. Les symétries signalées permettent d'achever la construction du lieu total des sommets.



6° La droite ωM a pour équations

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 1 \\ \cos\alpha & -\sin\alpha & 2 \end{vmatrix}=0,$$

ou

$$\frac{3x}{\cos\alpha}-\frac{y}{\sin\alpha}-2=0;$$

les coordonnées tangentielles de cette droite sont données par les égalités

$$\theta u=\frac{3}{\cos\alpha},\qquad \theta v=-\frac{1}{\sin\alpha},\qquad \theta w=-2,$$

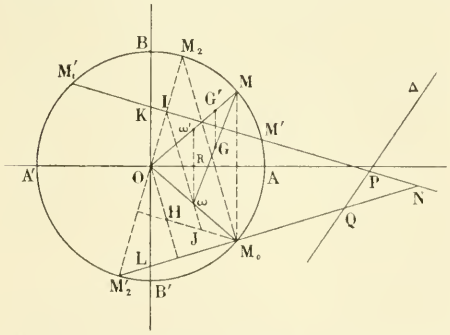
et, en éliminant entre elles α et θ, on a sans peine l'équation tangentielle de l'enveloppe de cette droite,

$$\frac{9}{u^2}+\frac{1}{v^2}-\frac{4}{w^2}=0.$$

C'est la développée d'une ellipse ayant pour axes Ox et Oy et pour longueurs de ses demi-axes $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{4}$.

Solution géométrique.

1° et **2°** On apprend, en trigonométrie, que les arcs qui sont les tiers de ceux ayant une extrémité donnée, M, ont trois extrémités sur le cercle trigonométrique, aux sommets d'un triangle équilatéral dont l'un des sommets est au tiers de l'arc ordinaire $\widehat{AM}$, à partir de l'origine A. Toutes les hyperboles équilatères circonscrites à ce triangle, $M'M_1'M_2'$, passent aussi au point de concours des hauteurs de ce triangle, qui est ici le centre O du cercle donné. Le quatrième point de rencontre du cercle avec celle de ces hyperboles qui a un axe parallèle à OA, s'obtient en menant par le point M_2' une droite $M_2'M_0$, qui fasse avec Ox, et en sens contraire, le même angle que celui que donne la première corde $M'M_1'$. Cela va nous permettre de fixer simplement la position du point M_0. Bornons-nous, pour abréger, à envisager le cas de figure qui correspond aux inégalités



$$0<\widehat{AM}<\frac{\pi}{2};$$

nous avons alors en valeur absolue

angle $M_2'NM_1'$ = double de angle de $M'M_1'$ avec OA,

ou
$$\widehat{M_1'M_2} - \widehat{M_0M'} = 2\,\widehat{AM_1'} - \widehat{AM'},$$

ou enfin
$$\frac{2\pi}{3} - \widehat{M_0M'} = 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\widehat{AM}}{3} - \frac{\widehat{AM'}}{3}\right);$$

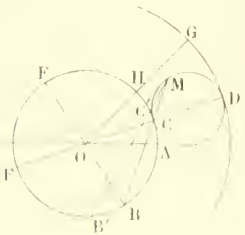
par conséquent, $\widehat{M_0M'} = 4\,\frac{\widehat{AM}}{3}$, et, par suite, $\widehat{AM_0} = \widehat{AM}$. Le point M_0 est donc le symétrique de M par rapport à OA.

3° Pour avoir le centre de cette hyperbole H, il faut déterminer au moins deux diamètres de cette courbe ; nous allons chercher ceux qui sont relatifs aux divers côtés du triangle équilatéral, par exemple celui qui est conjugué des cordes parallèles à $M'M_1'$. A cet effet, remarquons que l'hyperbole passe aussi au point de concours des hauteurs du triangle OM_0M_2 ; ce point H est déterminé par les deux droites OH et M_0H respectivement parallèles à M_0M_2 et $M'M_1'$; le diamètre cherché est donc la droite HI qui joint les milieux des cordes parallèles, $M'M_1'$ et M_0H ; mais cette droite est équidistante des deux parallèles M_0M_2 et OH ; donc elle passe au milieu, ω, de OM_0. Les deux autres diamètres dont nous avons parlé y passent aussi ; donc ce point est le centre de l'hyperbole H. Le lieu de ce centre est donc le cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{2}$.

3° (*suite*). Pour obtenir le lieu des centres des coniques singulières passant aux quatre points M_0, M', M_1', M_2', il faut trouver le lieu du point de rencontre des deux droites M_0M_2' et $M'M_1'$. Ce lieu est du sixième ordre. En effet, soient Δ une droite quelconque, et P, Q les points où elle est rencontrée respectivement par les cordes $M'M_1'$, M_0M_2 ; cherchons la correspondance qui existe entre les points P et Q. Remarquons, pour cela, que par le point P passent deux droites telles que $M'M_1'$, les tangentes au cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{2}$; à chacune d'elles correspond une droite unique telle que M_2M_0 ; donc à tout point P de la droite Δ correspondent deux points Q. A tout point Q de Δ correspondent quatre points P ; car nous allons montrer bientôt que l'enveloppe de M_2M_0 est de quatrième classe ; il y a donc quatre droites de ce genre qui passent au point Q, et, à chacune d'elles correspond une droite unique telle que $M'M_1'$. La correspondance entre les points P et Q est donc (4, 2) ; ces deux séries ont six points doubles et la droite Δ rencontre le lieu cherché en six points. Le point N, qui décrit le lieu est rejeté à l'infini, quand les deux droites $M'M_1'$, $M_2'M_0$ sont parallèles, ce qui n'arrive que si elles sont parallèles à OA, ou à la direction perpendiculaire OB. Ce sont donc les seules directions asymptotiques réelles. D'ailleurs comme l'ordonnée du point N est toujours la demi-somme des ordonnées des points K et L où les deux cordes rencontrent OB, à la limite, quand le point N est à l'infini dans la direction OA, cette ordonnée est $+\frac{1}{4}$ ou $-\frac{1}{4}$. Il y a donc deux asymptotes parallèles à OA ; de même deux parallèles à OB. Enfin on voit sans peine que les points A, A', B, B' sont des points doubles du lieu, et que le lieu est symétrique par rapport à OA, OB et aux deux bissectrices de l'angle OA, OB.

4° L'une des coniques singulières passant aux quatre points M_0, M', M_1', M_2' est formée par le couple de droites $M_1'M_2'$ et M_0M'. L'enveloppe de la droite $M_1'M_2'$ est évidente *a priori* : c'est le cercle ayant pour centre O et pour rayon $\frac{1}{2}$.

Quant à l'enveloppe de M_0M' elle est plus difficile à apercevoir. Faisons une nouvelle figure et désignons maintenant cette droite par BC ; c'est une corde du cercle telle que les arcs AC et AB soient de signes contraires et que $|AB| = 3\,|AC|$. Considérons alors une seconde corde infiniment voisine de BC, B'C', et désignons par M le point où elle rencontre la première ; les deux droites BB', CC' sont anti-parallèles par rapport à l'angle M ; les deux triangles MBB' et MCC' sont semblables, et l'on a, à la limite, $MB = 3MC$; donc MC est la moitié de BC. Décrivons alors un cercle tangent extérieurement au cercle donné en C et passant en M ; ce cercle a pour rayon $\frac{1}{2}$. Décrivons maintenant un autre cercle ayant pour centre le point O et tangent intérieurement au nouveau cercle ; il a un rayon double du cercle donné, quadruple du cercle décrit sur CD comme diamètre.



Il est alors évident que la longueur de l'arc DM est moitié de celle de l'arc BE ou de celle de l'arc CF ; si donc on mène le rayon OHG, tel que l'arc CH soit le quart de CF, l'arc correspondant DG, sur le cercle extérieur, a même longueur que l'arc DM. Or $\widehat{CF} = \pi - \widehat{AC} - \widehat{AB} = \pi - 4AC$; par suite $\frac{\widehat{CF}}{4} = \frac{\pi}{4} - \widehat{AC}$;

l'arc AH, qui est égal à $\widehat{AC} + \frac{\widehat{CF}}{4}$, est donc égal à $\frac{\pi}{4}$, et le point G est fixe sur le cercle de rayon 2; la longueur de l'arc DG étant la même que celle de l'arc DM, il en résulte que le cercle décrit sur DC comme diamètre roule intérieurement sans glisser sur le cercle de rayon 2 et que le point M décrit une hypocycloïde à quatre rebroussements dont le point G est l'un des points de rebroussements. Telle est l'enveloppe de la droite M_0M'.

5° Il est facile de donner une définition géométrique simple du lieu des sommets. (Voir la première figure.) Considérons, par exemple, les sommets situés sur l'axe parallèle à OB. Soit ωR cet axe; en appelant ρ la distance de l'un de ces sommets au point ω, on a $\rho^2 = \overline{\omega R}^2 - \overline{OR}^2$; les deux sommets se construisent donc en décrivant du point R comme centre, avec RO comme rayon, un cercle, en menant du point ω une tangente à ce cercle et en rabattant cette longueur, de part et d'autre de ω, sur ωR. On construit ainsi le lieu par points d'une manière très aisée et on reconnaît facilement toutes ses particularités. Il y a un second lieu tout à fait pareil à celui-ci, relatif au second axe qui est parallèle à OA, et symétrique du précédent par rapport aux bissectrices de l'angle AOB.

6° Cherchons pour terminer l'enveloppe de ωM. A cet effet, désignons par x et y les coordonnées du point M, par X et Y celles du milieu de ωM, du point G; on a évidemment $X = \frac{3x}{4}$, $Y = \frac{y}{4}$; par suite, le lieu du point G est l'ellipse $\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{1} = \frac{1}{16}$; le cercle homographique correspondant est le cercle concentrique au cercle proposé et dont le rayon est $\frac{3}{4}$; le point qui a pour projection le point G est le point G′ situé aux $\frac{3}{4}$ de OM, à partir de O; la tangente à ce cercle en G′ est G′T perpendiculaire à OM en G′ et la tangente à l'ellipse est la droite TG. Comme le point G′ est équidistant de M et du milieu ω' de OM, les deux longueurs TM et $T\omega'$ sont égales; or $T\omega = T\omega'$, par raison de symétrie; donc $T\omega = TM$, et la droite TG est perpendiculaire à ωM. Il en résulte que ωM est la normale à l'ellipse que décrit le point G, et que, par suite, elle enveloppe une développée d'ellipse.

Solution analytique de M. Vasnier (lycée de Versailles).

---

403. — *Par un point donné, A, on mène les normales à la surface représentée par l'équation*

$$z(x^2 + y^2) = kxy,$$

en coordonnées rectangulaires.

1° *Prouver que les points d'incidence de ces normales sont situés sur une conique* (Γ).

2° *Trouver le lieu du centre de cette conique quand on assujettit son plan à passer par un point donné* B.

3° *Par le centre de la conique on mène la perpendiculaire à son plan; trouver le nombre de ces perpendiculaires qui passent par un point donné* C. *Quel est le lieu des points* C *pour lesquels deux des perpendiculaires qui y passent sont confondues?*

4° *Par le point* A′ *symétrique du point* A *par rapport au plan* zOx, *on mène la perpendiculaire* Δ *au plan de la conique* (Γ). *Prouver que le produit de la plus courte distance de cette droite à l'axe des* z, *par la tangente de l'angle qu'elle fait avec cet axe, est indépendant de la position du point* A. *Trouver la valeur de ce produit, et trouver ensuite le lieu des droites* Δ *qui passent par un point, ainsi que l'enveloppe de celles de ces droites qui sont dans un plan.*

1° Les coordonnées des pieds des normales menées du point A (α, β, γ) à la surface vérifient les équations

$$z(x^2 + y^2) - kxy = 0,$$

$$\frac{\alpha - x}{2zx - ky} = \frac{\beta - y}{2zy - kx} = \frac{\gamma - z}{x^2 + y^2}.$$

Ces rapports sont égaux à $\dfrac{x(\alpha - x) + y(\beta - y)}{x(2zx - ky) + y(2zy - kx)}$;

comme le dénominateur est nul, le numérateur l'est aussi; les pieds de normales sont donc sur le

cylindre circulaire

$$(1) \qquad x^2 + y^2 - \alpha x - \beta y = 0.$$

En éliminant $x^2 + y^2$ entre cette équation et celle de la surface, on a

$$(2) \qquad z(\alpha x + \beta y) - kxy = 0,$$

équation qui représente un cône ayant pour sommet l'origine et contenant également les pieds des normales menées du point A à la surface donnée.

Le cône et le cylindre ont une génératrice commune, Oz, et même plan tangent le long de cette génératrice $(\alpha x + \beta y = 0)$. Ils se coupent donc suivant une seconde courbe plane, dont on aura l'équation en combinant les équations (1) et (2) de manière à obtenir $\alpha x + \beta y$ en facteur. Multiplions pour cela les deux membres de l'équation (1) par $k\alpha\beta$, ceux de l'équation (2) par $-(\alpha^2 + \beta^2)$, et ajoutons ; nous avons

$$k\alpha\beta(x^2 + y^2) + xy(\alpha^2 + \beta^2) - (\alpha x + \beta y)k\alpha\beta + z(\alpha^2 + \beta^2) = 0,$$

ou

$$(\alpha x + \beta y)[k(\beta x + \alpha y) - z(\alpha^2 + \beta^2) - k\alpha\beta] = 0.$$

On en conclut que les pieds des normales considérées sont situés sur la conique (Γ), intersection du cylindre

$$(1) \qquad x^2 + y^2 - \alpha x - \beta y = 0$$

et du plan

$$(3) \qquad k(\beta x + \alpha y) - z(\alpha^2 + \beta^2) - k\alpha\beta = 0.$$

2° Le centre de cette conique est à l'intersection du plan (3) et de l'axe du cylindre. Les équations de cet axe sont

$$2x - \alpha = 0, \qquad 2y - \beta = 0.$$

En remplaçant dans l'équation (3) x par $\frac{\alpha}{2}$ et y par $\frac{\beta}{2}$, on trouve $z = 0$; il en résulte que le centre est dans le plan des xy. Écrivons que le plan de la conique passe par le point $B(x_0, y_0, z_0)$: on a

$$k(\beta x_0 + \alpha y_0) - z_0(\alpha^2 + \beta^2) - k\alpha\beta = 0 ;$$

remplaçons α et β par $2x$ et $2y$; il vient

$$2z_0(x^2 + y^2) + 2kxy - k(xy_0 + yx_0) = 0,$$

équation d'une conique située dans le plan des xy et qui est le lieu du centre de la conique (Γ).

3° La perpendiculaire menée par le centre de la conique à son plan a pour équations

$$\frac{x - \frac{\alpha}{2}}{k\beta} = \frac{y - \frac{\beta}{2}}{k\alpha} = \frac{z}{-(\alpha^2 + \beta^2)}.$$

Écrivons que cette droite passe par le point $C(x_1, y_1, z_1)$; on a

$$\frac{x_1 - \frac{\alpha}{2}}{k\beta} = \frac{y_1 - \frac{\beta}{2}}{k\alpha} = \frac{z_1}{-(\alpha^2 + \beta^2)}.$$

Il faut résoudre ces équations par rapport à α et à β. Pour cela, désignons par $\frac{t}{2k}$ la valeur commune de ces trois rapports ; on en déduit

$$\alpha + \beta t = 2x_1,$$
$$\beta + \alpha t = 2y_1,$$
$$(\alpha^2 + \beta^2)t + 2kz_1 = 0.$$

Les deux premières équations donnent

$$\alpha = \frac{2(x_1 - ty_1)}{1 - t^2}, \qquad \beta = \frac{2(y_1 - tx_1)}{1 - t^2},$$

et en remplaçant dans la troisième, on a

$$(4) \qquad kz_1(1 - t^2)^2 + 2t(x_1 - ty_1)^2 + (y_1 - tx_1)^2 = 0.$$

A chaque racine de cette équation correspond un système de valeurs de α, β et par suite une des droites considérées. On en conclut que par le point C on peut mener quatre droites répondant à la question.

Deux de ces droites seront confondues si l'équation (4) a une racine double. Or cette équation est réciproque, on peut l'écrire

$$kz_1t^4 + 2t^3(x_1^2 + y_1^2) - 2t^2(kz_1 + 4x_1y_1) + 2t(x_1^2 + y_1^2) + kz_1 = 0.$$

En posant $t + \frac{1}{t} = T$, elle devient

$$kz_1T^2 + 2(x_1^2 + y_1^2)T - 4(kz_1 + 2x_1y_1) = 0.$$

Pour que cette équation ait ses racines égales, on doit avoir

$$(x_1^2 + y_1^2)^2 + 4kz_1(kz_1 + 2x_1y_1) = 0.$$

Le point C doit donc décrire une surface du quatrième degré.

Remarque. — L'équation (4) peut avoir une racine double sans que l'équation en T en ait une ; il faut pour cela que l'équation (4) admette la racine $+1$ ou la racine -1. Supposons qu'elle ait la racine $+1$, on a $x_1 - y_1 = 0$. En outre les équations qui déterminent α et β en fonction de t deviennent

$$\alpha + \beta = 2x_1,$$
$$\alpha^2 + \beta^2 + 2kz_1 = 0.$$

Elles déterminent en général deux systèmes de valeurs de α, β ; mais ces deux systèmes de valeurs ne sont confondus que si l'on a

$$x_1^2 + kz_1 = 0.$$

On reconnaît aisément que les valeurs de x_1, y_1, z_1 qui vérifient les équations

$$x_1 - y_1 = 0, \qquad x_1^2 + kz_1 = 0,$$

vérifient aussi l'équation de la surface du quatrième degré. Cette surface constitue donc à elle seule le lieu cherché.

4° La perpendiculaire Δ menée du point $A'(\alpha, -\beta, \gamma)$ sur le plan de la conique Γ a pour équations

$$\frac{x - \alpha}{k\beta} = \frac{y + \beta}{k\alpha} = \frac{z - \gamma}{-(\alpha^2 + \beta^2)}.$$

La plus courte distance de cette droite à l'axe des z est égale à la distance de l'origine à la projection de cette droite sur le plan des xy,

$$\alpha x - \beta y - (\alpha^2 + \beta^2) = 0.$$

Cette plus courte distance est donc égale à $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

D'autre part, en désignant par θ l'angle aign de la droite Δ avec Oz, on a

$$\cos\theta = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\sqrt{k^2(\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha^2 + \beta^2)^2}},$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{k}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

Le produit de $\operatorname{tg}\theta$ par la plus courte distance est égal à k.

L'équation générale des droites Δ renfermant trois paramètres, ces droites forment un complexe. Cherchons l'équation de ce complexe en fonction des coordonnées pluckériennes X, Y, Z, L, M, N d'une des droites. Rappelons que X, Y, Z sont les paramètres directeurs de la droite et que L, M, N ont respectivement pour valeurs $yZ - zY$, $zX - xZ$, $xY - yX$, dans lesquelles x, y, z sont les coordonnées d'un point quelconque de la droite.

Pour une droite Δ, on a

$$Z = -(\alpha^2 + \beta^2), \qquad N = k(\alpha^2 + \beta^2) ;$$

l'équation du complexe est donc

$$kZ + N = 0.$$

C'est un complexe linéaire ; les droites qui passent par un point (x_0, y_0, z_0) sont dans un plan qui

a pour équation

$$kz - z_0 - yx_0 - xy_0 = 0,$$

et les droites qui sont dans un plan $u_0t + v_0y + w_0z + r_0 = 0$ passent par un même point qui a pour équation tangentielle

$$k(uv_0 - vu_0) + cw_0 - r_0w = 0.$$

VASNIER, lycée de Versailles.

Ont résolu cette question : MM. M. V. CARRUS, 12e régiment d'artillerie, à Alger ; Henri GOBLAN, lycée Condorcet ; Ch. HUGON, à Nîmes.

QUESTIONS PROPOSÉES

448. — Etant donnée une ellipse fixe (E), on considère toutes les coniques (C) qui sont bitangentes à cette ellipse, tangentes à une droite (D), et qui sont vues d'un point donné P sous un angle droit.

On demande :

1° Le lieu du pôle de la corde des contacts ;

2° D'étudier la nature de ce lieu, quand la droite (D) varie dans le plan ;

3° De trouver, dans le cas où la droite (D) est rejetée à l'infini, le lieu des foyers et l'enveloppe des axes des coniques (C).

HUGON, à Nîmes.

449. — On donne un ellipsoïde rapporté à ses axes et une droite Δ située d'une manière quelconque dans l'espace. Par la droite Δ on mène le plan P perpendiculaire au plan tangent en un point M de l'ellipsoïde.

1° Trouver le lieu du point de rencontre, μ, du plan P avec le diamètre de l'ellipsoïde qui aboutit au point M, quand le point M décrit l'ellipsoïde.

2° Ce lieu est une quadrique S passant par la droite Δ : trouver toutes ses génératrices rectilignes, et indiquer comment doit être placée la droite Δ pour qu'elle soit un paraboloïde hyperbolique.

3° Prouver que la quadrique S contient la cubique aux pieds des normales relative à un point quelconque de Δ, et trouver, sur l'ellipsoïde, le lieu du point M lorsque le point μ décrit la cubique aux pieds des normales relative à un point donné de Δ.

4° On considère une deuxième droite Δ_1 rencontrant Δ, et la quadrique correspondante, S_1, analogue à S. Prouver que les quadriques S et S_1 ont en commun une cubique gauche et une droite D ; trouver cette droite D et en indiquer une construction géométrique simple.

5° Soit D_1 l'intersection du plan P et du plan tangent en M à l'ellipsoïde. Montrer que si le point M décrit l'ellipsoïde, il y a deux droites D_1 passant par un point donné, ω, de l'espace, et trouver le lieu des points ω pour lesquels les deux droites qui y passent sont confondues. Ce lieu est une surface Σ du quatrième ordre, et qui admet Δ comme droite double : prouver qu'elle peut être engendrée par une conique, et donner la définition géométrique simple de cette conique.

X. ANTOMARI.

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

413. — 1° *On donne la courbe*

$$y^4 - x^4 + 2ax^2y = 0,$$

et on demande de construire cette courbe en supposant a positif.

2° *On joint l'origine a un point quelconque, M, de cette courbe, et on trace la symétrique de* OM *par rapport a la bissectrice du premier angle des axes ; soit* (D) *cette droite ; on élève ensuite au point* M *à* OM *une perpendiculaire qui rencontre la droite* (D) *en un point* I, *et on demande le lieu du point* I.

3° *Sur* OI *on prend* OI = MI ; *trouver le lieu du point* I.

1° Si dans l'équation de la courbe proposée,

$$y^4 - x^4 + 2ax^2y = 0,$$

nous remplaçons y par tx, nous obtenons l'équation nouvelle

$$x^4(t^4 - 1) + x^3 2at = 0;$$

en supprimant le facteur x^3, qui donne les trois points de rencontre avec la courbe confondus à l'origine de toute droite, $y = tx$, passant en ce point, il reste une équation du premier degré en x qui donne l'abscisse de l'autre point de rencontre avec la courbe en fonction du coefficient angulaire t du rayon qui va de l'origine à ce point. Les coordonnées du point qui décrit la courbe peuvent donc s'exprimer rationnellement à l'aide du paramètre t, et sont ainsi

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{2at}{1 - t^4}, \\[2ex] y = \dfrac{2at^2}{1 - t^4}. \end{cases}$$

Nous aurons la courbe tout entière en faisant, dans ces expressions, varier t de $-\infty$ à $+\infty$; or nous pouvons remarquer de suite que par le changement de t en $-t$, x change simplement de signe et que y n'est pas altéré; cela met en évidence une symétrie par rapport à Oy, visible d'ailleurs sur l'équation proposée, et permet de restreindre l'intervalle de moitié, c'est-à-dire de se borner à faire varier t de 0 à $+\infty$: il restera ensuite à tracer la portion de courbe symétrique de celle obtenue ainsi, par rapport à Oy.

Dans cet intervalle, les fonctions x et y ne deviennent discontinues que pour une valeur de t, $t = 1$; pour toute autre valeur de t, le sens de marche de chacune de ces fonctions nous sera donné par le signe de sa dérivée; prenons les dérivées de x et y par rapport à t,

$$x' = 2a\frac{1 + 3t^4}{(1 - t^4)^2}, \qquad y' = 4at\frac{1 + t^4}{(1 - t^4)^2};$$

ces expressions sont toujours positives, quand t varie de 0 à $+\infty$; par conséquent x et y sont toujours croissantes dans le même intervalle. Quand t croît de 0 à 1, x et y croissent de 0 à $+\infty$; puis quand t croît de 1 à $+\infty$, x et y croissent de $-\infty$ à 0. Au début on a $\dfrac{y}{x} = t = 0$, la tangente à l'origine à la première branche est donc l'axe des x. A la fin on a $\dfrac{y}{x} = t = \infty$; la tangente à l'origine à la seconde branche est donc l'axe des y.

Cherchons l'asymptote. A cet effet, remarquons que pour $t = 1$, on a $\dfrac{y}{x} = 1$. Le coefficient angulaire de la direction asymptotique est donc égal à 1; nous aurons l'ordonnée à l'origine de l'asymptote en cherchant la limite de $\delta = y - x$, quand t tend vers 1; nous obtenons ainsi

$$\delta = y - x = \frac{2at(t - 1)}{1 - t^4} = \frac{-2at}{1 + t + t^2 + t^3};$$

la valeur limite de δ est donc $-\dfrac{a}{2}$, et l'asymptote a pour équation

$$y - x + \frac{a}{2} = 0.$$

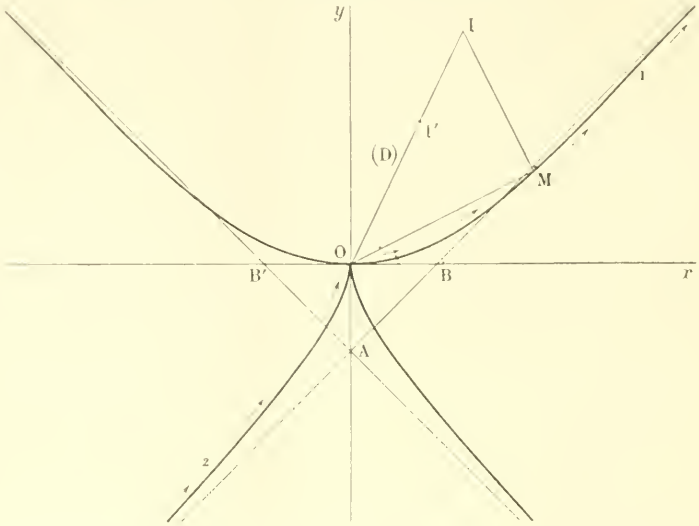
Nous aurons la position de la courbe par rapport à son asymptote en étudiant le signe de la différence $\delta - \left(\dfrac{-a}{2}\right)$ ou $\delta + \dfrac{a}{2}$, pour les valeurs de t voisines de l'unité; or cette différence a pour valeur

$$\delta + \frac{a}{2} = \frac{a(1 - t)(1 - 2t - t^2)}{2(1 + t + t^2 + t^3)};$$

on a donc

$$\delta + \frac{a}{2} = a(1 - t)\left(-\frac{1}{4} + \varepsilon\right),$$

ε étant infiniment petit en même temps que $1 - t$. La différence $\xi - \frac{a}{2}$ est donc négative quand t est plus petit que 1, et positive quand t est plus grand que 1 : la première branche infinie est donc au-dessous de l'asymptote, la seconde au-dessus. Tous ces résultats rassemblés donnent immédiatement la forme de la courbe. Nous la figurons ci-dessous, complétée à l'aide de la symétrie que nous avons constatée, la partie qui a été obtenue directement étant marquée par des flèches.



2° Conformément aux notations que nous avons choisies, l'équation de OM est $y = tx$; nous aurons la symétrique de cette droite par rapport à la première bissectrice en échangeant entre elles x et y ; d'ailleurs les coordonnées du point M sont

$$x = \frac{2at}{1 - t^2}, \qquad y = \frac{2at^2}{1 - t^2};$$

par suite l'équation de la droite MI, perpendiculaire à OM au point M, est

$$y - \frac{2at^2}{1 - t^2} = -\frac{1}{t}\left(x - \frac{2at}{1 - t^2}\right),$$

ou

$$y + \frac{x}{t} - \frac{2a}{1 - t^2} = 0,$$

en supprimant les solutions de $1 + t^2 = 0$. Il n'y a plus qu'à éliminer t entre cette équation et l'équation de la droite (D), $ty = x$; nous obtenons ainsi, après suppression des deux lieux exceptionnels $x = 0$, $y = 0$, l'équation

$$(2) \qquad x^2 - y^2 + ay = 0,$$

qui représente le vrai lieu. Ce lieu est une hyperbole équilatère qui passe à l'origine des coordonnées, où elle admet pour tangente l'axe des x, et dont les asymptotes sont parallèles aux bissectrices des axes.

Il y a trois lieux exceptionnels qui étaient faciles à prévoir : l'axe des x, l'axe des y et les deux droites isotropes, $x^2 + y^2 = 0$, qui correspondent aux solutions de $1 + t^2 = 0$; le premier lieu s'obtient quand le point M vient coïncider avec le point O sur l'une des branches tangentes à Oy, la

branche 2, par exemple, car alors la symétrique de OM par rapport à la première bissectrice et la perpendiculaire à OM au point M viennent coïncider toutes deux avec Ox et se coupent en tous les points de Ox ; le second lieu s'obtient d'une façon analogue, quand le point M vient coïncider avec le point O, sur la branche 1, par exemple, qui est tangente à Ox ; quant au troisième lieu, on l'obtient quand le point M va à l'infini sur la courbe dans l'une des directions $y = ix$ ou $y = -ix$, car si nous supposons que OM coïncide avec $y = ix$, par exemple, la symétrique de cette droite par rapport à la première bissectrice est $y = -ix$, et la perpendiculaire à $y = ix$, au point à l'infini sur cette droite, est une droite quelconque parallèle à $y = ix$; tous les points de $y = -ix$ font donc partie du lieu, à titre exceptionnel, et de même pour ceux de $y = ix$.

3° Les coordonnées du point I s'obtiennent en résolvant les deux équations

$$ty = x \qquad \text{et} \qquad ty + x - \frac{2at}{1 - t^2} = 0\,;$$

ce sont

$$x = \frac{at}{1 - t^2}, \qquad y = \frac{a}{1 - t^2};$$

la longueur MI est donc fournie par l'équation

$$\overline{\mathrm{MI}}^2 = \left(\frac{at}{1 - t^2} - \frac{2at}{1 - t^4}\right)^2 + \left(\frac{a}{1 - t^2} - \frac{2at^2}{1 - t^4}\right)^2,$$

ou

$$\overline{\mathrm{MI}}^2 = \frac{a^2t^2}{(1 + t^2)^2} + \frac{a^2}{(1 + t^2)^2} = \frac{a^2}{1 + t^2}.$$

Les points I′ sont donc à l'intersection de la droite $ty = x$ et du cercle

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{1 + t^2}\,;$$

le lieu de ces points s'obtient en éliminant t entre les deux équations précédentes, et se compose des deux cercles

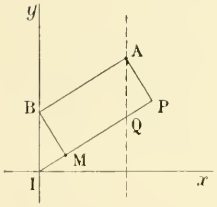
$$(3) \qquad x^2 + y^2 = \pm ay.$$

Solutions analogues par MM. Bailly (Dijon) ; P. Sabot ; L. Goujon (Saint-Etienne) ; H. Bonnard (Bordeaux).
Solution différente : A. Laureaux (Besançon).
Solutions incomplètes : H. Vilain (8e régiment d'artillerie) ; F. Pégorier, répétiteur au collège de Cette ; G. Laederick.

---

420. — *Les extrémités* A *et* B *d'un côté d'un rectangle variable sont l'une,* A, *fixe, l'autre,* B, *mobile sur une droite fixe ; en outre, le côté opposé passe par un point fixe,* I, *de cette droite. On demande le lieu du sommet opposé à* A.

Prenons pour origine le point fixe I, pour axe des y la droite fixe et pour axe des x une perpendiculaire à cette droite menée par le point I ; désignons par x_0 et y_0 les coordonnées du point fixe A et par α et β les paramètres directeurs variables du côté AB. L'équation de AB est $\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta}$ et, par suite, les coordonnées du point B sont $x = 0$, $y = y_0 - \frac{\beta}{\alpha}x_0$. Le point M qui décrit le lieu est à l'intersection de la droite IP parallèle à AB avec la perpendiculaire abaissée du point B sur cette droite ; or la droite IP a pour équation $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta}$, et la perpendiculaire abaissée du point B sur celle-ci, $y - y_0 + \frac{\beta}{\alpha}x_0 = -\frac{\alpha}{\beta}x$. Nous aurons le lieu demandé en



éliminant α et β entre ces deux équations, c'est-à-dire, puisque α et β entrent d'une façon homogène dans les deux équations, en remplaçant ces nombres, dans la seconde, par les quantités proportionnelles x et y : nous obtenons ainsi l'équation

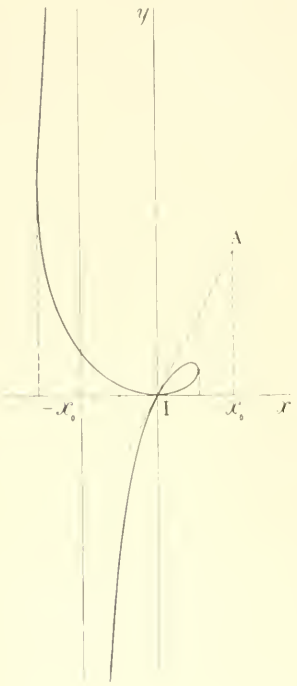
$$(1) \qquad x(x^2+y^2) - x_0y^2 - xyy_0 = 0,$$

qui représente une cubique circulaire à point double.

Cette courbe admet l'origine comme point double, et les tangentes en ce point sont la droite $y=0$ ou Ox, et la droite $x_0y - y_0x = 0$ ou OA : elle admet une seule direction asymptotique réelle, $x=0$ ou Oy, et l'asymptote parallèle à cette direction s'obtient en annulant le coefficient de y^2 : c'est la droite $x = -x_0$; cette droite rencontre la courbe en un point unique à distance finie dont l'ordonnée est $y = \frac{x_0^2}{y_0}$.

L'équation de la courbe est du second degré en y et peut se discuter entièrement lorsqu'on fait varier x de $-\infty$ à $+\infty$: cette équation est

$$(x+x_0)y^2 - xy_0 . y + x^3 = 0.$$



Pour que ses racines soient réelles, il faut que l'on ait

$$x^2y_0^2 - 4x^3(x+x_0) > 0,$$

ou

$$y_0^2 - 4x(x+x_0) > 0,$$

ou enfin

$$(2x+x_0)^2 - x_0^2 - y_0^2 < 0 :$$

si nous désignons par a le nombre qui mesure IA, cette inégalité s'écrit

$$(2x+x_0+a)(2x+x_0-a) < 0,$$

et montre alors que x doit être compris entre les deux nombres $-\frac{x_0}{2} - \frac{a}{2}$ et $-\frac{x_0}{2} + \frac{a}{2}$. Nous pouvons d'ailleurs toujours supposer que les directions positives des axes aient été choisies de telle sorte que x_0 et y_0 soient positifs. Nous voyons alors immédiatement que de 0 à $\frac{a-x_0}{2}$ les deux racines de l'équation en y sont positives, de $-x_0$ à 0 l'une d'elles est positive, l'autre négative, et enfin de $-\frac{x_0+a}{2}$ à $-x_0$, elles sont toutes deux positives. La forme de la courbe résulte immédiatement de tout ce qui vient d'être dit.

Remarque. — Si l'on se reporte à la figure I, et si l'on désigne par Q le point de rencontre de IP avec la parallèle à Oy menée par le point A, on voit de suite que les triangles IBM et QAP sont égaux, et, par suite, que IM = QP ; comme, d'autre part, le point P décrit le cercle ayant pour diamètre IA, le lieu du point M est visiblement une cissoïde de droite et de cercle.

Solutions analogues : MM. Mario Guesde ; G. Lafderick, à Rouen ; J. Marchal ; G. A. Pouilliart, à Joigny.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

École des Mines de Saint-Etienne (1894).

41. — Etudier les séries dont les termes généraux sont

$$u_n = \left(\frac{1}{x}\right)^{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}, \qquad u_n = \left[\frac{a+n}{a+n-1}x\right]^n, \qquad u_n = \frac{n+3}{4n^2-1}.$$

42. — Etant donné $y = \text{arc sin}(3x - 4x^3)$, calculer x'_y.

Même question pour la relation $e^x - e^y(x-y)^2 = 0$.

43. — Séparer les racines des équations :

$$x^4 + 4x + a = 0, \qquad e^x - x^2 = 0, \qquad x^5 - x^3 + 2x - 1 = 0, \qquad \lg x - 2x - 1 = 0, \qquad x^4 - 2x^2 + x + 1 = 0,$$
$$x^5 - 10a^2x^3 + 5b^2x - 1 = 0.$$

44. — Variation des fonctions $a^{(1/x)}$, $e^{-e^{\frac{1}{\lg x}}}$.

45. — Sachant que $(x-1)^3(x-2)^4(x^2+x+1)$ est la dérivée de $\varphi(x)$, que peut-on dire de $\varphi(x)$? Qu'arrive-t-il si 1 est racine de $\varphi(x)$?

46. — Valeur de $(\lg x)^{\frac{1}{x}}$ pour $x = 0$.

47. — Dérivée d'ordre n de $\dfrac{ax^2+bx+c}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$.

Construire les courbes :

48. — $xy(x^2-y^2) - (x^3+y^3) + x^2 - y^2 = 0$,

49. — $x = \dfrac{t}{t^2-1}$, $\quad y = \dfrac{t-2}{t^2+t-2}$,

50. — $y^2 - x^2(x-1) = 0$,

51. — $x^4y^3 - x^3 - y^4 = 0$.

52. — $(x-y)(x^2-4y^2+1) = 1$,

53. — $\sin(x + Ly) = k$,

54. — $y = tx$, $\quad x = \dfrac{t(t+1)}{(t-1)(t-2)}$,

55. — $\rho = \dfrac{1}{L\omega}$,

56. — $\rho = \dfrac{\cos\omega}{2-\sin^2\omega}$,

57. — $\rho = \sin 2\omega + 2\sin\omega$,

58. — $\cos 2\omega = \dfrac{\rho^2}{1-\rho}$,

59. — $\rho = \dfrac{2\sqrt{\cos 2\omega}}{\cos^2\omega}$,

60. — $\rho = \dfrac{1-\cos\omega}{\sin^2\omega}$.

61. — Lieu des centres des coniques passant par trois points et ayant un axe parallèle à une droite donnée.

62. — Lieu des pieds des normales parallèles à une direction donnée aux coniques $xy = \lambda$.

63. — On donne le foyer d'une hyperbole, une asymptote et une tangente ; construire la courbe.

64. — Exprimer qu'une conique a un sommet sur l'axe des x.

65. — Equation générale des coniques ayant un foyer sur Ox et l'autre sur Oy.

66. — Construire une conique connaissant un foyer, deux points et l'excentricité.

67. — Lieu des centres des hyperboles équilatères passant par un point et admettant pour directrice une droite donnée.

68. — On donne une conique et une droite, trouver le point de la droite qui est le plus rapproché de la conique.

69. — Equation générale des coniques dont on donne une asymptote, un point de la tangente au sommet et la somme des carrés des axes.

70. — On donne une ellipse rapportée à ses axes, mener une tangente telle que le point de contact soit le milieu du segment compris entre les axes.

71. — Equation générale des coniques tangentes à une droite et passant par trois points.

72. — Equation générale des coniques tangentes aux deux axes, supposés obliques, et ayant un point donné pour centre.

73. — Lieu des points d'où l'on peut mener à une parabole deux normales parallèles à deux diamètres conjugués d'une ellipse.

74. — On donne deux cercles égaux ; lieu du sommet d'un angle droit dont les côtés sont respectivement tangents aux deux cercles.

75. — Equation générale des ellipses admettant un foyer donné et un sommet de l'axe non focal également donné. Lieu des sommets.

76. — Plus courte distance de l'axe des z à la droite $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$.

77. — Démontrer que les plans passant par les arêtes d'un trièdre et perpendiculaires aux faces opposées se coupent suivant une même droite.

QUESTIONS PROPOSÉES

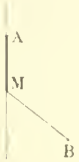
450. — On considère toutes les coniques ayant un foyer F donné et tangentes à deux droites fixes a et b. Montrer que les directrices de ces coniques relatives au foyer F passent toutes par un même point.

Déduire de là la construction de la conique particulière du faisceau pour laquelle le rapport des distances du foyer fixe au centre et à la directrice est donné.

E. Oudin (collège Stanislas).

451. — On donne la base et le périmètre d'un triangle variable. Trouver le lieu du point de la hauteur qui est à une distance de la base égale à l'un des deux autres côtés.

452. — Deux paraboles égales ont leurs axes rectangulaires. L'une est fixe; l'autre, mobile; une des cordes communes passe au pied de la directrice. Trouver le lieu du sommet de la seconde parabole.



453. — On donne un point A sur une droite et un point B en dehors de cette droite ; un mobile va de B en A par les segments de droites BM et MA, avec les vitesses respectives v et v'. Trouver les variations du temps employé.

454. — On donne une droite et un cercle qui la coupe; mener une tangente qui forme avec la droite donnée et le diamètre perpendiculaire un triangle d'aire maximum ou minimum.

Lieu du point de contact quand la circonférence a son centre fixe et que son rayon varie.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

6e Année. N° 2 Novembre 1895

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

NOTE SUR L'INTÉGRALE DÉFINIE

par M. J. Richard,
professeur au lycée de Tours.

Les conditions pour qu'une fonction quelconque soit intégrable sont assez difficiles à établir. On pourrait, dans l'enseignement, se borner aux fonctions croissantes (ou décroissantes), toujours intégrables, ou encore aux fonctions à variations limitées, qui sont la différence de deux fonctions croissantes.

Je vais établir l'existence de l'intégrale pour une fonction croissante, sans la supposer continue. J'adopterai la définition des irrationnelles de M. Tannery, ce qui contribuera beaucoup à la simplicité de cette exposition.

I. — Soit $f(x)$ une fonction croissante dans l'intervalle a, b, et soient des nombres

$$a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ b,$$

tels que

$$a < x_1 < x_2 < x_3 \cdots < x_{n-1} < b\,;$$

on aura ainsi

$$f(a) < f(x_1) < f(x_2) < \cdots < f(x_{n-1}) < f(b)$$

et, par conséquent,

$$(x_1 - a)f(a) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (b - x_{n-1})f(x_{n-1}) < (x_1 - a)f(x_1) + \cdots + (b - x_{n-1})f(b).$$

Le premier membre $\Sigma(x_p - x_{p-1})f(x_{p-1})$ s'appellera une *somme inférieure*, le second $\Sigma(x_p - x_{p-1})f(x_p)$ sera une *somme supérieure*, et l'inégalité précédente signifie qu'une somme inférieure est plus petite que la somme supérieure relative au même mode de décomposition en intervalles partiels de l'intervalle considéré $(a,\ b)$.

II. — *Une somme inférieure augmente par la subdivision des intervalles; une somme supérieure diminue.*

En effet, si l'intervalle $(x_{p-1},\ x_p)$ est remplacé par les intervalles limités par

$$x_{p-1},\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_{q-1},\ x_p,$$

le terme $(x_p - x_{p-1})f(x_{p-1})$, qui peut s'écrire

$$(\xi_1 - x_{p-1})f(x_{p-1}) + (\xi_2 - \xi_1)f(x_{p-1}) + (\xi_3 - \xi_2)f(x_{p-1}) + \cdots + (x_p - \xi_{q-1})f(x_{p-1}),$$

est remplacé par la somme

$$(\xi_1 - x_{p-1})f(x_{p-1}) + (\xi_2 - \xi_1)f(\xi_1) + (\xi_3 - \xi_2)f(\xi_2) + \cdots + (x_p - \xi_{q-1})f(\xi_{q-1}),$$

qui est plus grande, parce que l'on a

$$f(x_{p-1}) < f(\xi_1) < f(\xi_2) \cdots < f(\xi_{q-1}).$$

III. — *Une somme supérieure est toujours plus grande qu'une somme inférieure quelconque.*

Soient, en effet, deux modes de décomposition, $a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b$ et $a, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p-1}, b$; S_1 la somme supérieure relative au premier mode, s_2 la somme inférieure relative au second mode. Considérons le mode de décomposition obtenu en rangeant par ordre de grandeur croissante les nombres $a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}, b$, et soient S' et s' les sommes supérieure et inférieure relatives à ce troisième mode ; on aura, d'après ce qui précède,

$$S_1 \geqq S' \geqq s' \geqq s_2;$$

donc

$$S_1 \geqq s_2.$$

IV. — *Si chacun des intervalles (x_{p-1}, x_p) est inférieur à ε, la différence entre la somme inférieure et la somme supérieure relatives à ce mode est plus petite numériquement que $\varepsilon[f(b) - f(a)]$.*

En effet, cette différence est

$$[f(x_1) - f(a)](x_1 - a) + [f(x_2) - f(x_1)](x_2 - x_1) + \cdots + [f(b) - f(x_{n-1})](b - x_{n-1});$$

elle est donc inférieure à

$$[f(x_1) - f(a)]\varepsilon + [f(x_2) - f(x_1)]\varepsilon + \cdots + [f(b) - f(x_{n-1})]\varepsilon,$$

ou

$$[f(b) - f(a)]\varepsilon.$$

V. — *Il existe un nombre J compris entre une somme inférieure et une somme supérieure quelconques, et différant aussi peu qu'on veut de chacune de ces sommes, sous la seule condition que chacun des intervalles de ces décompositions soit suffisamment petit.* C'est ce nombre J qui est l'intégrale définie.

En effet, soit α un nombre quelconque ; s'il y a des sommes inférieures plus grandes que α, nous mettrons α dans la première classe ; sinon, nous le mettrons dans la seconde. Il est clair alors que tout nombre de la première classe est inférieur à tout nombre de la seconde classe. D'après la définition des nombres irrationnels, ceci définit un nombre J, tel que les sommes inférieures ne peuvent jamais surpasser J, mais peuvent surpasser tout nombre inférieur ; des théorèmes III et IV résulte que les sommes supérieures sont toutes plus grandes que J, mais qu'il y en a de plus petites que tout nombre supérieur à J. En outre, le théorème IV fait voir que la différence entre J et une somme quelconque, dont les divisions sont plus petites que ε, est plus petite que $\varepsilon[f(b) - f(a)]$.

VI. — *Si la fonction $f(x)$ est continue pour $x = b$, le nombre J est une fonction de b dont la dérivée est $f(b)$.*

En effet, $J(b+h) - J(b)$ est compris, comme on le voit facilement, entre $hf(b)$ et $hf(b+h)$, et par suite $\dfrac{J(b+h) - J(b)}{h}$, qui est compris entre $f(b)$ et $f(b+h)$, a pour limite $f(b)$, si $f(x)$ est continu pour $x = b$.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

405. — *On considère les coniques circonscrites à un parallélogramme et tangentes à une droite Δ, et on demande de trouver le lieu du milieu du segment limité sur la droite Δ par les points de contact de cette droite avec les deux coniques du faisceau qui la touchent, dans les deux cas suivants :*

1° *Quand la droite Δ se meut parallèlement à elle-même ;*

2° *Quand la droite Δ passe par un point fixe.*

Dans le premier cas, le lieu est une conique. Trouver le lieu des sommets de cette conique, quand la direction de Δ varie, et le lieu de ses foyers.

Dans le second cas, le lieu est une cubique à point double. Construire cette courbe. Trouver pour quelles positions du point fixe donné elle se décompose en une droite et une conique.

Il est naturel de prendre pour axes les parallèles aux côtés du parallélogramme menées par le centre de cette figure, bien que les axes ainsi choisis soient obliques. Ce n'est d'ailleurs pas une complication bien grande qui s'introduit ainsi, même dans la recherche du lieu des sommets et du lieu des foyers.

Nous désignerons alors par $2a$ et $2b$ les longueurs des côtés du parallélogramme ; les équations $x^2 - a^2 = 0$ et $y^2 - b^2 = 0$ représenteront deux coniques impropres passant aux quatre sommets du parallélogramme, et, par suite, l'équation générale des coniques du faisceau sera, dans le système d'axes employé,

$$x^2 - a^2 + \lambda(y^2 - b^2) = 0. \tag{1}$$

Considérons alors une droite Δ, quelconque ; les coniques du faisceau tracent sur cette droite une involution dont les deux points doubles sont justement les points de contact de la droite Δ avec les deux coniques du faisceau qui la touchent ; le milieu du segment limité par ces deux points est le point central de l'involution, c'est-à-dire le conjugué du point à l'infini sur la droite ; on déterminera donc ce point en cherchant l'intersection de la droite Δ avec la conique du faisceau qui admet la direction de Δ pour direction asymptotique. Soit $ux + vy + w = 0$ l'équation de la droite Δ ; les paramètres de cette droite sont v, $-u$, et, en exprimant qu'ils vérifient l'équation aux directions asymptotiques de la conique (1), on obtient

$$v^2 + \lambda u^2 = 0;$$

par suite, le point demandé est à l'intersection de la droite Δ avec la conique

$$u^2(x^2 - a^2) - v^2(y^2 - b^2) = 0. \tag{2}$$

Cette solution est entièrement géométrique. On peut en donner une autre qu'il est d'ailleurs intéressant de connaître. Déterminons l'équation aux ordonnées des points de rencontre de la droite $ux + vy + w = 0$ avec la conique (1) ; nous aurons d'abord $x = -\dfrac{vy + w}{u}$; puis

$$(vy + w)^2 - a^2u^2 + \lambda u^2(y^2 - b^2) = 0,$$

ou

$$(v^2 + \lambda u^2)y^2 + 2vwy + w^2 - a^2u^2 - \lambda b^2u^2 = 0;$$

nous devons exprimer maintenant que cette équation admet une racine double, c'est-à-dire que ses deux dérivées partielles, par rapport à y et par rapport à la variable d'homogénéité, ont une racine commune ; nous avons ainsi simultanément

$$(v^2 + \lambda u^2)y + vw = 0,$$
$$vwy + w^2 - a^2u^2 - \lambda b^2v^2 = 0;$$

or cette valeur de y est l'ordonnée de l'un ou de l'autre des points de contact ; nous aurons donc les deux valeurs de y en éliminant λ entre les deux équations précédentes. Ces nombres sont donnés par l'équation

$$vwy^2 + (w^2 - a^2u^2 + b^2v^2)y + b^2vw = 0.$$

L'ordonnée du point milieu des points de contact est

$$y = \frac{a^2u^2 - b^2v^2 - w^2}{2vw};$$

on déduit de là

$$w^2 + 2wvy - a^2u^2 + b^2v^2 = 0,$$

ou

$$(w + vy)^2 - v^2y^2 - a^2u^2 + b^2v^2 = 0,$$

et, par suite, en tenant compte de l'équation de la droite Δ,

$$u^2(x^2 - a^2) - v^2(y^2 - b^2) = 0.$$

C'est l'équation de la conique (2).

1° Si Δ se déplace en restant parallèle à elle-même, u et v ne varient pas, et le lieu demandé est la conique (2) elle-même.

Quand la direction de Δ varie, la conique (2) engendre tout le faisceau donné et il vaut autant revenir à l'équation (1).

Lieu des sommets. — Désignons alors par x et y les coordonnées de l'un des sommets de la conique (1); le coefficient angulaire de la tangente en ce point est $-\frac{f_x}{f_y}$ ou $-\frac{x}{\lambda y}$, celui du rayon qui joint l'origine au sommet est $\frac{y}{x}$; en exprimant que ces deux coefficients angulaires vérifient la condition d'orthogonalité,

$$1 + mm' + (m + m')\cos\theta = 0,$$

nous aurons l'équation quadratique des axes,

$$(\lambda - 1)xy + (\lambda y^2 - x^2)\cos\theta = 0.$$

Dès lors, nous n'avons plus qu'à éliminer λ entre cette équation et l'équation (1) pour obtenir le lieu des sommets. L'élimination est linéaire, immédiate, et donne le résultat suivant :

$$(3) \qquad xy(x^2 + 2xy\cos\theta + y^2) - a^2xy + y^2\cos\theta(-b^2x^2\cos\theta + xy) = 0.$$

Cette équation représente une quartique circulaire qui a l'origine pour point double et pour centre et qui passe aux points à l'infini sur les axes; les asymptotes correspondantes sont les axes eux-mêmes. D'ailleurs l'équation a été trouvée sous la forme

$$(x^2 - a^2)(y - x\cos\theta)$$
$$+ (y^2 - b^2)(x - x\cos\theta + y) = 0,$$

et, sous cette forme, on aperçoit immédiatement que le lieu passe aux quatre sommets du parallélogramme, aux points de rencontre des deux côtés parallèles à Oy avec la perpendiculaire à Oy menée par le point O, et aussi aux points de rencontre des deux côtés parallèles à Ox avec la perpendiculaire à Ox; enfin une séparation du plan en régions est immédiate. La courbe est alors aisée à construire (*fig.* 1). — Les tangentes à l'origine sont rectangulaires : ce sont les bissectrices des diagonales du parallélogramme. Enfin il est facile de discuter les intersections de cette courbe avec une droite qui tourne autour du point O, $y = tx$.

Fig. 1

Lieu des foyers. — L'équation tangentielle de la conique (1) est

$$u^2 + \frac{v^2}{\lambda} - \frac{w^2}{a^2 + \lambda b^2} = 0,$$

et, par suite, l'équation aux coefficients angulaires des tangentes menées par le point (x, y) est

$$(\lambda a^2 - \lambda b^2)u^2 + (a^2 + \lambda b^2)v^2 - (\lambda ux + vy)^2 = 0,$$

ou
$$(b^2\lambda^2 + a^2\lambda - \lambda x^2)u^2 - 2\lambda\, xyuv + (b^2\lambda + a^2 - \lambda y^2)v^2 = 0.$$

Nous exprimerons que le point (x, y) est foyer, en identifiant cette équation avec l'équation des points cycliques
$$u^2 - 2uv \cos\theta + v^2 = 0\,;$$
nous obtenons ainsi
$$b^2\lambda^2 + a^2\lambda - \lambda x^2 = \frac{\lambda xy}{\cos\theta} = b^2\lambda + a^2 - \lambda y^2,$$
et nous n'avons plus qu'à éliminer λ entre ces deux équations; cette élimination est encore immédiate et linéaire et conduit à l'équation suivante :
$$(x^2 \cos\theta + xy - a^2 \cos\theta)(xy + y^2 \cos\theta - b^2 \cos\theta) - a^2b^2 \cos^2\theta = 0,$$
ou
$$(4) \qquad xy(x \cos\theta + y)(x + y \cos\theta) - b^2 \cos\theta x(x \cos\theta + y) - a^2 \cos\theta y(x + y \cos\theta) = 0.$$

C'est l'équation d'une quartique ayant l'origine pour point double et pour centre et dont les asymptotes sont les axes et les perpendiculaires aux axes menés par le point O. En adjoignant à ces remarques la séparation en régions donnée par la première forme de l'équation et la recherche de la position de la courbe par rapport aux deux asymptotes
$$x \cos\theta + y = 0$$
et $\quad x + y \cos\theta = 0,$
on pourra tracer la courbe sans difficulté (*fig.* 2). — Ici encore les tangentes à l'origine sont les bissectrices de l'angle des diagonales du parallélogramme, et la discussion des intersections de la courbe avec une droite passant à l'origine, $y = tx$, est très facile.

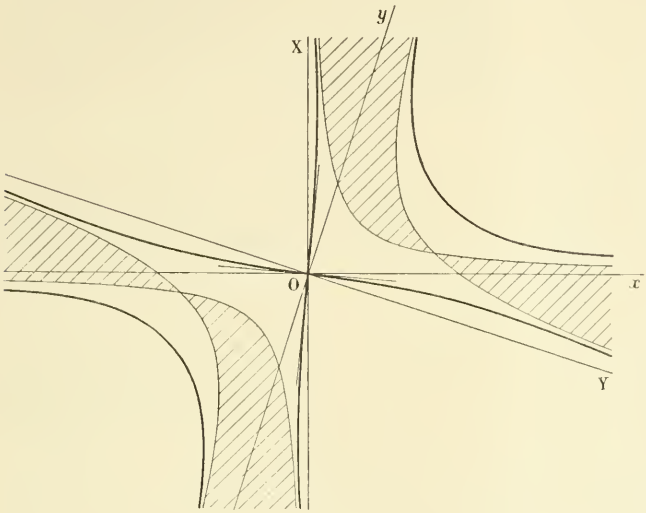


Fig. 2

2° Lorsque la droite Δ passe par un point fixe, le point du lieu est déterminé par les deux équations
$$u(x - \alpha) + v(y - \beta) = 0,$$
$$u^2(x^2 - a^2) - v^2(y^2 - b^2) = 0\,;$$
on obtient le lieu de ce point en éliminant u et v entre les deux équations ; on trouve ainsi la cubique
$$(5) \qquad (x^2 - a^2)(y - \beta)^2 - (y^2 - b^2)(x - \alpha)^2 = 0.$$

Cette courbe a un point double, le point (α, β) ; elle est donc unicursale. En coupant par une droite variable passant au point double, $y - \beta = t(x - \alpha)$, on obtient de suite, pour x et y, deux expressions rationnelles,
$$(6) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{a^2t^2 + (t\alpha - \beta)^2 - b^2}{2t(t\alpha - \beta)}, \\[2ex] y = \dfrac{a^2t^2 - (t\alpha - \beta)^2 - b^2}{2(t\alpha - \beta)}\,; \end{cases}$$

nous nous servirons concurremment des équations (5) et (6) pour construire cette courbe. L'équation (5) nous montre immédiatement que la courbe passe aux quatre sommets du parallélogramme, et qu'à l'extérieur de cette figure, il n'y a aucun point du lieu contenu dans les régions comprises entre deux côtés parallèles ; cette équation nous montre en outre que les directions asymptotiques sont Ox, Oy et $\beta x - \alpha y = 0$, c'est-à-dire les parallèles aux côtés du parallélogramme et la droite qui joint le centre au point donné.

Les équations (6) nous eussent donné aisément ces derniers renseignements ; elles vont nous en donner d'autres. Cherchons les conditions pour que la courbe rencontre les axes de coordonnées, Ox et Oy ; il faut pour cela que les deux équations du second degré en t, $y = 0$, $x = 0$, aient leurs racines réelles, ce qui exige que les inégalités

$$\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} - 1 < 0$$

et $$\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} + 1 > 0$$

soient vérifiées. Construisons alors les deux hyperboles conjuguées $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ et $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ (*fig.* 3) ; la première divise le plan en trois régions, et dans la région de l'origine, la fonction $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$ est négative ; la seconde divise de même le plan en trois régions, et dans la région de l'origine la fonction correspondante $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1$ est positive ; cela fait en tout cinq régions ; il faudrait que le point (α, β) fût dans la région qui contient l'origine pour que les deux conditions indiquées fussent réalisées. Nous n'examinerons qu'un cas, le cas où le point P est dans le premier angle des axes, à l'extérieur du parallélogramme, à l'extérieur de la première hyperbole et à l'intérieur de la seconde ; alors on a $\alpha > a$, $\beta > b$, $\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} - 1 < 0$ et $\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} + 1 < 0$, et ces inégalités se réduisent à $\alpha > a$, $\beta > b$, $a^2\beta^2 - b^2\alpha^2 > a^2b^2$. Les asymptotes parallèles aux axes s'obtiennent en faisant $t = 0$ dans y et $t = \infty$ dans x ; on a ainsi

$$y = \frac{b^2 + \beta^2}{2\beta} \qquad \text{et} \qquad x = \frac{a^2 + \alpha^2}{2\alpha},$$

et l'on vérifie de suite que

$$b < y < \beta, \qquad a < x < \alpha;$$

ces inégalités permettent de placer les deux asymptotes. Pour t infiniment petit et positif, x est positif et l'y de la courbe est supérieur à celui de l'asymptote ; pour t infiniment petit et négatif, les choses

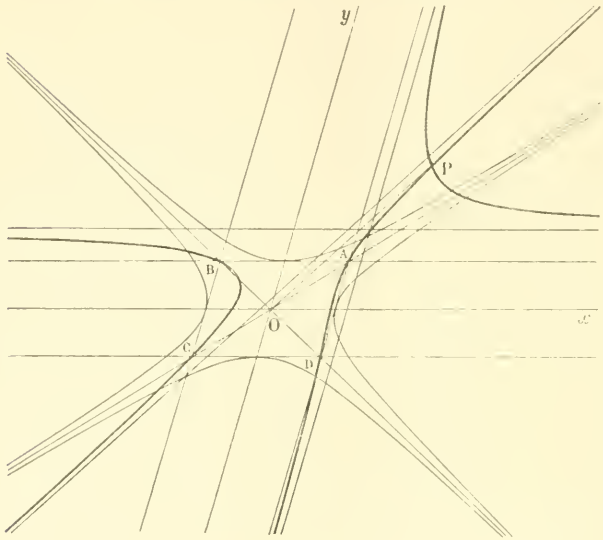


Fig. 3

contraires ont lieu. Si t est infiniment grand et positif, y est négatif et l'x de la courbe est moindre que celui de l'asymptote ; si t est infiniment grand et négatif, c'est le contraire qui a lieu. On a ainsi aisément la disposition de la courbe par rapport à ses deux asymptotes.

La troisième direction asymptotique correspond à $t = \frac{\beta}{\alpha}$ et le rapport $\frac{y}{x}$ se réduit, pour cette valeur, à $\frac{\beta}{\alpha}$; on obtient l'ordonnée à l'origine de l'asymptote correspondante en cherchant la limite de $y - \frac{\beta}{\alpha}x$ quand t tend vers $\frac{\beta}{\alpha}$; on trouve ainsi $\frac{a^2\beta^2 - b^2\alpha^2}{2\alpha^2\beta}$ et l'équation de l'asymptote est

$$\alpha y - \beta x - \frac{a^2\beta^2 - b^2\alpha^2}{2\alpha\beta} = 0;$$

cette droite passe entre l'origine et le point $(-a, -b)$. Il est inutile de chercher autre chose : en se rappelant que la courbe ne peut rencontrer chacune de ses asymptotes qu'en un point à distance finie et que le point (α, β) est un point double à branches réelles, on peut, avec tous les résultats qui précèdent, tracer immédiatement la courbe. Pour plus de précision, on peut remarquer en outre que la courbe passe au point où se rencontrent les asymptotes parallèles aux axes.

Si nous voulons exprimer que la courbe se décompose en une droite et une conique, il faudra exprimer qu'une parallèle à une direction asymptotique menée par le point double est tout entière renfermée dans l'équation de la courbe, c'est-à-dire rencontre cette courbe en tous ses points. Si l'on applique ce procédé à $x - \alpha = 0$, on trouve la condition $a^2 - \alpha^2 = 0$, et la conique associée à la droite a pour équation

$$(x + \alpha)(y - \beta)^2 - (x - \alpha)(y^2 - b^2) = 0;$$

si l'on applique le procédé à la droite $y - \beta = 0$, on trouve la condition $\beta^2 - b^2 = 0$, et la conique associée à la droite a pour équation $(x^2 - a^2)(y - \beta) - (x - \alpha)^2(y + \beta) = 0$; enfin si on l'applique à la droite $\alpha y - \beta x = 0$, on trouve la condition $a^2\beta^2 - b^2\alpha^2 = 0$, et la conique associée à cette droite a pour équation

$$2xy - \beta x - \alpha y + k(2\alpha\beta - \beta x - \alpha y) = 0,$$

où

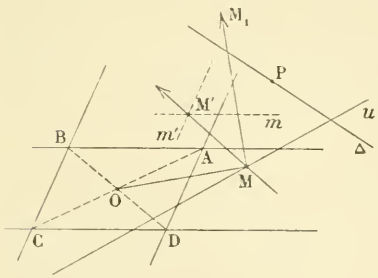
$$k = \frac{a^2}{\alpha^2} = \frac{b^2}{\beta^2}.$$

On voit donc que la cubique ne se décompose que quand le point P est situé sur les côtés ou sur les diagonales du parallélogramme.

VASNIER, lycée de Versailles.

Bonne solution de M. Eug. Barré (Douai). Ont traité la question : MM. Pellissier (Lyon) ; F. Pégorier, répétiteur au collège de Cette.

Solution géométrique. — 1° Le procédé que nous avons indiqué pour déterminer sur une droite quelconque Δ le milieu du segment limité par les deux points de contact de cette droite avec les coniques circonscrites au parallélogramme et touchant la droite, est entièrement géométrique et fournit immédiatement et sans calcul le premier lieu : c'est la conique du faisceau qui admet la direction de Δ pour l'une de ses directions asymptotiques.



Le lieu des sommets de cette conique, quand la direction de Δ varie, est le lieu des sommets des coniques du faisceau. Pour déterminer l'ordre de ce lieu, cherchons le nombre des sommets qui sont situés sur une droite quelconque u. A cet effet, considérons un point M pris n'importe où sur cette droite et déterminons le point M′ conjugué de M par rapport aux coniques du faisceau ; c'est le point de concours des deux polaires de M, m et m', par rapport aux couples de droites AB, CD et AD, BC. La droite MM′ est alors la tangente à la conique du faisceau qui passe en M, en ce point même. Quand M décrit la droite u, le point M′ décrit une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux côtés du parallélogramme ; le faisceau m qui projette cette ponctuelle du point à l'infini sur AB est homographique à la série M ;

la ponctuelle du premier ordre M, et la ponctuelle du second ordre M′ sont donc rapportées homographiquement l'une à l'autre, et, par suite, la droite MM′ engendre un faisceau de rayons du troisième ordre dont u est un rayon double.

D'autre part, la droite MM_1 perpendiculaire à OM enveloppe une parabole dont u est la tangente au sommet ; elle engendre donc un faisceau de rayons du second ordre dont u est un rayon simple. Les deux faisceaux ont six rayons communs dont deux coïncident avec u ; par suite, il y a quatre positions du point M pour lesquelles les deux rayons MM′ et MM_1 coïncident ; il y a donc quatre sommets situés sur la droite u. Le lieu des sommets est ainsi une courbe du quatrième ordre.

Il y a deux sommets à l'infini qui sont en évidence ; ce sont les points à l'infini sur AB et AD ; car on peut regarder le couple de droites AB, CD comme une ellipse infiniment allongée dont les deux sommets du grand axe sont à l'infini sur AB ; les deux autres sommets sont les points de rencontre de AB et CD avec la perpendiculaire à AB menée par le point O ; les mêmes choses se répètent pour l'autre couple AD, BC. Si maintenant on considère une conique imaginaire de seconde espèce ayant une direction isotrope pour direction asymptotique, on sait que ses sommets sont à l'infini au point cyclique correspondant. Les deux autres points à l'infini sont donc les deux points I et J.

Enfin il est évident *a priori* que le point O est un centre du lieu et il en résulte, en particulier, que les asymptotes passent en O. Il y a des coniques du faisceau qui ont pour sommets les points A, B, C, D ; ces points font donc partie du lieu. Considérons enfin, pour terminer, la conique composée des deux diagonales AC et BD ; ses quatre sommets sont confondus en O dans les directions des deux bissectrices de ces droites ; par conséquent, le point O est un point double du lieu, et les tangentes en ce point sont les deux bissectrices des diagonales. Nous avons retrouvé ainsi toutes les particularités du lieu des sommets.

Passons maintenant au lieu des foyers. Si nous menons par l'un des points cycliques, I, une droite quelconque $I\mu$, elle est tangente à deux coniques du faisceau ; il y a donc quatre tangentes issues du point J, et, par suite, quatre foyers situés sur $I\mu$. Il en résulte que le lieu des foyers est une courbe du quatrième ordre, si le point I n'est pas sur le lieu. Or comme il n'y a pas de parabole propre dans le système, pour aucune position de $I\mu$ la tangente issue de J n'est à l'infini ; le point I n'est donc jamais foyer. Il y a bien des paraboles impropres dans le système, les couples AB, CD et AD, BC ; mais, pour chacune d'elles, la droite de l'infini tout entière est un lieu de foyers ; cette droite s'élimine, ne fait pas partie du lieu précédent, et le point I n'est pas sur ce lieu.

Les points à l'infini de cette quartique résultent immédiatement de la considération des deux paraboles impropres assimilées à des ellipses infiniment allongées. Si l'on considère, par exemple, le couple AB, CD comme une ellipse de ce genre, les foyers sont à l'infini sur la direction AB et sur la direction perpendiculaire. La quartique a donc pour directions asymptotiques les côtés du parallélogramme et les deux directions perpendiculaires.

L'origine étant un centre évident, les asymptotes passent par le point O. Enfin la considération de la conique impropre, réduite aux deux diagonales, nous montre encore que le point O est un point double et que les tangentes en ce point sont les bissectrices de l'angle des deux diagonales.

2° Pour trouver le second lieu, appelons P le point α, β, autour duquel tourne Δ. Sur chaque droite Δ issue du point P, il y a un point du lieu autre que le point P, en dehors du point à l'infini ; mais le point à l'infini décrit la droite de l'infini, et cette droite, qui ne fait d'ailleurs partie du lieu à aucun titre, s'élimine d'elle-même. Cherchons combien de fois le point signalé vient au point P ; il suffit, pour cela, d'envisager la conique du faisceau qui passe en P, et de mener par ce point les deux parallèles aux directions asymptotiques de cette conique ; ces deux droites donnent toutes deux le point P comme point du lieu, et ce sont les seules ; ce sont d'ailleurs les deux tangentes en ce point. Le lieu est donc une cubique qui admet le point P comme point double.

Ce point double est à tangentes réelles ou imaginaires suivant qu'il est dans les régions du plan par où passent les hyperboles du faisceau ou dans celles qui sont recouvertes par les ellipses du faisceau. Ces diverses régions se reconnaissent immédiatement.

Enfin il est évident que les points A, B, C, D font partie du lieu, ainsi que les points à l'infini sur les côtés du parallélogramme. Si enfin on mène la droite OP, l'un des points doubles de l'involution déterminée sur cette droite est le point O ; l'autre est le point conjugué de O ; il est à l'infini, et, par suite, le point du lieu situé sur OP est le point à l'infini de cette droite. Nous connaissons donc les trois directions asymptotiques.

Il est visible que ce lieu ne peut se décomposer que s'il y a une droite passant au point P (point double) pour laquelle l'involution tracée par le faisceau ait des points doubles indéterminés. Cela exige que le point P soit sur l'une des six sécantes communes aux coniques du faisceau. Le véritable lieu est alors une conique passant au point P.

Solution géométrique : M. Eugène Barre, à Douai.

411. — *On considère une parabole et un point* A ; *on mène une droite quelconque* D *et on joint les points de rencontre de cette droite avec la parabole au point* A.

1° *On demande l'équation de la droite* D′ *qui joint les deux autres points de rencontre de ces droites avec la parabole.*

2° *Si la droite* D *tourne autour d'un point fixe* P, *la droite* D′ *tourne autour d'un point fixe* P′. *Trouver les coordonnées de* P *connaissant celles de* P′.

3° *Quand le point* P *décrit un cercle, le point* P′ *décrit une conique. Lieu des points* A *pour lesquels cette conique est une hyperbole équilatère.*

4° *Pour quelles positions du point* A *cette conique est-elle un cercle ?*

Lieu de ces points quand le rayon du cercle varie seul.

1° Prenons pour axes des x et des y l'axe de la parabole et la tangente au sommet et désignons par $y^2 - 2px = 0$ l'équation de cette courbe, par α et β les coordonnées du point A, et par

$$D \equiv ux + vy + w = 0, \qquad D' \equiv u'x + v'y + w' = 0$$

les équations des deux droites D et D′. Parmi les coniques qui passent aux points de rencontre de la parabole et des droites D et D′, il doit s'en trouver une qui se réduise à deux droites se coupant en A ; nous aurons donc les relations qui existent entre les droites D et D′ en exprimant que, pour une certaine valeur de λ, la conique

$$\lambda(y^2 - 2px) + DD' = 0$$

admet pour point double le point A, c'est-à-dire que les trois dérivées partielles de la fonction précédente sont nulles pour $x = \alpha$, $y = \beta$. Posons alors

$$P = u\alpha + v\beta + w, \qquad P' = u'\alpha + v'\beta + w' ;$$

nous aurons de suite, en procédant comme il est indiqué, les relations qui suivent :

$$\begin{aligned} -2p\lambda + uP' + u'P &= 0, \\ 2\lambda\beta + vP' + v'P &= 0, \\ -2p\lambda\alpha + wP' + w'P &= 0; \end{aligned}$$

en les multipliant par α, β, 1 et ajoutant les résultats obtenus, nous trouvons une nouvelle relation

$$\lambda(\beta^2 - 2p\alpha) + PP' = 0.$$

Rien n'est plus facile alors que d'avoir u', v', w' en fonction de u, v, w : il suffit de tirer P′ de cette dernière équation et de porter dans les trois autres ; nous obtenons ainsi :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \theta' u &= 2pP + (\beta^2 - 2p\alpha)u, \\ \theta' v &= -2\beta P + (\beta^2 - 2p\alpha)v, \\ \theta' w &= 2p\alpha P + (\beta^2 - 2p\alpha)w, \end{aligned} \right.$$

équations où θ' désigne le facteur $\dfrac{P^2}{\lambda}$. Nous trouverions de même, en éliminant P, les valeurs de u, v, w en fonction de celles de u', v', w' ; elles sont fournies par les mêmes expressions algébriques,

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \theta u &= 2pP' + (\beta^2 - 2p\alpha)u', \\ \theta v &= -2\beta P' + (\beta^2 - 2p\alpha)v', \\ \theta w &= 2p\alpha P' + (\beta^2 - 2p\alpha)w', \end{aligned} \right.$$

et ceci nous montre en passant que la relation qui lie les droites D et D′ est complètement réciproque, c'est-à-dire que ces droites sont accouplées involutivement.

2° Soient alors x, y, z les coordonnées du point P autour duquel tourne la droite D ; les coordonnées de cette droite sont liées par la relation $ux + vy + wz = 0$, et, d'après les équations (2),

cette relation est équivalente à

$$2P(\rho x - \beta y + \rho\alpha z) + (\beta^2 - 2\rho\alpha)(ux + vy + wz) = 0;$$

mais celle-ci étant linéaire en u, v, w exprime que la droite (D) tourne autour du point fixe P dont les coordonnées sont

$$\left.\begin{aligned} \theta_1 x' &= (\beta^2 - 2\rho\alpha)x + 2\alpha H, \\ \theta_1 y' &= (\beta^2 - 2\rho\alpha)y - 2\beta H, \\ \theta_1 z' &= (\beta^2 - 2\rho\alpha)z + 2H, \end{aligned}\right\} (P)$$

en désignant par H la fonction linéaire $\rho x - \beta y + \rho\alpha z$ et par θ_1 un certain facteur, quelconque d'ailleurs. Un calcul complètement semblable, appliqué aux équations (D), donne les coordonnées du point P en fonction de celles du point P′ ; nous trouvons ainsi des équations tout à fait pareilles aux équations (P),

$$\left.\begin{aligned} \theta_1 x &= (\beta^2 - 2\rho\alpha)x' + 2\alpha H', \\ \theta_1 y &= (\beta^2 - 2\rho\alpha)y' + 2\beta H', \\ \theta_1 z &= (\beta^2 - 2\rho\alpha)z' + 2H', \end{aligned}\right\} (P')$$

et dans lesquelles H′ désigne la fonction linéaire $\rho x' - \beta y' + \rho\alpha z'$.

3. Soit $x^2 - y^2 - 2axz - 2byz - cz^2 = 0$ le cercle décrit par le point P ; nous aurons le lieu correspondant décrit par le point P′ en portant dans cette équation les valeurs que les égalités (P′) fournissent pour x, y, z ; nous obtenons ainsi, en désignant par K, pour abréger, le nombre $\beta^2 - 2\rho\alpha$,

$$(Kx' + 2\alpha H')^2 + (Ky' + 2\beta H')^2 - 2a(Kx' + 2\alpha H')(Kz' + 2H') - 2b(Ky' + 2\beta H')(Kz' + 2H') + c(Kz' + 2H')^2 = 0;$$

le lieu du point P′ est donc une conique. Les directions asymptotiques de cette conique sont fournies par l'équation

$$\begin{aligned}(K + 2\alpha\rho)x - 2\alpha\beta y)^2 - (K - 2\beta^2)y + 2\rho\beta x)^2 - 2a(K - 2\alpha\rho)x - 2\alpha\beta y)(2\rho x - 2\beta y) \\ - 2b(K - 2\beta^2)y + 2\rho\beta x)(2\rho x - 2\beta y) + c(2\rho x - 2\beta y)^2 = 0,\end{aligned}$$

et nous exprimerons que c'est une hyperbole équilatère en annulant la somme des coefficients de x^2 et de y^2 ; nous sommes ainsi conduit à l'équation

$$\begin{aligned}(K + 2a\alpha)^2 + (K - 2\beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2 + 4\rho^2\beta^2 - 2a(2\rho(K - 2\rho\alpha) - 4\alpha\beta^2) - 2b(4\rho^2\beta - 2\beta(K - 2\beta^2)) \\ + c(4\rho^2 + 4\beta^2) = 0.\end{aligned}$$

En ordonnant cette équation par rapport aux puissances décroissantes de K, et en posant $C = \alpha^2 + \beta^2 - 2a\alpha - 2b\beta - c$, on obtient aisément l'équation plus simple

$$(3) \qquad K(\beta^2 - 2b\beta + 2a\rho) - 2(\rho^2 + \beta^2)C = 0.$$

Telle est l'équation du lieu demandé ; ce lieu est une quartique qui admet un point double à l'infini, dans la direction Ox ; les tangentes en ce point sont imaginaires ; les autres directions asymptotiques sont imaginaires ; par suite la courbe est fermée. Elle rencontre la parabole en six points dont quatre sont sur le cercle donné, les deux autres sur la directrice ; ces courbes ont en outre deux points communs à l'infini sur Ox. Enfin le cercle coupe encore ce lieu en quatre autres points qui sont sur les parallèles à l'axe de la parabole menées par les points de contact des tangentes à la parabole issues du centre du cercle.

4. Pour que le lieu du point P soit un cercle, il faut que les coefficients de x^2 et de y^2 soient égaux et que le coefficient de xy soit nul. Les deux équations obtenues ainsi, et ordonnées par rapport aux puissances décroissantes de K, se ramènent aisément aux équations simples

$$\begin{aligned} K(\beta(\beta - b) + \rho(\alpha - a)) + (\rho^2 - \beta^2)C &= 0, \\ K(\beta(\alpha - a) - \rho(\beta - b)) + 2\rho\beta C &= 0. \end{aligned}$$

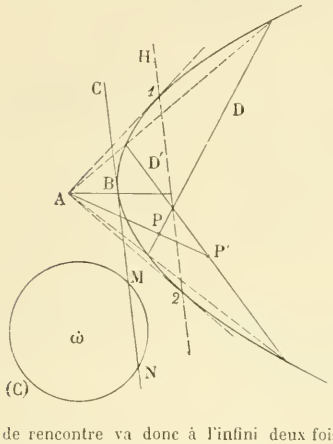
Ce sont les équations qui déterminent le point A ; chacune de ces équations représente une courbe du quatrième degré ; il y a donc 16 positions du point A pour lesquelles la conique qui correspond au cercle C est aussi un cercle. Parmi ces points, sept sont à l'infini, quatre sont à l'intersection

du cercle et de la parabole ; ces onze points sont des solutions impropres ; il y a enfin quatre points communs situés sur les droites $\beta^2+p^2=0$. Il reste donc une solution véritable.

Pour avoir le lieu du point A quand le rayon du cercle varie seul, il suffit d'éliminer C entre les deux équations précédentes. On obtient ainsi le lieu total $K(\beta^2+p^2)[\beta(\alpha-a)+p(\beta-b)]=0$, c'est-à-dire la parabole donnée, $K=0$, les diamètres menés par les points de contact des tangentes isotropes, $\beta^2+p^2=0$, et l'hyperbole d'Appolonius du centre du cercle, du point (a, b).

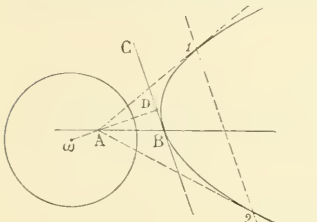
Solution géométrique. — 1° et 2° Il résulte des propriétés géométriques de la polaire que les droites D et D′ se coupent sur la polaire du point A, H, et qu'une droite quelconque issue de ce point coupe ces deux droites en deux points harmoniques par rapport au point A et au point qui est sur H. La transformation de figure indiquée dans l'énoncé est donc une homologie particulière, dans laquelle A est le centre d'homologie, H l'axe d'homologie, et telle que la parabole se transforme en elle-même.

Si la droite D tourne autour d'un point P, la droite correspondante D′ tourne autour du point correspondant P′ ; ces deux points sont alignés avec le point A ; enfin on sait que si l'un de ces points décrit un cercle, l'autre décrit une conique dont les points à l'infini correspondent aux points de rencontre du cercle avec la droite de son plan qui est l'homologue de la droite à l'infini située dans l'autre plan. Or la droite qui correspond à la droite de l'infini est la tangente parallèle à H ; elle coupe le cercle donné en M et N ; les directions asymptotiques de la conique correspondante sont donc AM et AN.



3° Pour que la conique correspondante au cercle (C) soit une hyperbole équilatère, il faut que le segment MN soit vu du point A sous un angle droit, c'est-à-dire que le cercle décrit sur MN comme diamètre passe au point A. On aura donc le lieu de ce point de la façon suivante : sur chaque sécante au cercle (C), tangente à la parabole, on décrit un cercle ayant pour diamètre la portion interceptée par le cercle (C), et on prend les points de rencontre de ce cercle avec le diamètre conjugué de cette tangente ; on obtient deux points dont le lieu est le lieu des points A pour lesquels le cercle (C) est transformé en hyperbole équilatère. Parmi ces tangentes, deux sont isotropes ; pour elles le cercle décrit sur MN comme diamètre se réduit à la tangente MN et à la droite de l'infini ; l'un des points de rencontre va donc à l'infini deux fois, dans la direction Ox, et les deux asymptotes sont les diamètres des tangentes isotropes, $y^2+p^2=0$. Le lieu est donc du quatrième ordre. Il est évident qu'il coupe la parabole aux quatre points de rencontre avec le cercle (C) et aux deux points de contact des tangentes isotropes. D'autre part, le cercle décrit sur MN comme diamètre coïncide deux fois avec le cercle (C), quand la tangente passe au centre de ce cercle ; donc le lieu coupe encore le cercle en quatre points situés sur les diamètres correspondant à ces tangentes.

4° Il nous reste à chercher dans quels cas cette conique est un cercle ; il faut pour cela que les deux droites AM et AN soient deux droites isotropes, c'est-à-dire que le point A soit l'un des centres des cercles de rayon nul du faisceau linéaire déterminé par le cercle ω et la tangente BC à la parabole ; le point A doit donc être sur la perpendiculaire abaissée de ω sur la droite BC et de plus il doit être l'un des points doubles de l'involution qui a pour point central le point D et pour éléments conjugués les points de rencontre du cercle ω avec le diamètre ωA. Pour un cercle donné ω le point A est donc à l'intersection de deux lieux : le premier lieu est *le lieu des points de rencontre de chaque diamètre de la parabole avec la perpendiculaire abaissée du point ω sur la direction conjuguée ;* le second lieu est *le lieu des points doubles des involutions déterminées sur les diamètres du cercle ω par les systèmes de cercles dont ω fait partie et dont, à chaque fois, l'axe radical est la tangente à la parabole perpendiculaire au diamètre mené dans le cercle ω.*



Le premier lieu est bien connu : c'est l'hyperbole d'Appolonius du point A. Il est d'ailleurs facile de le

démontrer directement; car le faisceau des diamètres, AB, est homographique à celui des directions conjuguées; en outre le faisceau ωA est rectangulaire au faisceau des directions conjuguées; donc les deux faisceaux ωA et AB sont homographiques; par suite, le lieu de A est une conique qui passe en ω et au point à l'infini sur Ox; il est au surplus évident qu'elle passe aux pieds des normales abaissées de ω sur la parabole; donc cette conique coïncide avec l'hyperbole d'Appolonius du point ω.

Ce lieu est indépendant du rayon du cercle ω; donc c'est le lieu du point A, pour lequel la conique correspondante au cercle ω est un cercle, quand le rayon du premier cercle varie.

Quant au second lieu, c'est une courbe du troisième ordre qu'il serait facile d'étudier géométriquement. Mais cela est sans intérêt pour nous; il nous suffit de constater que les points A pour lesquels la conique correspondante du cercle ω est un autre cercle ne se présentent pas ici de la même façon que dans la première méthode : ils sont ici l'intersection d'une conique et d'une cubique qui passent toutes deux au point ω.

A résolu la question : M. E. Barré (Douai).

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (Concours de 1895.)

Physique. (*Deuxième question.*)

430. — *Un calorimètre à glace contient de l'alcool dont on provoque l'évaporation par le passage d'un courant d'air pris à 0°. On demande quelle quantité d'air il faut faire passer à travers l'alcool pour en évaporer 1 gramme; et quel poids de glace est formé par cette évaporation.*

Chaleur de fusion de la glace.	80°
Chaleur de vaporisation de l'alcool à 0°	236°
Tension de vapeur de l'alcool à 0°	12mm,7 de mercure
Densité de vapeur de l'alcool	1,59

Qu'arriverait-il si le courant d'air était chaud?

On doit admettre que l'air, en barbotant dans l'alcool, se sature de vapeur. Si la pression atmosphérique est 760mm, le poids de cet air, supposé sec, est donné par la formule suivante, qu'on obtient aisément en écrivant que l'air et la vapeur se mélangent dans le même volume,

$$x = \frac{1}{1,59}\,\frac{760 - 12,7}{12,7} = 37^{gr},008.$$

Le volume initial de cet air, sec ou non, est de $28^{lit},622$.

Le poids de glace formé est

$$y = \frac{236}{80} = 2^{gr},95.$$

Si le courant d'air était chaud, il céderait, en se refroidissant d'abord à 0°, une certaine quantité de chaleur au calorimètre et, suivant que cette chaleur serait inférieure, égale ou supérieure à la chaleur de vaporisation de l'alcool, la quantité de glace contenue dans le calorimètre augmenterait, resterait stationnaire ou diminuerait. Le poids d'air nécessaire pour produire l'évaporation d'un gramme d'alcool serait, d'ailleurs, toujours le même.

CONCOURS DE 1895 (*Suite*).

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Épure.

455. — On donne le triangle soa, $s'o'a'$:

s, s'	$x = 2^{cm}$,	$y = 10^{cm}$,	$z = 10^{cm}$;
o, o'	$x = -6^{cm}$,	$y = 4^{cm}$,	$z = 10^{cm}$;
a, a'	$x = 4^{cm}$,	$y = 4^{cm}$,	$z = 10^{cm}$.

Le point s, s' est le sommet d'un cône admettant pour plan principal le plan horizontal s', pour axe la droite so, $s'o'$; pour génératrice principale sa, $s'a'$ et pour base dans le plan de front oa une certaine circonférence c, c' qui est déterminée. On considère d'autre part le tore engendré par cette même circonférence c, c' en tournant autour de la verticale o.

Représenter le solide commun au tore et au cône.

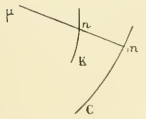
(25 juillet. — Durée : 1 heures.)

ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES

Cours spéciaux.

Analyse et Trigonométrie.

456. — Sur la normale à une courbe quelconque C, on porte à partir du pied m et dans la direction du centre de courbure μ une longueur mn égale à $\lambda\rho$, (ρ représentant le rayon de courbure et λ un coefficient constant qui peut recevoir des valeurs positives ou négatives.)

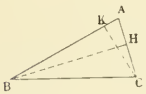


On demande :

1° De déterminer en fonction des éléments caractéristiques de la courbe C au point m la tangente à la courbe K lieu du point n ;

2° D'écrire la condition analytique à laquelle la courbe C doit satisfaire pour que la courbe K se réduise à une droite : examiner ce que devient cette condition dans les cas simples où λ est égal à -1 ou à $\pm\frac{1}{2}$.

457. — Calculer les côtés, les angles B et C et la surface d'un triangle ABC dans lequel on donne :



L'angle $A = 62^\circ 20' 35''$;

La hauteur BH ou $h = 4532^m$;

La hauteur CK ou $k = 1945^m$.

(25 septembre, de 8 h. 1/2 à midi.)

Mécanique.

458. — Un point de masse m est attiré vers deux centres fixes O et O' par des forces proportionnelles aux distances respectives du point mobile à ces points fixes ; déterminer la trajectoire du point m.

Examiner en particulier ce que devient cette trajectoire dans le cas où le point m part du repos et déterminer dans ce cas la loi complète de son mouvement.

(25 septembre, de 1 h. 1/2 à 5 h. 1/2.)

Épure de Stéréotomie (feuille 1/2 grand-aigle).

Une tour cylindrique de 3^m de diamètre, formant encorbellement sur un mur vertical, est en saillie de 2^m sur ce mur auquel elle est reliée par une trompe cylindrique telle que la projection de la courbe d'intersection de la tour et de la trompe sur le mur affecte la forme d'un demi-cercle. Les voussoirs de la trompe s'appuient sur un trompillon de $0^m,50$ de diamètre.

On demande :

1° De tracer l'appareil général de cette trompe ;

2° De faire l'épure complète d'un voussoir qu'on figurera en outre par sa perspective cavalière.

L'épure sera exécutée à l'échelle de 1/20, soit $0^m,05$ pour 1^m.

(26 septembre, de 8 h. 1/2 à midi.)

Croquis et dessin de machines.

Première partie : Croquis (feuille 1/8 grand-aigle, quadrillée).

1° Sur une première feuille, faire au crayon, à main levée, le relevé géométral (plan, élévation et coupe) de l'un des objets placés dans la salle d'examen ;

2° Relever ses dimensions (en millimètres) et les inscrire sur le croquis.

On a accordé 1 h. 1/2 pour cette première partie du travail, après quoi le modèle en relief a été retiré de la salle.

Deuxième partie : Mise au net (feuille 1/4 grand-aigle).

Sur une seconde feuille, mettre au net, à l'encre de Chine, à une échelle déterminée, le croquis précédent.

Nota. — L'échelle est laissée à l'arbitraire des candidats ; elle devra être choisie assez grande pour que la feuille soit bien remplie. L'échelle doit être dessinée dans une partie libre de cette feuille.

(26 septembre, de 1 h. 1/2 à 5 h. 1/2.)

QUESTIONS PROPOSÉES

459. — On considère le réseau de coniques ayant pour triangle polaire un triangle rectangle dont l'un des côtés de l'angle droit est double de l'autre, et parmi les coniques de ce réseau on prend d'abord le système des paraboles. On demande le lieu du point de rencontre de chacune d'elles avec celui de ses diamètres qui passe au sommet de l'angle droit. On demande aussi le lieu des foyers de ces paraboles.

Parmi les coniques de ce réseau, on prend ensuite le système formé par les coniques semblables à une conique donnée, et l'on demande le lieu du point de contact de chacune d'elles avec une droite passant au milieu de l'hypoténuse.

Construire ce dernier lieu quand la conique variable est une hyperbole équilatère. E. H.

460. — On considère trois coniques ayant un foyer commun, F ; l'une, fixe, C ; les deux autres variables, Γ et Γ′, tangentes respectivement à la conique C en des points fixes A et B, et tangentes entre elles ; et on demande :

1° Le lieu du point de contact, D, des coniques Γ et Γ′ ;

2° L'enveloppe de la tangente commune en D à ces deux coniques ;

3° Le lieu du point de rencontre des directrices de ces deux coniques relatives au foyer commun F ; montrer que ces directrices passent par des points fixes et les déterminer ;

4° Montrer aussi que la sécante commune aux deux coniques Γ et Γ′, qui ne passe pas au point où elles se touchent, passe aussi par un point fixe ;

5° Si l'on considère une droite passant par ce point, montrer qu'il y a deux couples de coniques Γ, Γ′ qui l'admettent pour sécante commune ne passant pas au point de contact.

6° On considère le triangle formé par cette droite et les tangentes aux deux couples en leurs points de contact ; puis une conique de foyer F inscrite dans ce triangle et une de foyer F circonscrite à ce triangle. Trouver les enveloppes des directrices de ces coniques qui correspondent au foyer F, et le lieu de leurs points de rencontre.

E. Barre (lycée de Douai).

461. — On considère un carré contenant n^2 cases. Trouver combien il y a de manières de mettre n objets identiques dans n cases de ce carré, de façon qu'il n'y ait pas deux objets dans la même colonne, plusieurs d'entre eux pouvant être dans la même ligne. Etudier aussi le cas où tous les objets sont différents.

462. — Une lentille convergente aplanétique mais non achromatique reçoit un faisceau parallèle de lumière blanche. Etudier la coloration de la tache lumineuse que les rayons réfractés formeraient sur un écran blanc disposé entre le foyer correspondant aux rayons violets et le foyer correspondant aux rayons rouges. Que verrait-on dans un spectroscope dont on placerait la fente dans cette région ?

463. — Etudier la distribution des pressions dans une masse de liquide pesant enfermée dans un vase qui se déplace verticalement avec une accélération donnée. Un corps solide plongé dans ce liquide étant supposé maintenu en repos relatif à l'aide d'un ressort qui le relie au fond du vase, quelle est l'action supportée par ce ressort ? Si le fond du vase est percé d'un orifice, que peut-on prévoir au sujet de l'écoulement du liquide par cet orifice ? Examiner en particulier le cas d'un mouvement uniforme et celui d'un vase abandonné à lui-même et tombant en chute libre.

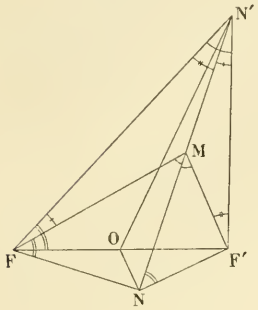
DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ET GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

359. — *Soit* M *un point d'une ellipse de centre* O *ayant pour foyers* F *et* F′ ; *sur la normale en* M, *on prend, de part et d'autre de ce point, des segments* MN = MN′ = $\sqrt{MF.MF'}$. *Prouver que les angles* MNF *et* ON′F′ *sont égaux ; et de même pour* MN′F, ON′F′.

Solution géométrique. — On a $\frac{MN}{MF} = \frac{MF'}{MN}$ et $\widehat{FMN} = \widehat{F'MN}$. Donc les triangles FMN et F'MN sont semblables et donnent

$$\widehat{MNF} = \widehat{MF'N}, \qquad \widehat{MFN} = \widehat{MNF'}.$$



Les triangles FMN' et F'MN' sont de même semblables et donnent

$$\widehat{MN'F} = \widehat{MF'N'}, \qquad \widehat{MFN'} = \widehat{MN'F'}.$$

Nous pouvons écrire successivement

$$\begin{aligned}\widehat{FNF'} &= \widehat{FNM} + \widehat{MNF'} = \widehat{FNM} + \widehat{MFN'} \\ &= 2 \text{ droits} - \widehat{FMN} = 2 \text{ droits} - (\widehat{MFN'} + \widehat{MN'F}) \\ &= 2 \text{ droits} - (\widehat{MN'F'} + \widehat{MN'F}) \\ &= 2 \text{ droits} - \widehat{FN'F'}.\end{aligned}$$

Le quadrilatère FNF'N' est donc inscriptible.

On a aussi $\widehat{FMF'} = 2\widehat{FMN} = 2\widehat{FN'F'}$,

à cause des égalités ci-dessus.

Les triangles F'MN et FF'N' ont les angles F'MN et FN'F' égaux, et aussi les angles F'NM et F'FN' égaux comme ayant même mesure ; ils sont semblables et donnent

$$\frac{N'F}{MN} = \frac{F'F}{F'N}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{N'F}{NN'} = \frac{F'O}{F'N}.$$

Les triangles FNN' et F'ON, ayant les angles FN'N et OF'N égaux et compris entre côtés proportionnels, sont semblables ; on a par suite

$$\widehat{N'NF} \quad \text{ou} \quad \widehat{MNF} = \widehat{ONF'}. \qquad \text{C. q. f. d.}$$

On verrait de même que $\widehat{MN'F} = \widehat{ON'F'}$.

J.-L., à Douai.

Solution analytique. — Nous allons montrer que les ensembles de droites NO, NN' et NF, NF' ont même système de bissectrices.

Soient α, β les coordonnées du point M ; on a

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 = 0 ;$$

la normale en ce point a pour équation

$$\frac{x-\alpha}{\frac{\alpha}{a^2}} = \frac{y-\beta}{\frac{\beta}{b^2}} = \frac{\rho}{\pm\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^4} + \frac{\beta^2}{b^4}}},$$

ρ désignant la distance du point (x, y) au point (α, β).

On a

$$MF.MF' = \left(a - \frac{c}{a}\alpha\right)\left(a + \frac{c}{a}\alpha\right) = \frac{a^4 - c^2\alpha^2}{a^2}.$$

D'autre part,

$$\frac{\alpha^2}{a^4} + \frac{\beta^2}{b^4} = \frac{\alpha^2}{a^4} + \frac{1}{b^2}\left(1 - \frac{\alpha^2}{a^2}\right) = \frac{a^4 - c^2\alpha^2}{a^4 b^2}.$$

On aura donc, pour les coordonnées des points N et N',

$$\frac{x-\alpha}{\frac{\alpha}{a^2}} = \frac{y-\beta}{\frac{\beta}{b^2}} = \pm ab.$$

Prenons le signe + par exemple ; on aura

$$x = \frac{\alpha}{a}(a+b), \qquad y = \frac{\beta}{b}(a+b);$$

ce sont les coordonnées du point N.

L'ensemble de deux droites passant par l'origine et parallèles à NO et NN' a pour équation

$$(1) \qquad a^2\beta x - b^2\alpha y)(a\beta x - b\alpha y) = 0.$$

Les droites NF et NF' ont pour équations

$$\frac{y}{x-c} = \frac{\frac{\beta}{b}(a+b)}{\frac{\alpha}{a}(a+b)-c}, \qquad \frac{y}{x+c} = \frac{\frac{\beta}{b}(a+b)}{\frac{\alpha}{a}(a+b)+c};$$

l'ensemble de deux droites passant par l'origine et parallèles à ces droites a pour équation

$$(2) \qquad (a+b)^2(a\beta x - b\alpha y)^2 - a^2b^2c^2y^2 = 0.$$

Or étant donnés deux systèmes de droites

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0,$$
$$A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 = 0,$$

pour qu'ils aient même système de bissectrices, on doit avoir

$$\frac{A-C}{B} = \frac{A'-C'}{B'}.$$

On vérifie aisément cette condition pour les équations (1) et (2) en tenant compte de la relation

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 = 0.$$

E.-N. BARISIEN.

Autres solutions de MM. Tzitzeica, à Bucarest ; G. de France, à Versailles.

---

400. — *Une parabole est circonscrite à un triangle rectangle ; trouver le lieu du point de contact d'une tangente qui fait avec l'un des côtés de l'angle droit et en sens opposé le même angle que l'hypoténuse.*

Les axes de coordonnées étant les côtés de l'angle droit du triangle, l'équation générale des paraboles circonscrites est

$$(y - mx)^2 - am^2x - by = 0,$$

en désignant par a et b les longueurs des côtés. L'hypoténuse a pour coefficient angulaire $-\frac{b}{a}$, par conséquent un point du lieu cherché sera à l'intersection de la parabole et du diamètre conjugué de la direction dont le coefficient angulaire est $\frac{b}{a}$; ce diamètre a pour équation

$$2(ma - b)(y - mx) + m^2a^2 + b^2 = 0.$$

On aura l'équation du lieu en éliminant m entre ces deux équations. Ordonnons-les par rapport à m ; on a

$$m^2x(x-a) - 2mxy + y(y-b) = 0,$$
$$m^2a(2x-a) - 2m(bx+ay) + b(2y-b) = 0;$$

le résultat de l'élimination est

$$bx(x-a)(2y-b) - ay(y-b)(2x-a)^2 - 4x(x-a)(bx+ay) - axy(2x-a)(bxy(2y-b) - y(y-b)(bx+ay)) = 0,$$

ou encore

$$bx - ay)^2(2xy - bx - ay + ab)^2 - 4x^2y^2(bx - ay)^2 - a^2b^2 = 0,$$

$$(1) \qquad (bx - ay)^2(bx + ay - ab)(2xy - bx - ay + ab) - 4a^2b^2x^2y^2 = 0.$$

Le lieu est une courbe du cinquième degré.

Pour la construire, nous observerons qu'elle est unicursale ; il existe, en effet, sur chaque parabole

un seul point où la tangente a pour coefficient angulaire $\frac{b}{a}$; les coordonnées de ce point sont fonctions rationnelles de m.

Nous aurons ces coordonnées en résolvant les deux équations

$$(y - mx)^2 - am^2x - by = 0,$$
$$2(ma - b)(y - mx) + m^2a^2 + b^2 = 0.$$

La première peut se remplacer par l'équation

$$am^2x + by = \frac{(m^2a^2 + b^2)^2}{4(ma - b)^2},$$

et en résolvant on obtient

$$x = \frac{(a^2m^2 + b^2)(a^2m^2 + 2abm - b^2)}{4(ma - b)^2(ma + b)m},$$

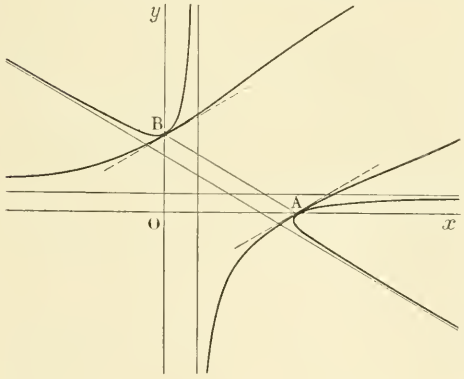
$$(2) \qquad y = \frac{(a^2m^2 + b^2)(-a^2m^2 + 2abm + b^2)}{4(ma - b)^2(ma + b)}.$$

Les racines du trinome $a^2m^2 + 2abm - b^2$ sont $-\frac{b}{a}(\sqrt{2} + 1)$ et $\frac{b}{a}(\sqrt{2} - 1)$; celles du trinome $-a^2m^2 + 2abm + b^2$ sont $-\frac{b}{a}(\sqrt{2} - 1)$ et $\frac{b}{a}(\sqrt{2} + 1)$.

Le tableau suivant donne les signes de x et de y dans les différents intervalles limités par les valeurs remarquables de m ;

m	$-\infty$		$-\frac{b}{a}(\sqrt{2}+1)$		$-\frac{b}{a}$		$-\frac{b}{a}(\sqrt{2}-1)$		0		$\frac{b}{a}(\sqrt{2}-1)$		$\frac{b}{a}$		$\frac{b}{a}(\sqrt{2}+1)$		$+\infty$
x	$\frac{a}{4}$	$+$	0	$-$	$-\infty$	$+\infty$	$+$	a	$+$	$+\infty$	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$	$+\infty$	$+$	a	$+$	$\frac{a}{4}$
y	$+\infty$	$+$	b	$+$	$+\infty$	$-\infty$	$-$	0	$+$	$\frac{b}{4}$	$+$	b	$+$	$+\infty$	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$

On obtient ainsi la forme générale de la courbe ; les points A $(a, 0)$ et B $(0, b)$ sont des points doubles. En partant de l'équation (1) et en transportant l'origine des coordonnées successivement en ces deux points, on trouve que les tangentes en ces points doubles sont confondues et ont pour coefficient angulaire $\frac{b}{a}$.



La courbe admet les trois asymptotes

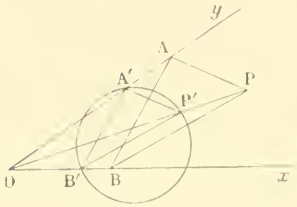
$$x - \frac{a}{4} = 0, \qquad y - \frac{b}{4} = 0,$$
$$bx + ay - \frac{3ab}{4} = 0;$$

on déterminera sans peine la position de la courbe par rapport à ces droites, en partant soit de l'équation (1), soit des équations (2). Enfin cette courbe admet des branches paraboliques dans la direction $bx - ay = 0$.

A. LAUREAUX, lycée de Besançon.

Ont résolu la même question : MM. E. N. Barisien ; F. Pégorier, répétiteur au collège de Cette ; G. A. Pouilliart.

417. — *Mener entre deux droites données un segment parallèle à une direction donnée et qui soit vu d'un point donné sous un angle donné.*



Soient Ox, Oy les droites données et P le point donné.

Menons une droite quelconque parallèle à la direction donnée, et décrivons sur A B′ un segment capable de l'angle donné. Il rencontre la droite OP en P′. En menant par P des parallèles aux droites P A et P B′, AB est le segment cherché.

La droite OP rencontre le cercle en deux points, il y aura donc deux solutions.

On aura encore deux nouvelles solutions en décrivant de l'autre côté de A′B′ le segment capable de l'angle donné.

Toutes ces solutions n'existent que si la droite OP rencontre les cercles que nous avons construits.

VASNIER, lycée de Versailles.

Même solution par M. E. Pidoosse.
Autre solution par M. E. Barré, à Douai.

418. — *Étant donnés deux axes rectangulaires, on considère un cercle ayant son centre à l'origine, et dont le rayon est* R, *et un point* A *sur l'axe* Oy, *à une distance du centre égale à* a ($a > R$). *Un diamètre variable du cercle le coupe en* B *et* C. *On demande l'équation générale des coniques bitangentes au cercle en* B *et* C *et passant par le point* A.

En A, *on mène la tangente à la courbe ; elle coupe l'un des axes en* D, *l'autre en* E. *Trouver le lieu de* D *et le lieu de* E.

Trouver de même le lieu du point de rencontre de chacun des axes avec la normale en A.

On considère le point P *qui a pour coordonnées* (a, a). *Lieu du point de rencontre de la polaire de ce point avec* BC.

Dans chaque question, on distinguera la partie du lieu qui correspond au cas où la courbe est une ellipse de celle qui correspond au cas où la courbe est une hyperbole (*).

Soit $y - mx = 0$ l'équation du diamètre BC ; l'équation générale des coniques bitangentes au cercle en B et C est

$$x^2 + y^2 - R^2 + \lambda(y - mx)^2 = 0;$$

en écrivant que cette équation est vérifiée par les coordonnées du point A $(0, a)$, on trouve $\lambda = -\dfrac{a^2 - R^2}{a^2}$; de telle sorte que l'équation de la conique bitangente au cercle en B et C et passant par le point A est

$$(1) \qquad a^2(x^2 + y^2 - R^2) - (a^2 - R^2)(y - mx)^2 = 0.$$

La droite BC est un axe de cette conique, puisque les tangentes en B et C sont perpendiculaires à BC ; l'autre axe est perpendiculaire à BC et passe par le point O.

D'autre part l'équation de la tangente au point A est

$$(2) \qquad a(ay - R^2) - (a^2 - R^2)(y - mx) = 0.$$

On aura l'équation du lieu du point D en éliminant m entre l'équation (2) et celle de BC, $y - mx = 0$.

Le lieu est la droite $ay - R^2 = 0$; c'est la polaire du point A par rapport au cercle.

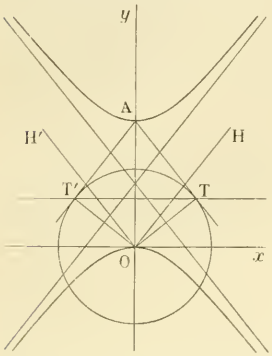
Pour que l'équation (1) représente une ellipse, il faut qu'on ait $m^2 < \dfrac{R^2}{a^2 - R^2}$; cette condition exprime que le diamètre BC doit être situé par rapport aux droites OT et OT′ dans la région qui ne contient pas le point A.

Les points du lieu trouvé qui correspondent à des ellipses sont donc situés en dehors du seg-

(*) Une faute d'impression avait fait mettre parabole au lieu d'hyperbole, dans l'énoncé.

ment TT′ ; les points relatifs aux hyperboles sont situés sur le segment TT′. Le point T correspond à une parabole singulière formée de la tangente AT et d'une tangente au cercle parallèle à AT ; résultat analogue pour le point T′.

Le lieu du point E s'obtient en éliminant m entre l'équation (2) et celle du second axe $x + my = 0$.



On trouve aisément

$$x^2(a^2 - R^2) - R^2y^2 + aR^2y = 0,$$

équation d'une hyperbole tangente à l'origine à Ox, ayant son centre au milieu de OA et ses asymptotes parallèles aux tangentes AT et AT′.

Menons par le point O des parallèles OH, OH′ à ces tangentes ; pour que la conique (1) soit une ellipse, il faut que l'axe $x + my = 0$ soit situé par rapport aux deux droites OH, OH′ dans la même région que le point A. Les points de la branche d'hyperbole qui passe par le point A correspondent à des ellipses, ceux de la branche inférieure correspondent à des hyperboles.

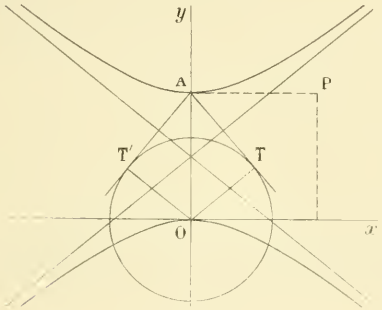
La normale au point A à la conique (1) a pour équation

$$(3) \qquad \frac{x}{(a^2 - R^2)m} = \frac{y - a}{R^2}.$$

Éliminons m entre cette équation et celle de BC, $y - mx = 0$; on obtient

$$y^2(a^2 - R^2) - R^2x^2 - ay(a^2 - R^2) = 0,$$

équation d'une hyperbole tangente à Ox à l'origine, ayant son centre au milieu de OA et ses asymptotes parallèles aux rayons OT et OT′ ; et, d'après ce qui a été dit plus haut, la branche passant par le point O contient les points du lieu qui correspondent à des ellipses ; les points de l'autre branche correspondent à des hyperboles.



Éliminons maintenant m entre l'équation (3) et celle de l'autre axe $x + my = 0$; on obtient

$$y = \frac{a^2 - R^2}{a},$$

équation d'une droite parallèle à Ox et symétrique de la droite TT′ par rapport au milieu de OA.

La portion de cette droite comprise entre OH et OH′ correspond à des ellipses, les autres portions correspondent à des hyperboles.

Enfin la polaire du point $P(a, a)$ par rapport à la conique (1) a pour équation

$$a(ax + ay - R^2) - (a^2 - R^2)(y - mx) = 0 ;$$

le lieu du point de rencontre de cette droite et de BC a pour équation

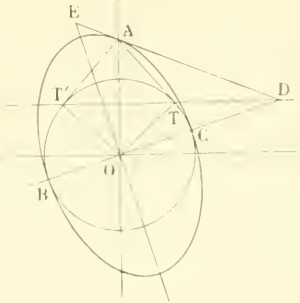
$$ax + ay - R^2 = 0,$$

équation de la polaire du point P par rapport au cercle. Les points de rencontre de cette droite avec OT et OT′ sépareront les points relatifs à des ellipses de ceux qui sont relatifs à des hyperboles.

P. XAMBEU, collège Chaptal.

Solutions analogues par MM. Mario GUESDE ; G. LŒDERICH, à Rouen ; J. MARCHAL ; F. PÉGORIER, répétiteur au collège de Cette ; G. A. POUILLIART, à Joigny.

Solution géométrique. — Soit une conique (γ) bitangente au cercle O en B et C, et passant par A. Aux points B et C, les tangentes à la conique (γ) sont parallèles, donc BC est un diamètre de cette conique ; de plus, les tangentes aux extrémités de ce diamètre lui étant perpendiculaires, BC est un axe de la conique. Il est facile de distinguer la nature de la conique (γ) suivant la position de BC. Lorsque BC est dans l'angle TOT′, A est extérieur à l'espace compris entre les tangentes en B et C ; donc (γ) est une hyperbole. Lorsque BC est extérieur à l'angle TOT′, (γ) est une ellipse. Aux cas limites, si BC coïncide avec OT ou OT′, (γ) est une parabole composée de deux droites parallèles.

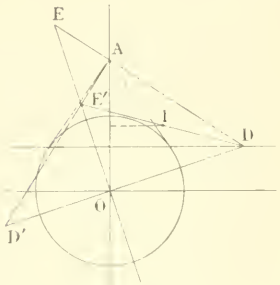


Quand on aura obtenu les lieux demandés, on en conclura aisément les portions qui sont relatives à des ellipses ou à des hyperboles à l'aide de la remarque que nous venons de faire.

Tout point de la corde des contacts BC a même polaire par rapport au cercle O et à la conique (γ) ; soit D le point de rencontre de BC avec la tangente en A ; la polaire de D par rapport à (γ) passe en A, donc aussi sa polaire par rapport au cercle O qui est la même. Il en résulte que le lieu de D est la polaire TT′ du point A par rapport au cercle.

Plus généralement, en vertu du même raisonnement, le lieu du point de rencontre de la polaire par rapport à (γ) d'un point fixe P et du diamètre BC est la polaire de P par rapport au cercle O, ce qui résout la dernière partie de la question proposée.

Le lieu du point E peut être défini de la façon suivante : le point D décrivant la droite TT′, on joint D et O, et on mène à cette droite la perpendiculaire OE ; E est à la rencontre de OE avec AD. On peut alors envisager le lieu de E comme engendré par l'intersection des rayons homologues de deux faisceaux homographiques ayant pour sommets O et A. Le lieu de E est donc une conique passant par O et A. On sait d'ailleurs que la tangente au lieu au point O est la droite du faisceau O correspondant à la droite AO du faisceau A ; c'est donc Ox ; de même la tangente en A au lieu est parallèle à Ox. Enfin pour que E s'éloigne à l'infini, il faut que AD soit perpendiculaire à OD ; cela a lieu pour les droites AT, AT′ qui sont donc les directions asymptotiques du lieu de E.



Le lieu de E est donc une hyperbole ayant pour sommets O et A, et ses asymptotes parallèles à AT et AT′.

Cherchons le lieu du point E′ où la normale en A rencontre l'axe OE. Le milieu I de DE′ est le centre du cercle circonscrit au quadrilatère DAE′O ; donc I est sur la perpendiculaire élevée au milieu de OA. Par conséquent, D décrivant TT′, E′ décrit une parallèle à TT′ symétrique de cette droite par rapport au milieu de OA.

Le lieu de D′, où la normale en A rencontre OD, s'obtient en partant du lieu de E′, comme nous avons obtenu le lieu de E en partant du lieu de D. Ce lieu est donc une hyperbole ayant pour sommets O et A et ses asymptotes perpendiculaires à AT et AT′.

Lucien Sieur,
Soldat au 113e de ligne, élève de l'École normale supérieure.

CONCOURS DE 1895 (*Suite*).

ÉCOLE CENTRALE

Deuxième Session.

Géométrie analytique.

464. — Les axes de coordonnées étant supposés rectangulaires, on demande l'équation générale des hyperboles équilatères admettant une asymptote passant par un point fixe B de l'axe des y et dont le coefficient

angulaire soit m, telles en outre que le produit des abscisses à l'origine des asymptotes soit constant et que le carré du demi-axe transverse soit $2a^2$.

Faisant varier m et a,

1° Démontrer que les axes de symétrie de ces hyperboles forment un faisceau passant par deux points fixes et prouver géométriquement que le lieu des sommets de celles de ces hyperboles dont les axes transverses sont égaux est un limaçon de Pascal.

2° On considérera les hyperboles du faisceau telles que, l'origine des coordonnées se trouvant avec la courbe dans un même angle des asymptotes, le produit de m et des abscisses à l'origine des asymptotes soit de signe contraire au produit des distances de l'origine aux asymptotes.

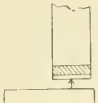
On démontrera que, par un point du plan, on peut mener deux hyperboles de ce système ayant un axe transverse donné.

3° Trouver le lieu Δ des points par lesquels on peut mener deux de ces hyperboles telles qu'une asymptote, passant par B, ait pour coefficient angulaire $+1$, pour l'une, et -1, pour l'autre.

4° On considérera, pour chaque point du lieu Δ, les hyperboles qui répondent, l'une à la valeur maximum, l'autre à la valeur minimum de l'axe transverse ; on leur mènera une tangente commune et on cherchera le lieu du milieu de la distance des points de contact.

Physique et Chimie.

I. — **465.** — Un piston sans frottement de poids π de section S^{cq} repose sur le fond d'un cylindre vertical ouvert à sa partie supérieure dans l'atmosphère. Dans le fond se trouve une soupape qui met le cylindre en relation avec une chaudière de capacité V litres qui contient M^{kg} d'eau et de vapeur et qui est maintenue à une température constante T à laquelle correspond une pression de vapeur de P^{kg} par centimètre carré.



Le cylindre est chauffé à une température T_1 telle que :

1° La pression P_1^{kg} par centimètre carré correspondante soit exactement celle qui est transmise par le piston ;

2° La différence $P - P_1$ soit exactement celle qui est nécessaire pour le fonctionnement de la soupape.

On demande de calculer le déplacement du piston.

Exercice numérique : $V = 30$ litres, $T = 165°$, $P = 7^{kg},13$,
$M = 1^{kg}$, $T_1 = 144°$, $\pi = 1000^{kg}$.

Rayon du piston $R = 31^{cm},43$.
Densité de la vapeur d'eau $d = 0,622$.
Coefficient de dilatation des gaz $\alpha = 0,00367$.

II. — Ozone.

III. — **466.** — On chauffe 10^{gr} de phosphore avec un excès de sulfure de baryum et d'eau. Les gaz dégagés sont reçus dans une dissolution préparée en attaquant 100^{gr} d'argent pur par l'acide azotique, étendant d'eau et ajoutant un excès d'ammoniaque. On demande :

1° La nature du précipité qui se forme ;

2° Le poids d'argent dissous restant dans la liqueur ammoniacale.

$H = 1$, $O = 16$, $S = 32$, $Az = 14$, $P = 31$, $Ag = 108$, $Ba = 137$.

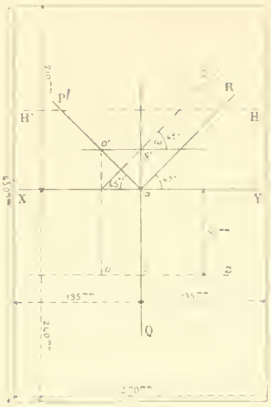
Épure.

467. — Dans le plan de bout $P'zQ$ incliné à 45° sur le plan horizontal on considère un cercle de 60^{mm} de rayon tangent au plan horizontal ; le centre de ce cercle est éloigné de 90^{mm} du plan vertical. Ce cercle est la directrice d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la ligne de terre.

On considère d'autre part un cône de révolution dont le sommet ss' est placé sur l'axe de ce cylindre. La projetante de ss' se confond avec zQ et l'axe de ce cône est perpendiculaire au plan $P'zQ$.

Le 1/2 angle ϖ au sommet du cône est de 45°.

Ceci posé on demande :



1° De déterminer complètement la courbe d'intersection du cylindre avec les deux nappes du cône ;

2° De représenter le solide formé par le cône et le cylindre en limitant ce solide aux deux plans de bout symétriques P'zQ et R'zQ.

Le cône sera limité à sa partie supérieure par le plan horizontal H' tangent au cylindre suivant la génératrice culminante.

Les deux plans P'zP et R'zQ ainsi que les surfaces du cône et du cylindre sont opaques ; le plan H' horizontal supérieur sera seul considéré comme étant transparent.

Observations. — Dans le tracé à l'encre les portions de la courbe d'intersection du cône et du cylindre qui sont extérieures aux deux plans P'zQ et R'zQ seront tracées à l'encre bleue.

On indiquera à l'encre rouge les constructions employées pour déterminer un point quelconque de la ligne d'intersection ou des sections planes et les tangentes en ces points. Le tracé au net devra faire ressortir les constructions des points ou droites remarquables.

Titre extérieur : INTERSECTION DE SURFACES.
Titre intérieur : CONE ET CYLINDRE LIMITÉS PAR DES PLANS.

Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre à 0m,210 du côté supérieur.

Calcul trigonométrique.

468. — Résoudre le triangle ABC dans lequel on donne les côtés b, c ainsi que l'aire S' du triangle DEF qui a pour côtés les longueurs des médianes du triangle ABC.

On choisira parmi les solutions qui répondent aux données numériques celle pour laquelle la hauteur issue du sommet A a la moindre valeur.

$$S' = 9431760^{a}, \qquad b = 49728^{m},7, \qquad c = 67917^{m},8.$$

P. S. — On prouvera que S' est égal aux 3/4 de la surface S du triangle ABC.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

ÉCOLE CENTRALE (1894).

Arithmétique et Algèbre. M. Vacquant.

42. — a et n désignant deux nombres entiers, $a^{n+4} - a^{n}$ est toujours divisible par 30.

43. — a et b étant deux nombres premiers entre eux, $a + b$ est premier avec ab.

44. — a et b étant deux nombres premiers entre eux, trouver les diviseurs communs à $a + b$ et $a - b$.

45. — a étant un nombre entier, le produit $a(a+1)(a+2)(a+3)$ est divisible par $1.2.3.4 = 24$. — Généraliser.

46. — A et B étant deux entiers, a et b deux entiers premiers entre eux, si l'on a $\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2}$, ces deux nombres sont entiers.

47. — Que donneront les fractions $\frac{4}{9}$, $\frac{7}{11}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{11}{64}$, converties en décimales ?

48. — Démontrer que si on réduit $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$ en fraction décimale, on aura une fraction périodique mixte.

49. — Soit la fraction $\frac{1}{7}$. Si on considère la fraction $\frac{a}{7}$, a étant premier avec 7, y a-t-il une relation simple entre les nombres de chiffres des périodes données par ces deux fractions ?

50. — L'équation $2x^2 - 8x - 47 = 0$ a-t-elle ses racines réelles ? — Même question pour l'équation $2x^2 - 8x - 47 = 0$. — Signes des racines.

51. — Dire le nombre des racines réelles des équations

$$3x^4 - 12x^2 + 4 = 0, \qquad 3x^4 + 8x^2 + 1 = 0, \qquad 5x^4 - 9x^2 - 37 = 0.$$

52. — Étudier les variations de la fraction $x - \frac{3}{x}$ sans avoir recours aux dérivées.

53. — Maximum du produit $x^2y^3z^4$, x, y, z désignant des nombres positifs tels que $x + y + z = 3$.

54. — Étudier les variations des fonctions

$$y = \frac{x^2 - 8x + 15}{x - 4}, \qquad y = \frac{x - 3}{x^2 - 4}, \qquad y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 6x + 5}, \qquad y = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 4}.$$

55. — Étudier la série $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$.

56. — La série $\frac{3}{2} - \frac{4}{3} + \frac{5}{4} - \frac{6}{5} + \ldots$ est-elle convergente ?

57. — Dans le système de base 10, quels sont les nombres qui ont des logarithmes commensurables ?

58. — Dérivées des fonctions

$$y = \operatorname{tg}^3 4x^5, \qquad y = \operatorname{tg}^5 (5x^2 + 3x + 8), \qquad y = (4x^2 + 5)^{3x+2}, \qquad y = (3x^2 - 5x + 7)^{4x-3}, \qquad y = (2x^2 - 5x + 3)^{3x^2-3x+1}.$$

59. — Dérivée de la fonction $y = \frac{a + x}{1 - ax}$. — Expliquer le résultat obtenu.

60. — Variations de la fonction $y = \frac{x}{\sin x}$.

61. — Variations des fonctions

$$y = x - \operatorname{tg} x, \qquad y = x + \operatorname{cotg} x, \qquad y = \cos x + \operatorname{tg} x, \qquad y = \cos x + \frac{1}{\sin x}.$$

62. — Condition pour qu'un polynome $f(x)$ soit divisible par sa dérivée.

63. — Séparer les racines de l'équation $\frac{5}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{7}{x-4} + \frac{11}{x-8} - 1 = 0$.

64. — Limite supérieure des racines du polynome $5x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 7x - 11$.

65. — Combien de racines réelles admet chacune des équations

$$4x^3 - 7x^2 + 1 = 0, \qquad x^4 + 5x^2 - 4x + 1 = 0, \qquad 4x^4 - 5x^3 + 3 = 0 \text{ ?}$$

66. — Décomposer en fractions simples la fraction rationnelle $\frac{4x^2 - 1}{x(x-1)(x-2)(x-3)}$.

Trigonométrie. (M. Goully.)

67. — Variations de $y = \operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} x$.

68. — Calculer $\operatorname{tg} \frac{a}{4}$ en fonction de $\operatorname{tg} a$.

69. — Calculer $\sum_{p=0}^{p=n} a \cos p\alpha, \qquad \sum_{p=0}^{p=n} \cos (a + pb)$.

70. — Rendre calculables par logarithmes les expressions $\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}, \qquad \sqrt{a+b} \pm \sqrt{a-b}$.

71. — Rendre calculable par logarithmes $\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x$.

72. — — — — $\frac{\sin (x + y)}{\sin x + \sin y}$.

73. — Rendre calculable par logarithmes l'expression $\frac{a \cos x + b \sin x}{a \cos x - b \sin x}$.

74. — Résoudre l'équation $\frac{a \cos x + b \sin x}{a \cos x - b \sin x} = m$.

75. — Résoudre les équations $\frac{\sin x}{\sin (x - a)} = m, \qquad \frac{\cos x}{\cos (x - a)} = m$.

76. — Résoudre l'équation $a \sin 3x + \sin x = 0$.

77. — Trouver la relation qui existe entre les angles α, β, γ, sachant que

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 1.$$

78. — Angle des traces d'un plan connaissant leurs inclinaisons sur la ligne de terre.

79. — Équivalence des systèmes (directement)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \\ A + B + C = 180^\circ; \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B, \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C. \end{array} \right.$$

80. — Démontrer géométriquement la formule $S = \frac{abc}{4R}$.

81. — Démontrer les relations $\frac{1}{r} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r''}$, $S = \sqrt{rr'r''r}$.

82. — Résoudre un triangle rectangle connaissant la surface et la hauteur qui correspond à l'hypoténuse.

83. — Résoudre un triangle rectangle connaissant l'hypoténuse et le rayon du cercle inscrit (ou bien R et r).

84. — Résoudre un triangle connaissant deux côtés et l'angle compris. Calculer directement le troisième côté.

85. — Résoudre un triangle connaissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux. Calculer directement le troisième côté.

86. — Résoudre un triangle dont les angles sont en progression arithmétique et dont on connaît deux côtés.

87. — Résoudre un triangle connaissant la surface et deux côtés.

88. — Résoudre un triangle connaissant la surface et deux hauteurs (2 solutions). Calculer celle pour laquelle la troisième hauteur est la plus petite.

89. — Résoudre un triangle connaissant deux côtés et le rayon du cercle circonscrit.

90. — Résoudre un triangle connaissant un côté et deux hauteurs.

91. — Résoudre un triangle connaissant le périmètre, le rayon du cercle inscrit et un angle.

92. — Résoudre un triangle connaissant un côté, l'angle opposé et la somme ou la différence des deux autres côtés.

93. — Résoudre un triangle connaissant un côté, un angle adjacent et la somme ou la différence des deux autres côtés.

94. — Résoudre un triangle connaissant la surface (ou le périmètre) et les rayons des cercles inscrit et circonscrit.

95. — Résoudre un triangle connaissant les médianes.

96. — Hauteur d'une tour dont le pied est accessible. — Si on a fait une erreur de 1' dans l'évaluation de l'angle de visée, quelle est l'erreur qui en résulte pour la hauteur cherchée et comment varie-t-elle avec l'angle de visée ?

97. — Rayon d'une enceinte circulaire inaccessible et dont le centre est invisible.

QUESTIONS PROPOSÉES

469. — Dans un triangle quelconque ABC, on mène les trois médianes AA_1, BB_1, CC_1, et les perpendiculaires aux milieux des côtés OA_1, OB_1, OC_1 ; puis on prend les milieux des six segments ainsi obtenus : M, N, P, milieux de AA_1, BB_1, CC_1 ; M', N', P', milieux de OA_1, OB_1, OC_1. Démontrer que l'on a

$$MM' = NN' = PP' = \frac{R}{2},$$

R désignant le rayon du cercle circonscrit ; que MM', NN', PP' concourent en un point K qui est leur milieu, et que par suite les six points sont sur un cercle de rayon $\frac{R}{4}$. Enfin montrer que le point K est situé sur la droite qui joint le centre du cercle circonscrit au centre de gravité G, entre ces deux points, et que l'on a $3KG = OG$.

V. Philippe, lycée Charlemagne.

470. — On considère toutes les coniques ayant des directions asymptotiques et un foyer donnés, et on demande :

1° L'enveloppe de la directrice correspondante à ce foyer ;

2° Le lieu du second foyer.

E. Berthelot.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

6e Année. N° 3. Décembre 1895.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

CONSTRUCTION PAR LA RÈGLE ET LE COMPAS

DE L'INTERSECTION DE DEUX QUADRIQUES DE RÉVOLUTION DONT LES AXES SE RENCONTRENT

Par M. **L. Lefèvre**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Lille.

On coupe les deux surfaces par des sphères ayant pour centre commun le point de rencontre ω des deux axes de révolution ωX, ωX_1. Chaque sphère donnant dans l'une des deux quadriques deux parallèles P et Q, la détermination de ces deux parallèles doit pouvoir se faire à l'aide de la règle et du compas. On peut faire aussi la même remarque à l'égard des asymptotes de la projection de l'intersection sur le plan des axes : cette projection se réduit, comme on le sait, à une conique.

Etudions ce qui se passe pour l'une des deux quadriques. Rapportons la méridienne à ses axes, OX étant l'axe de révolution : $\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}-1=0$ sera son équation. Le centre ω des sphères auxiliaires est un point de OX, soit x_0 son abscisse. Le grand cercle d'une sphère auxiliaire contenu dans le plan des axes, que nous prenons par exemple comme plan vertical de projection, aura pour équation

$$x^2+y^2-2x_0x+\gamma=0.$$

Les plans des parallèles communs à ces deux surfaces sont des plans debout dont les traces P, Q s'obtiennent en éliminant y^2 entre les deux équations précédentes, ce qui donne

$$(1)\qquad (\alpha-\beta)x^2-2\alpha x_0x+\alpha(\beta+\gamma)=0.$$

Soient p, q les points de OX ayant pour abscisses les racines de cette équation ; il suffit de les déterminer ou encore de construire le cercle de diamètre pq dont l'équation est

$$(\alpha-\beta)(x^2+y^2)-2\alpha x_0x+\alpha(\beta+\gamma)=0.$$

Son centre est *un point fixe* ω' dont l'abscisse est

$$(2)\qquad x=\frac{\alpha}{\alpha-\beta}x_0\,;$$

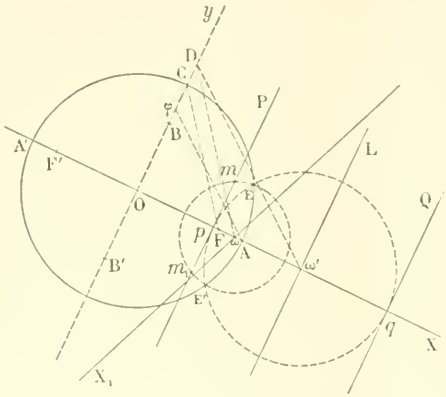
en outre *il coupe le cercle* ω *aux mêmes points réels ou imaginaires que le cercle homographique de rayon* $\sqrt{\alpha}$, ce qui achève de le déterminer. — Si en effet nous éliminons γ entre les équations des deux cercles ω et ω', il vient

$$x^2+y^2-\alpha=0.$$

Le plan L perpendiculaire à OX au point ω' est évidemment le plan de contact de la sphère limite inscrite ω réelle ou imaginaire.

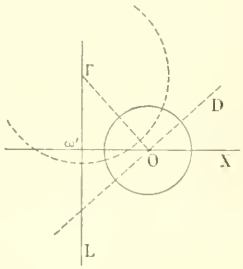
Il faut d'abord construire le point ω'. — Supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'un ellipsoïde allongé déterminé par les axes $AA'=2a$, $BB'=2b$ de sa méridienne. Soit $FF'=2c$ la distance focale. La relation (2) prend la forme $\frac{x}{x_0}=\frac{a^2}{c^2}$. On peut par exemple employer la construction simple que voici :

Décrivons le cercle homographique de diamètre AA', puis portons $O\varphi = OF = c$. Traçons les droites FC et $A\varphi$; si par ω on mène ωD parallèle à FC, puis $D\omega'$, parallèle à $A\varphi$, on a ω'. — Soit alors une sphère auxiliaire quelconque de centre ω; elle coupe le cercle homographique en deux points E, E', et il suffit de tracer le cercle de centre ω' passant en E pour avoir les points p et q.



Mais il peut arriver que le rayon de la sphère ω variant, les points E, E' deviennent imaginaires. On peut alors, suivant les cas, employer des constructions fondées sur cette remarque que les trois cercles O, ω, ω' ont toujours même axe radical. Par exemple, on trace un cercle (Γ) fixe, choisi de façon à les couper constamment dans les limites de l'épure. Les trois axes radicaux de ce cercle (Γ) avec chacun des trois cercles concourent à chaque instant. On simplifierait les tracés en prenant le centre de (Γ) sur L.

Cette construction des plans P et Q présente en outre l'avantage, dans le cas où il y a des branches infinies virtuelles en projection verticale, de pouvoir être prolongée indéfiniment.



Enfin on doit remarquer que les points m, m_1 où la droite P coupe le cercle ω sont des points de la méridienne, dont on obtient ainsi une construction régulière.

Pour les autres quadriques de révolution il est bien facile de modifier la construction du point ω'.

Si une seule des deux quadriques est un hyperboloïde à une nappe, comme le cercle homographique de rayon $\sqrt{\alpha}$ est imaginaire, il vaut mieux définir la surface par une de ses génératrices rectilignes. D'ailleurs on peut aussi bien effectuer les constructions précédentes à l'aide d'un cercle (Γ). Si l'on a soin de prendre ce cercle orthogonal au cercle réel $x^2 + y^2 + \alpha = 0$, son axe radical D avec le cercle homographique imaginaire $x^2 + y^2 - \alpha = 0$ sera la perpendiculaire à OΓ élevée en O. Cela est facile à constater.

Cas particuliers. — 1° Lorsque ω coïncide avec le centre O, les constructions sont encore simplifiées.

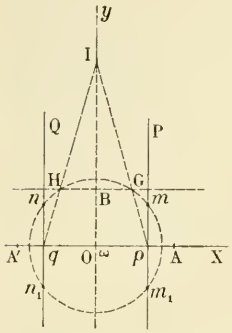
Soit $x^2 + y^2 - \rho^2 = 0$ l'équation d'un cercle ω; l'équation (1) se réduit à

$$(\alpha - \beta)(x^2 + \alpha(\beta - \rho^2)) = 0.$$

Par exemple dans le cas de l'ellipsoïde allongé on en déduit

$$x = \pm \frac{a}{c}\sqrt{\rho^2 - b^2}. \tag{3}$$

Prenons sur Oy $OB = b$ et le *point fixe* I tel que $\frac{IO}{IB} = \frac{a}{c}$.



Soit alors G le point où un cercle ω coupe la tangente en B à l'ellipse méridienne ; la droite IG coupe OX au point p cherché ; m, m_1 et n, n_1 sont des points de la méridienne.

2° Dans le cas d'un *paraboloïde*, le cercle homographique se réduit à la tangente au sommet de la parabole méridienne. Cette tangente sera donc l'axe radical de deux cercles ω, ω' correspondants. Si x_0 est l'abscisse de ω à partir du sommet du côté où s'étend la parabole, $x_0 - p$ sera l'abscisse de ω', p étant le paramètre. On a encore là des constructions fort simples.

Construction des Asymptotes. — On obtient leurs directions en transportant le cône asymptote de la seconde quadrique parallèlement à lui-même, de façon que son sommet coïncide avec le sommet O du premier cône asymptote. On obtient les génératrices communes aux deux cônes en les coupant par une sphère de centre O qui donne dans le premier cône deux parallèles P, Q, dans le second deux parallèles P_1, Q_1, situés dans des plans debout. Et les diagonales ξ, η du parallélogramme formé par les traces verticales de ces plans sont les directions asymptotiques de la projection verticale.

Si l'on a deux hyperboloïdes, il peut y avoir 0, 2 ou 4 asymptotes réelles, dans l'espace, à la courbe du quatrième degré intersection des deux quadriques ; leurs projections verticales sont confondues deux à deux suivant des parallèles à ξ et η.

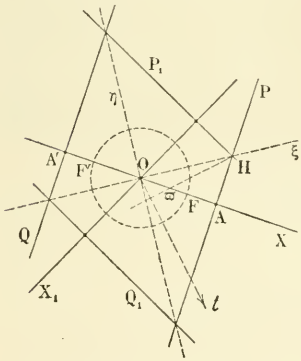
Mais les plans P et Q seraient encore réels dans le cas d'un ellipsoïde allongé. Eliminons en effet y entre les deux équations

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \qquad \text{et} \qquad x^2 + y^2 - \rho^2 = 0;$$

il vient, pour déterminer P et Q, l'équation

$$x = \pm \frac{a}{c}\rho. \tag{4}$$

On peut, pour simplifier, prendre $\rho = c$ dans la première quadrique, d'où $x = \pm a$; on a de suite les plans P et Q. Il faut ensuite couper le deuxième cône asymptote par la même sphère. S'il est réel, cela est immédiat ; si on a un deuxième ellipsoïde allongé, on appliquera la même formule $x_1 = \pm \frac{a_1}{c_1} c$ pour construire P_1 et Q_1. On passe au cas d'un ellipsoïde aplati en permutant a^2 et $b^2 (a > b)$ et changeant c^2 en $-c^2$. Il vient donc $x = \pm \frac{b}{c\sqrt{-1}}\rho$; P et Q sont imaginaires. Cependant si on donne un second ellipsoïde aplati, P_1 et Q_1 sont également imaginaires et les directions asymptotiques ξ, η sont encore réelles. Il suffit en effet de construire les droites réelles P', Q' $x = \pm \frac{b}{c}\rho$, puis P'_1, Q'_1 $x_1 = \pm \frac{b_1}{c_1}\rho$; le parallélogramme réel qu'elles forment a les mêmes diagonales ξ, η que le parallélogramme imaginaire formé par P, Q, P_1, Q_1.



Remarquons, en passant, que les plans debout parallèles à ξ ou η donnent des sections homothétiques dans les deux quadriques.

Enfin pour construire les asymptotes parallèles à ξ, il faut connaître les plans qui touchent chaque

cône le long de la génératrice parallèle à ξ. On observe que, pour le premier cône, la trace verticale du plan tangent est la conjuguée harmonique Ot de ξ par rapport à la section méridienne du cône asymptote. On verrait aisément que cette droite peut s'obtenir en abaissant du point O la perpendiculaire à la droite $H\varpi$ qui joint le point H où ξ coupe P, au pôle ϖ de P relativement au cercle auxiliaire ρ.

On construit de même la droite Ot_1 relative au second cône et on la transporte dans la position initiale ; le reste de la construction est bien connu.

Quant à la nature de la projection verticale, on voit que c'est une *ellipse* quand on associe un ellipsoïde *aplati* à une autre espèce de surface ; c'est une *hyperbole* dans les autres cas.

On obtient une *parabole* quand les directions ξ et η coïncident, ce qui a lieu quand les axes de révolution X, X_1 sont parallèles, et, en particulier, si l'une des quadriques est une sphère.

NOTE SUR LES FONCTIONS CROISSANTES

De même que pour étudier la continuité d'une fonction dans un intervalle (a, b) on peut se placer à deux points de vue un peu différents, et définir directement la continuité dans un intervalle, ou la déduire de la définition de la continuité en un point; de même aussi, pour fixer les caractères d'une fonction croissante dans un intervalle (a, b), on peut adopter indifféremment deux définitions des fonctions croissantes. Nous allons donner ces deux définitions et montrer qu'elles sont équivalentes.

1° On dit qu'une fonction $f(x)$ est *croissante* dans un intervalle (a, b), si pour deux valeurs quelconques de cet intervalle, α et β, on a toujours $f(\alpha) < f(\beta)$, en même temps que $\alpha < \beta$; en d'autres termes, si, pour tout couple de valeurs α et β appartenant à l'intervalle (a, b), le rapport $\dfrac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta}$ est positif.

Cette première définition est généralement admise dans les cours actuels de Mathématiques spéciales, et se prête d'ailleurs très facilement à l'étude des propriétés qui servent de base au problème qui a pour but la recherche des variations d'une fonction.

Voici la seconde définition :

2° On dit qu'une fonction est *croissante* pour une valeur x_0 de la variable, lorsqu'on peut déterminer un nombre η positif et tel que, la fonction donnée $f(x)$ étant définie dans l'intervalle $(x_0 - \eta, x_0 + \eta)$, le rapport $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ soit positif pour toutes les valeurs de h moindres en valeur absolue que η. Cela revient à dire que si l'on fait croître x, la fonction a des valeurs moindres que $f(x_0)$ pour les valeurs de x qui viennent avant x_0 et n'en sont pas trop éloignées, et des valeurs plus grandes, pour les valeurs de x assez voisines de x_0, mais supérieures à ce nombre.

Si une fonction n'est définie que dans un intervalle (a, b), elle sera dite *croissante à droite*, pour $x = a$, si le rapport $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$ est positif pour toutes les valeurs positives de h inférieures à un certain nombre positif; elle sera dite *croissante à gauche*, pour $x = b$, si le rapport $\dfrac{f(b + h) - f(b)}{h}$ est positif pour toutes les valeurs négatives de h moindres en valeur absolue qu'un certain nombre positif.

Il est évident que si une fonction est croissante dans un intervalle (a, b), conformément à la première définition, elle est croissante pour toute valeur de cet intervalle, en particulier, à droite pour $x = a$, à gauche pour $x = b$, conformément à la seconde définition.

Nous allons montrer que, réciproquement, si une fonction $f(x)$, bien définie dans un intervalle (a, b), est croissante, d'après la seconde définition, pour toute valeur de l'intervalle, et, en particulier,

à droite pour $x = a$, à gauche pour $x = b$, elle est croissante dans l'intervalle (a, b), au premier sens du mot.

En effet, si cela n'était pas, il y aurait dans l'intervalle un couple de valeurs, α et β, telles que α étant plus petit que β, on ait $f(\alpha) > f(\beta)$. Admettons ce point et divisons l'intervalle (α, β) en deux parties égales, (α, γ) et (γ, β); nous aurons nécessairement $f(\gamma) < f(\alpha)$ ou $f(\gamma) > f(\beta)$, et peut-être à la fois les deux inégalités; de toutes façons, nous avons un nouvel intervalle (α_1, β_1) tel que $\alpha_1 \geqslant \alpha$, $\beta_1 \leqslant \beta$, $\beta_1 - \alpha_1 = \frac{\beta - \alpha}{2}$ et $f(\alpha_1) > f(\beta_1)$; de celui-ci nous déduirons de même un nouvel intervalle (α_2, β_2), compris dans le précédent, tel que $\alpha_2 \geqslant \alpha_1$, $\beta_2 \leqslant \beta_1$, $\beta_2 - \alpha_2 = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{2} = \frac{\beta - \alpha}{2^2}$ et $f(\alpha_2) > f(\beta_2)$; et ainsi de suite : nous formons ainsi deux suites,

$$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots,$$
$$\beta, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots,$$

la première croissante et ayant tous ses termes moindres que ceux de la seconde, la seconde décroissante et ayant tous ses termes supérieurs à ceux de la première; chacune de ces suites a donc une limite contenue dans l'intervalle (a, b) et ces deux limites sont égales, car $\beta_n - \alpha_n = \frac{\beta - \alpha}{2^n}$, et ce nombre tend vers 0.

La contradiction est alors manifeste; car soit X la limite commune des deux suites; en ce point, d'après notre première hypothèse, la fonction est croissante, et il y a un nombre η tel que si on prend deux nombres quelconques X′ et X″, respectivement dans les intervalles $(X - \eta, X)$, $(X, X + \eta)$, on a toujours $f(X') < f(X) < f(X'')$; mais la seconde hypothèse nous a entraîné à former les deux suites α_n et β_n qui ont pour limite commune X, et lorsque n est assez grand les deux nombres α_n et β_n tombent respectivement dans les intervalles $(X - \eta, X)$, $(X, X + \eta)$; comme d'ailleurs on a toujours $f(\alpha_n) > f(\beta_n)$, il y a désaccord évident avec ce que nous avons dit plus haut. Si $X = a$, on a, d'une part, $f(a) < f(\beta_n)$; d'autre part, $f(a) > f(\beta_n)$. Si $X = b$, on a, d'une part, $f(\alpha_n) < f(b)$; d'autre part, $f(\alpha_n) > f(b)$. La contradiction est tout aussi évidente.

Dans le premier chapitre de son second volume sur l'analyse infinitésimale, M. Méray propose une définition très voisine de la seconde : il dit qu'une fonction est croissante pour $x = x_0$, si l'accroissement de cette fonction, $f(x_0 + h) - f(x_0)$, est positif pour les valeurs positives de h inférieures à un certain nombre; cette définition se confond avec celle que nous avons donnée pour les fonctions croissantes à droite de $x = x_0$; elle a le léger inconvénient de ne pas séparer *a priori* les valeurs particulières pour lesquelles la fonction est minima de celles pour lesquelles elle est véritablement croissante; mais cette séparation est très commode. D'ailleurs, en nous appuyant sur la définition adoptée par l'illustre géomètre, il nous serait très facile de montrer que si une fonction est croissante, dans ce sens, pour toutes les valeurs d'un intervalle (a, b), elle est croissante dans l'intervalle (a, b), au premier sens du mot. La démonstration est semblable à la précédente.

E. H.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1895

Mathématiques.

Solutions par M. H. **Hublot**, élève du lycée Saint-Louis (1er Prix).

422. — *On considère l'équation*

$$(ax^2 + bx + c)\frac{d^2y}{dx^2} + 2(\lambda x + \mu)\frac{dy}{dx} + ky = 0.$$

1° *Les constantes réelles* a, b, c, λ, μ *étant données, on demande de prouver que l'on peut choisir la*

constante k de manière que l'équation précédente soit vérifiée par un polynome $y = f(x)$ de degré donné n.

2° *On suppose ensuite que le trinome*

$$ax^2 + bx + c$$

a ses racines a_0, a_1 réelles et distinctes et que, dans la décomposition de $\frac{\lambda x + \mu}{ax^2 + bx + c}$ en fractions simples définie par l'identité

$$\frac{\lambda x + \mu}{ax^2 + bx + c} = \frac{\alpha_0}{x - a_0} + \frac{\alpha_1}{x - a_1},$$

les coefficients α_0, α_1 sont positifs et différents de zéro.

Démontrer que, dans ces conditions, l'équation

$$f(x) = 0$$

a toutes ses racines réelles et comprises entre a_0 et a_1.

On examinera si cette équation peut avoir des racines multiples.

1° S'il existe un polynome y de degré m vérifiant l'équation proposée, tout polynome Ay, A désignant une constante quelconque, vérifiera cette même équation.

Cherchons donc un polynome $f(x)$ de la forme

$$x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}x + A_m.$$

L'équation proposée devient alors

$$(ax^2 + bx + c)[m(m-1)x^{m-2} + \ldots + 2A_{m-2}] + 2(\lambda x + \mu)[mx^{m-1} + \ldots] + k(x^m + \ldots + A_m) = 0,$$

qui doit avoir lieu quel que soit x. En annulant les coefficients des différentes puissances de x au premier membre, nous obtenons les relations suivantes :

$$m(m-1)a + 2\lambda m + k = 0,$$

$$m(m-1)b + (m-1)(m-2)aA_1 + 2\mu m + 2\lambda(m-1)A_1 + kA_1 = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

qui sont évidemment résolubles par rapport aux quantités k, A_1, A_2, ..., A_m, en écartant certaines valeurs particulières pour les constantes a, b, c, λ, μ, m.

2° Soient $x_1, x_2, \ldots, x_m$ les m racines de y, et supposons d'abord toutes ces racines distinctes et différentes de a_0, a_1. Cherchons ce que devient la relation proposée lorsque nous donnons à x pour valeur l'une des racines de y, la racine x_k. Cette relation peut s'écrire

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy}{dx}} + 2\left(\frac{\alpha_0}{x - a_0} + \frac{\alpha_1}{x - a_1}\right) + \frac{ky}{(ax^2 + bx + c)\frac{dy}{dx}} = 0.$$

Or on sait que

$$y = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_m);$$

si donc on pose

$$\varphi(x) = (x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_m),$$

on peut écrire

$$y = (x - x_k)\varphi(x),$$

et l'on a, par suite,

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x) + (x - x_k)\varphi'(x),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\varphi'(x) + (x - x_k)\varphi''(x).$$

Pour $x = x_k$ le premier membre de l'équation se réduit à

$$2\frac{\varphi'(x_k)}{\varphi(x_k)} + 2\left(\frac{\alpha_0}{x_k - a_0} + \frac{\alpha_1}{x_k - a_1}\right).$$

Or, d'après une formule connue,

$$\frac{\varphi'(x_k)}{\varphi(x_k)} = \frac{1}{x_k - x_1} + \cdots + \frac{1}{x_k - x_m}.$$

Donc x_k étant une racine quelconque de y, $x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_m$, les $m-1$ autres, nous devons avoir la relation

$$(1) \qquad \frac{1}{x_k - x_1} + \cdots + \frac{1}{x_k - x_m} + \frac{\alpha_0}{x_k - a_0} + \frac{\alpha_1}{x_k - a_1} = 0.$$

Nous allons montrer que tous ces nombres $x_1, \ldots, x_m$ sont réels.

En effet, soient $x_1 = p_1 + iq_1$, $x_2 = p_2 + iq_2, \ldots, x_m = p_m + iq_m$. Si tous les nombres q n'étaient pas nuls, il y en aurait un plus grand que tous les autres ; soit q_k ce nombre. Il est visible alors que l'égalité

$$\frac{1}{p_k - p_1 + i(q_k - q_1)} + \cdots + \frac{1}{p_k - p_m + i(q_k - q_m)} + \frac{\alpha_0}{p_k - a_0 + iq_k} + \frac{\alpha_1}{p_k - a_1 + iq_k} = 0$$

est impossible. En effet, il suffit de former le coefficient de i au premier membre : en vertu des hypothèses faites, il se présentera sous la forme d'une somme de quantités toutes négatives ; l'égalité est donc impossible si tous les nombres q ne sont pas nuls.

Je dis maintenant que toutes ces racines sont comprises entre a_0 et a_1. Soit x_k la plus grande et $a_0 < a_1$; x_k est plus petit que a_1 ; car s'il était plus grand, le premier membre de l'égalité (1) serait une somme de quantités toutes positives, et l'équation ne saurait être vérifiée. Toutes les racines sont donc plus petites que a_1. Par un raisonnement analogue, on ferait voir qu'elles sont toutes plus grandes que a_0.

Nous avons supposé jusqu'ici qu'aucun des nombres $x_1, \ldots, x_m$ n'est racine du trinome. Si l'un d'eux, x_k, par exemple, annulait $ax^2 + bx + c$, en vertu de l'hypothèse $\alpha_0, \alpha_1 \neq 0$ ce serait aussi une racine de $\frac{dy}{dx}$ et, par conséquent, au moins une racine double de y.

Examinons le cas des racines multiples.

Soit x_k une racine d'ordre p de y ; c'est une racine d'ordre $p-1$ de $\frac{dy}{dx}$ et d'ordre $p-2$ de $\frac{d^2y}{dx^2}$. Le premier membre de l'équation contient donc déjà le facteur $(x - x_k)^{p-2}$. Supprimons-le ; nous voyons alors que $x - x_k$ qui est encore en facteur dans les quotients de y et de $\frac{dy}{dx}$ par $(x - x_k)^{p-2}$ sans l'être dans celui de $\frac{d^2y}{dx^2}$, doit l'être dans $ax^2 + bx + c$, c'est-à-dire que x_k est l'un des nombres a_0, a_1. L'équation proposée ne peut donc admettre comme racines multiples que les nombres a_0 et a_1.

---

423. — *On donne une courbe du troisième degré* C_3 *définie par les équations*

$$x = 6\lambda^2\mu, \qquad y = 6\lambda\mu^2, \qquad z = \lambda^3 + \mu^3,$$

où λ *et* μ *désignent deux variables indépendantes que, pour abréger, nous appellerons les coordonnées du point* a *de la courbe* C_3.

1° *Trouver la relation qui doit lier les coordonnées de trois points* a_1, a_2, a_3 *de la courbe* C_3 *pour que ces points soient en ligne droite.*

2° *Trouver la relation qui doit lier les coordonnées de six points* $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ *de cette courbe pour que ces points soient sur une conique.*

Déduire de là la condition nécessaire et suffisante pour que, par trois points a_1, a_2, a_3 *de la courbe* C_3, *on puisse faire passer une conique* C_2 *touchant* C_3 *aux points* a_1, a_2, a_3.

Les côtés du triangle $a_1a_2a_3$ coupent C_3 en des points b_1, b_2, b_3 situés sur une droite D.

Les droites qui touchent la courbe C_3 aux points a_1, a_2, a_3 la coupent en des points c_1, c_2, c_3 situés sur une droite Δ.

La droite D étant donnée, quel est le nombre des coniques C_2 qui lui correspondent ?

La droite Δ étant donnée, quel est le nombre des coniques C_2 qui lui correspondent ?

1° L'équation aux $\frac{\lambda}{\mu}$ des points de rencontre de la cubique C_3 et d'une droite quelconque,

$$ux + vy + wz = 0$$

est

$$6u\lambda^2\mu + 6v\lambda\mu^2 + w(\lambda^3 + \mu^3) = 0.$$

Soient (λ_1, μ_1), (λ_2, μ_2), (λ_3, μ_3) les coordonnées des trois points de rencontre; ce sont les solutions de l'équation précédente. Le produit des racines montre que la relation qui doit lier les coordonnées de trois points de C_3 pour que ces trois points soient en ligne droite est

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \mu_1\mu_2\mu_3 = 0.$$

2° Par un raisonnement analogue, nous trouvons que la condition pour que six points a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 de C_3, de coordonnées (λ_1, μ_1), ..., (λ_6, μ_6), soient sur une conique est

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6 = \mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\mu_5\mu_6.$$

De là on déduit immédiatement que la condition pour que par les trois points a_1, a_2, a_3 de C_3 on puisse faire passer une conique C_2 touchant C_3 aux points a_1, a_2, a_3 est

$$\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 = \mu_1^2\mu_2^2\mu_3^2,$$

relation qui se décompose en deux :

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \mu_1\mu_2\mu_3,$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -\mu_1\mu_2\mu_3.$$

Cette dernière relation doit être rejetée : elle exprime en effet que les trois points sont en ligne droite. La condition cherchée est donc

$$(1) \qquad \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \mu_1\mu_2\mu_3.$$

Les côtés du triangle a_1, a_2, a_3 coupent C_3 en des points b_1, b_2, b_3 ; soient (m_1, n_1), (m_2, n_2), (m_3, n_3) leurs coordonnées. Ces quantités satisfont aux trois relations

$$(2) \qquad \begin{cases} \lambda_1\lambda_2 m_3 = -\mu_1\mu_2 n_3, \\ \lambda_2\lambda_3 m_1 = -\mu_2\mu_3 n_1, \\ \lambda_3\lambda_1 m_2 = -\mu_3\mu_1 n_2. \end{cases}$$

En les multipliant membre à membre et tenant compte de (1), nous obtenons la nouvelle relation

$$m_1m_2m_3 = -n_1n_2n_3,$$

qui montre que les trois points b_1, b_2, b_3 sont en ligne droite ; soit D cette droite.

Les tangentes en a_1, a_2, a_3 à C_3 coupent la cubique aux nouveaux points c_1, c_2, c_3 ; soient (p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3) leurs coordonnées ; j'ai les relations

$$(3) \qquad \begin{cases} \lambda_1^2 p_1 = -\mu_1^2 q_1, \\ \lambda_2^2 p_2 = -\mu_2^2 q_2, \\ \lambda_3^2 p_3 = -\mu_3^2 q_3. \end{cases}$$

Par un raisonnement analogue au précédent, j'en déduis que ces trois points c_1, c_2, c_3 sont sur une droite Δ.

La droite D étant donnée, cherchons quel est le nombre des coniques C_2 qui lui correspondent. Se donner D, c'est se donner les coordonnées (m_1, n_1), (m_2, n_2), (m_3, n_3) de ses trois points de rencontre, b_1, b_2, b_3 avec C_3. Déterminons les coniques C_2 par les groupes de points a_1, a_2, a_3. Pour cela, nous avons à résoudre le système (2) par rapport à

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1}, \qquad \frac{\lambda_2}{\mu_2}, \qquad \frac{\lambda_3}{\mu_3}.$$

En combinant ces équations et tenant compte de

$$m_1 m_2 m_3 = -n_1 n_2 n_3,$$

on arrive aux nouvelles équations

$$\lambda_1^2 n_1^2 = \mu_1^2 m_1^2, \qquad \lambda_2^2 n_2^2 = \mu_2^2 m_2^2, \qquad \lambda_3^2 n_3^2 = \mu_3^2 m_3^2,$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$\lambda_1 n_1 = \pm \mu_1 m_1, \qquad \lambda_2 n_2 = \pm \mu_2 m_2, \qquad \lambda_3 n_3 = \pm \mu_3 m_3.$$

Nous devons rejeter les solutions qui correspondent au signe $+$; car les points cherchés doivent être différents des points donnés b_1, b_2, b_3. Donc à une droite D ne correspond qu'une seule conique C_2.

Cherchons maintenant les coniques qui correspondent à la droite Δ; pour cela, nous avons à résoudre le système (3), ce qui donne immédiatement :

$$\lambda_1\sqrt{p_1} = \mu_1\sqrt{-q_1}, \qquad \lambda_2\sqrt{p_2} = \mu_2\sqrt{-q_2}, \qquad \lambda_3\sqrt{p_3} = \mu_3\sqrt{-q_3};$$

mais nous savons que pour avoir une véritable conique il faut $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \mu_1\mu_2\mu_3$ et non $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -\mu_1\mu_2\mu_3$. Ceci va nous permettre de choisir les signes ambigus des radicaux.

Je puis toujours supposer que les radicaux du premier membre sont pris avec le signe $+$; il faut alors que le produit des radicaux du second membre soit positif, ce qui donne quatre combinaisons de signes acceptables. Donc à une droite Δ, il correspond quatre coniques.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (Concours de 1891).

Physique.

102. — *Dans une boîte rectangulaire de 4 décimètres de longueur, une face est formée par une glace dépolie carrée de 1 décimètre de côté ; au centre de la face opposée est percé un petit trou circulaire. On met, à égale distance du trou et de la glace, un dessin transparent dont l'ombre se forme sur la glace quand on expose le trou en face d'un mur blanc vivement éclairé.*

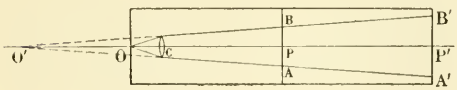
On demande quels changements seront produits dans l'éclairement et dans les dimensions de l'ombre par l'introduction d'une lentille achromatique convergente sur l'axe de la boîte, dans l'une des positions suivantes :

1° Entre le dessin et le trou ;

2° Entre le trou et le mur.

Le diamètre de la lentille est égal à un cinquième de décimètre, et sa distance focale à un décimètre.

Première position. — Dimension de l'ombre. — La lentille C a pour effet de substituer au petit trou O son image O'. Soit AB la partie du dessin P que rencontrent les rayons réfractés, A'B' son ombre sur la glace dépolie P' ; appelons y et y' leurs diamètres respectifs, f la distance focale de la lentille et x la distance de cette lentille au point O.



On a

$$\frac{y'}{y} = \frac{P'O'}{PO},$$

ou bien, en remarquant que, d'après les données, $PO = 2f$ et $P'O = 4f$,

$$\frac{y'}{y} = \frac{CO' + 4f - x}{CO' + 2f - x}.$$

L'équation aux distances conjuguées permet d'exprimer CO' en fonction de x :

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{CO'} = \frac{1}{f};$$

on en déduit
$$\frac{y}{y'} = \frac{(2f - x)^2}{f^2 + (f - x)^2},$$
expression qui diminue depuis la valeur 2, pour $x = 0$, jusqu'à la valeur 0, pour $x = 2f$, en passant par la valeur 1, pour $x = f$, tous cas particuliers évidents *a priori*.

Eclairement. — Appelons e l'éclairement cherché, d le diamètre de la lentille et I la quantité de lumière envoyée par le trou sur une surface égale à l'unité et située à l'unité de distance, ou, en d'autres termes, son *intensité lumineuse*; cette intensité est égale au produit de la section de l'ouverture par l'éclat du mur, que nous désignerons par k.

Faisons abstraction des pertes de lumière par réflexion, et exprimons que la quantité de lumière reçue et réfractée par la lentille produit un éclairement e sur une surface de diamètre y' :
$$\frac{Id^2}{x^2} = ey'^2.$$
Ceci peut s'écrire
$$e = \frac{I}{x^2}\,\frac{y^2}{y'^2}\,\frac{d^2}{y^2}.$$
Le rapport $\frac{d}{y}$ s'exprime aisément en fonction de CO, et il vient finalement
$$e = \frac{If^2}{(2f - x)^4},$$
expression qui augmente depuis la valeur $\frac{I}{(4f)^2}$, pour $x = 0$, jusqu'à l'infini pour $x = 2f$.

Mais, dans le voisinage de cette dernière position, il n'est plus possible de faire abstraction du diamètre de l'ouverture, car l'image de cette ouverture se trouve alors dans le voisinage du point P'. Le problème donne lieu, dans ce cas, à une discussion semblable à celle de la question 386 (voir le numéro d'avril 1895), et l'on trouve, pour l'éclairement, l'expression
$$e' = k\,\frac{\pi d^4}{4}\,\frac{1}{(4f - x)^2}$$
qui, pour $x = 2f$, devient
$$e' = k\,\frac{\pi}{16}\,\frac{d^2}{f^2} = k\,\frac{\pi}{100}.$$
En dehors de ce cas limite, le diamètre de la lentille n'intervient que pour limiter la partie du dessin dont elle modifie l'ombre par son interposition.

Seconde position. — En dehors de la boîte, la lentille n'a plus aucune influence sur les dimensions de l'ombre : cela est évident. Elle n'en a pas davantage sur l'éclairement : cela résulte de la discussion de la question 386. C. R.

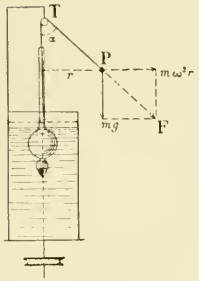
103. — *Une éprouvette cylindrique pleine d'eau peut tourner d'un mouvement uniforme autour de son axe de figure supposé vertical ; une potence liée à l'éprouvette supporte sans frottement une poulie de dimensions négligeables, placée exactement sur l'axe de rotation. Un poids* P (25 *grammes*) *est attaché à un bout d'un fil non pesant qui passe sur la poulie et vient s'attacher par l'autre bout à un aréomètre dont la tige a une section d'un centimètre carré. Section droite de l'éprouvette :* 10 *centimètres carrés.*

Au repos, lorsque l'équilibre est établi, la partie du fil comprise entre la poulie et le poids P *a une longueur* $l = 30$ *centimètres.*

Quel est le déplacement vertical de l'aréomètre quand tout l'appareil tourne avec une vitesse angulaire ω, *ce qui projette le poids* P *latéralement ?*

On admet que l'aréomètre reste exactement centré et que la surface libre de l'eau reste horizontale.

$g = 980$ (C. G. S.).



Soient, d'une manière générale,

m la masse du poids P,
s la section de la tige de l'aréomètre,
S la section de l'éprouvette,
μ la masse spécifique du liquide,
x le déplacement vertical de l'aréomètre,
α l'angle d'écart du fil,
r la distance du poids P à l'axe de rotation.

Condition d'équilibre. — La tension du fil, T, doit faire équilibre à la résultante F du poids mg et de la force fictive centrifuge $m\omega^2 r$:

$$F = T.$$

Or, d'une part, on a

$$\frac{F}{m\omega^2 r} = \frac{l+x}{r},$$

$$F = m(l+x)\omega^2.$$

D'autre part T est égal au poids apparent initial de l'instrument, mg, augmenté de la perte de poussée qui résulte du déplacement vertical :

$$T = mg + x\frac{S}{S-s}s\mu g.$$

Posons $\frac{S}{S-s}s\mu = A$ et remplaçons F et T par leurs valeurs dans la première équation ; il vient

$$l + x = \frac{Al - m}{Ag - m\omega^2}g \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{m(g - \omega^2 l)}{m\omega^2 - Ag}.$$

Angle d'écart. — On a

$$\cos\alpha = \frac{mg}{F} = \frac{g}{(l+x)\omega^2} = \frac{Ag - m\omega^2}{(Al - m)\omega^2}.$$

Cette expression doit être positive et inférieure à l'unité, ce qui conduit à considérer deux cas :

1° $m > Al$ l'expression est positive si . . . . . $\omega^2 > \frac{Ag}{m}$.

— inférieure à l'unité . . . . . $\omega^2 < \frac{g}{l}$.

2° $m < Al$ l'expression est inférieure à l'unité si . . . . . $\omega^2 > \frac{g}{l}$.

— positive — . . . . . $\omega^2 < \frac{Ag}{m}$.

On trouve les mêmes limites en exprimant que x et $l + x$ doivent être positifs.

Quand la vitesse de rotation est inférieure à la plus petite des deux limites, le fil reste vertical, et rien n'est changé ; quand elle est supérieure à la plus grande, l'appareil s'échappe.

Condition de stabilité. — Si on augmente un peu la longueur x, les forces doivent tendre à ramener l'instrument vers sa position d'équilibre, ce qui exige que T augmente plus vite que F :

$$Agdx > m\omega^2 dx,$$

ou bien

$$\omega^2 < \frac{Ag}{m}.$$

L'équilibre ne peut donc être stable que dans le second des cas examinés ci-dessus.

Application numérique. — Les données numériques correspondent à ce second cas. Le poids s'écarte et l'aréomètre se soulève à partir de la vitesse

$$\omega^2 = \frac{980}{30}.$$

ce qui correspond à une fraction de tour par seconde égale à 0,91 ; l'appareil s'échappe pour la vitesse

$$\omega^2 = \frac{10}{9} \times \frac{980}{25},$$

ce qui fait 1,05 tour par seconde, limite bien rapprochée de la première. C. R.

CONCOURS DE 1895 (*Suite*).

BOURSES D'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

Bourses de licence ès sciences mathématiques.

471. — I. — On considère, dans le plan, la droite (U) définie par l'équation

$$(1) \qquad u^3(x - a) + 3ux - 2y = 0,$$

où a est une quantité fixe, et u un paramètre variable.

Cette droite, quand u varie, enveloppe une courbe (C) dont on formera l'équation. La droite (U) touche la courbe (C) en un point A et la coupe en un point B; on calculera les coordonnées de ces points en fonction de u, et l'on montrera que les coordonnées de B se déduisent des coordonnées de A en y changeant u en $-\frac{u}{2}$.

II. — Parmi les droites (U), on considère la droite particulière (V) dont on obtient l'équation en supposant $u = 1$ dans l'équation (1). Par chaque point P de (V), on peut mener deux tangentes à la courbe (C), autres que (V) : soient Q, Q′ les deux points de contact; on demande, connaissant l'abscisse du point P, de former l'équation de la droite QQ′, de déterminer la courbe (E) enveloppée par cette droite quand le point P décrit la droite (V), enfin de limiter la portion de (E) que touchent les droites QQ′ qui joignent des points *réels* Q, Q′.

Bourses de licence ès sciences physiques.

Physique.

I. — Établir, d'après les lois de la dynamique, la formule qui donne la durée d'oscillation d'un pendule simple écarté très peu de sa position d'équilibre.

II. — **472.** — Deux traits parallèles A et B, distants de $0^{mm},1$, sont regardés à travers un microscope composé à oculaire positif. Dans le plan vu nettement par cet oculaire peut être déplacé un fil de réticule au moyen d'une vis micrométrique. On amène successivement ce fil en coïncidence avec les images a et b des traits A et B, et on trouve qu'il faut pour passer d'une position à l'autre déplacer ce fil de $1^{mm},9$.

Après avoir allongé de 5^{cm} la longueur du tube du microscope, on met de nouveau au point les deux traits A et B, et l'on répète la même opération : le déplacement du fil du réticule pour passer de l'image a à l'image b est trouvé égal à $2^{mm},4$.

La distance du plan des deux traits A et B au plan ab du fil du réticule est dans ce dernier cas égale à $26^{cm},35$.

On demande :

1° Quelle est la distance focale de l'objectif;

2° Quelle est la distance des deux plans principaux de cet objectif;

3° Si l'oculaire employé a une puissance de 30 dioptries, quelle est en dioptries la puissance du microscope composé pour la dernière longueur du tube.

Chimie.

Préciser les circonstances dans lesquelles l'hydrogène entre en combinaison avec les divers métalloïdes.

Donner la composition en volumes de chacun des composés ainsi formés, en indiquant brièvement comment cette composition peut être déterminée.

QUESTIONS PROPOSÉES

473. — On considère l'expression

$$\frac{y(x+1)^m - x(y+1)^m + (x-y)}{xy(x-y)}.$$

1° Montrer que le numérateur est divisible par le dénominateur.

2° Trouver la limite du quotient pour $x = y = 0$.

3° Plus généralement, trouver le polynome en x qui représente ce quotient quand on fait $y = x$.

CH. B.

474. — Une conique variable passe par deux points fixes A et B et rencontre une conique fixe en deux points fixes C et D et deux points variables M et N.

1° Trouver l'enveloppe de la droite MN.

2° Par les quatre points C, D, M, N et un cinquième point fixe E, on fait passer une conique Γ ; montrer que cette conique passe encore par un point fixe F.

3° Trouver le lieu des pôles de CD par rapport à la conique Γ.

4° Lieu du point F quand le point E décrit une droite donnée. E. BERTHELOT.

475. — Une tangente quelconque à une hypocycloïde à trois rebroussements rencontre la courbe en deux points autres que le point de contact. Démontrer que les tangentes à la courbe en ces deux points sont rectangulaires. A. GOULARD, professeur au lycée de Marseille.

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE CENTRALE (Première session de 1895).

Physique.

438. — *On forme, avec une balance juste, un baroscope. Soient* P *et* p *les poids réels,* V *et* v *les volumes des deux sphères à* t^0 *; la balance étant fermée et pleine d'air sec à la température* t^0 *et sous la pression* H, *l'équilibre existe.*

Montrer comment :

1° *A température constante l'appareil peut servir de manomètre, puisque la tangente de l'angle d'inclinaison du fléau est proportionnelle à la variation de pression ;*

2° *A pression et à température constantes l'appareil peut servir d'hygromètre ; il suffit, en effet, pour pouvoir calculer l'état hygrométrique* e *d'un lieu, d'ouvrir la balance pour donner libre accès à l'air humide et de déterminer les poids* ϖ *nécessaires pour ramener l'équilibre.*

3° *Calculer, dans ce deuxième cas, l'état hygrométrique* e *correspondant aux données numériques suivantes :*

$$d = \frac{5}{8}\ (\text{vap. d'eau}), \qquad V = 1835^{cc},2, \qquad t = 27^{\circ}, \qquad a = 0^{gr},001293,$$

$$\varpi = 0^{gr},0253, \qquad v = 3^{cc}, \qquad F_t = 26^{mm},5, \qquad \alpha = 0,00366.$$

Soit a_1 le poids spécifique de l'air correspondant à l'équilibre primitif, et a_2 le poids spécifique correspondant à un second état du milieu ambiant. Le changement produit du côté de la grosse boule une surcharge

$$\varpi = (V - v)(a_1 - a_2).$$

1° S'il y a eu seulement variation de pression, on a

$$\varpi = (V - v)a\,\frac{H_1 - H_2}{760}\,\frac{1}{1 + \alpha t}.$$

2° S'il y a eu seulement passage de l'état de sécheresse à l'état d'humidité, il vient

$$\varpi = (V - v)a(1 - d)e\,\frac{F}{760}\,\frac{1}{1 + \alpha t}.$$

3° L'introduction des données numériques dans cette dernière formule conduit à la valeur

$$v = 0,897.$$

(La question a été résolue par M. Mario Guesde.)

Chimie.

439. — *Dans un ballon analogue à celui de Lavoisier, on chauffe* 10^{lit} *d'un mélange d'oxygène et d'azote avec* 100^{gr} *de mercure. On arrête l'expérience quand l'absorption de l'oxygène est terminée (on la suppose complète).*

Après refroidissement, on verse un excès d'acide sulfurique concentré ; on chauffe jusqu'à dissolution complète et on recueille le gaz qui se dégage sur la cuve à mercure ; on le mesure et on trouve $6^{lit},968$. *On demande : 1° La nature du gaz recueilli ; 2° La composition centésimale, en volumes, du mélange d'oxygène et d'azote contenu dans le ballon.*

Les gaz seront supposés secs et dans les conditions normales de température et de pression.

$$\delta = 0,0695, \qquad H = 1, \qquad O = 16, \qquad S = 32, \qquad Hg = 200.$$

Les V litres d'oxygène que renferme le mélange ont un poids

$$p = V \times 16 \times 0,0695 \times 1,293.$$

Cet oxygène oxyde un poids de mercure

$$\frac{p}{16} \times 200.$$

Il reste donc un poids de mercure

$$100 - \frac{p}{16} \times 200$$

pour donner avec l'acide sulfurique la réaction connue

$$Hg + 2(SO^4H^2) = SO^4Hg + 2(H^2O) + SO^2.$$

Il en résulte un poids de gaz sulfureux

$$\frac{64}{200}\left(100 - \frac{p}{16} \times 200\right)$$

dont le volume V′ est le même, du moins on doit l'admettre, que celui de l'oxygène qu'il renferme, ce qui fournit l'équation

$$V \times 16 \times 0,0695 \times 1,293 = \frac{32}{200}\left(100 - \frac{p}{16} \times 200\right),$$

d'où l'on tire, en remplaçant p par sa valeur,

$$V' = 11,128 - 2V.$$

On peut encore arriver à ce résultat en remarquant que les 100^{gr} de mercure, attaqués par l'acide sulfurique, produiraient juste une demi-molécule, ou $11^{lit},128$ de gaz sulfureux. Or l'oxygène du mélange a oxydé une quantité de mercure capable de fournir un volume double de gaz sulfureux ; il ne se produira donc finalement que $11^{lit},128 - 2V$ de ce gaz.

Admettons maintenant que les $6^{lit},968$ dont il est question dans l'énoncé représentent exclusivement le gaz sulfureux : on aura

$$11,128 - 2V = 6,968 \qquad \text{ou} \qquad V = 2,08.$$

Le mélange primitif renferme donc 20,8 d'oxygène pour 79,2 d'azote : c'est de l'air atmosphérique.

(La question a été résolue par M. Mario Guesde.)

Géométrie analytique.

440. — *On donne deux axes rectangulaires* Ox *et* Oy, *sur l'axe des* x *un point* A *d'abscisse* $x = p$, *sur l'axe des* y *un point* B *d'ordonnée* $y = q$. *Écrire l'équation générale des coniques passant par le*

point A, tangentes à l'axe des y en B et admettant pour diamètre conjugué de Oy une droite dont le coefficient angulaire est m.

1° *Faisant varier m, on cherchera le lieu des centres des hyperboles équilatères qui font partie du faisceau de coniques représentées par l'équation générale, et le lieu du point de rencontre du diamètre conjugué de Oy dans ces hyperboles avec leur tangente en A. On distinguera sur ces deux lieux les régions qui répondent à des hyperboles pour lesquelles les points A et B sont sur une même branche, de celles sur lesquelles ces points sont sur des branches différentes.*

2° *Faisant encore varier m et considérant les paraboles qui font partie du faisceau de coniques représentées par l'équation générale, on démontrera que par un point du plan on peut faire passer trois axes de ces paraboles. On considérera les points du plan pour lesquels un des axes est parallèle à Oy et on cherchera le lieu des points d'intersection des deux paraboles qui correspondent aux axes non parallèles à Oy.*

3° *On formera l'équation de la corde commune AC de ces deux paraboles et on cherchera le lieu de l'intersection d'une parallèle à cette corde menée par l'origine avec les diamètres conjugués de Oy dans ces mêmes paraboles.*

Soit
$$u(x-p)+vy=0$$
l'équation de la tangente en A. L'équation des coniques passant par A et tangentes en B à Oy peut s'écrire
$$2x\,u(x-p)+vy)+(qx+py-pq)^2=0.$$
Pour que le diamètre conjugué de Oy ait pour coefficient angulaire m, on doit avoir
$$p^2m+(v+pq)=0.$$
L'équation générale demandée est donc
$$2x[u(x-p)-(mp+q)py]+(qx+py-pq)^2=0,$$
u étant le paramètre variable ; elle s'écrit

(1) $$(2u+q^2)x^2-2mp^2xy+p^2y^2-2(u+q^2)px-2p^2qy+p^2q^2=0.$$

1° La condition pour que l'équation (1) représente une hyperbole équilatère est
$$(2u+q^2)+p^2=0,$$
et cette équation s'écrit alors

(2) $$p^2(y^2-x^2)-2mp^2xy+(p^2-q^2)px-2p^2qy+p^2q^2=0.$$

Les équations du centre sont
$$2px+2mpy-(p^2-q^2)=0$$
et
$$y-mx-q=0.$$
En éliminant m, on obtient l'équation du lieu des centres,

(3) $$2p(x^2+y^2)-(p^2-q^2)x-2pqy=0.$$

Ce lieu est un cercle passant par les points O et B, et aussi par le milieu de AB.

L'équation du diamètre conjugué de Oy est
$$y-mx-q=0,$$
et celle de la tangente en A est
$$(p^2+q^2)(x-p)+2(mp+q)py=0.$$
L'équation du lieu de leur point de rencontre, obtenue en éliminant m, est

(4) $$(p^2+q^2)x^2+2pqxy+2p^2y^2-(p^2+q^2)px-2p^2qy=0.$$

Ce lieu est une ellipse passant par les points O, A et B.

L'abscisse du centre de l'hyperbole (2) est
$$x_1=\frac{p^2-q^2-2mpq}{2(1+m^2)p};$$

et l'abscisse du point de rencontre du diamètre conjugué de Oy avec la tangente en A est

$$x_2 = \frac{p(p^2 - q^2 - 2mpq)}{(1 + m^2)(p^2 + 2mp + q^2)}.$$

D'autre part, si on résout l'équation (2) par rapport à y, la condition de réalité des racines est

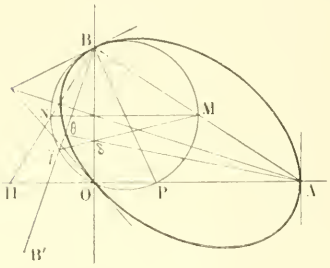
$$x(1 + m^2)px - (p^2 - q^2 - 2mpq) \geq 0.$$

Si les points A et B sont sur une même branche, cette condition est vérifiée par toutes les valeurs positives de x, ce qui exige que l'on ait

$$p^2 - q^2 - 2mpq < 0;$$

comme les abscisses x_1 et x_2 sont alors négatives, on voit que les arcs du cercle (3) et de l'ellipse (4) situés à gauche de Oy correspondent à ce cas. On voit de même que les arcs situés à droite de Oy répondent à des hyperboles sur lesquels les points A et B appartiennent à des branches différentes.

Solution géométrique. — Remarquons d'abord que les coniques considérées peuvent être regardées comme circonscrites à un triangle, dont l'un des sommets est A, et dont les deux autres sommets sont confondus en B, la droite qui les joint n'étant autre que Oy. Si ces coniques sont des hyperboles équilatères, elles passent par un quatrième point H, qui est à l'intersection de Ox avec la perpendiculaire élevée en B sur AB.



On sait que le lieu des centres des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle est le cercle des neuf points de ce triangle. Ces neuf points se réduisent ici à cinq : O, B, le milieu M de AB, le milieu N de BH et le milieu P de AH ; BP et MN sont des diamètres du cercle (*fig.* 1).

On peut trouver ce lieu autrement. Soit δ le point de rencontre de la tangente en A à l'hyperbole avec Oy. La polaire de δ n'étant autre que AB, $M\delta$ est le diamètre conjugué des cordes parallèles à AB et passe par le centre γ. En désignant par a la longueur du demi-diamètre parallèle à AB, on sait que

$$\gamma M \cdot \gamma\delta = a^2.$$

Mais on a aussi

$$\overline{BM}^2 - \overline{\gamma M}^2 = a^2.$$

De ces deux égalités on déduit facilement

$$M\gamma \cdot M\delta = \overline{MB}^2,$$

ce qui montre que le lieu du point γ est la figure inverse de Oy, par rapport au pôle M.

Passons maintenant au lieu du point de rencontre θ du diamètre conjugué de Oy dans l'hyperbole avec la tangente en A. Comme l'une ou l'autre de ces droites détermine l'hyperbole, elles forment deux faisceaux homographiques ; donc le lieu de leur point de rencontre est une conique passant par A et B. Cette conique est une ellipse ; car si le diamètre de l'hyperbole passant par B était parallèle à la tangente en A, le diamètre passant par A serait parallèle à la tangente en B : or la parallèle menée par A à Oy ne rencontre pas le lieu des centres.

Le point θ vient en A quand le diamètre passant par B coïncide avec BA ; la tangente en A est alors parallèle à Oy : c'est aussi la tangente en A à l'ellipse. Le point θ vient en B quand l'hyperbole se réduit à la droite BA et à la perpendiculaire élevée en B sur BA ; il est facile de voir que le diamètre conjugué de Oy dans ce couple de droites est perpendiculaire à BP : c'est la tangente en B à l'ellipse, et l'on voit que celle-ci est tangente en B au cercle lieu des centres. Enfin le point θ vient en O quand l'hyperbole se réduit aux axes Ox et Oy.

Soit BB' la portion du diamètre conjugué de Oy comprise entre les deux branches de l'hyperbole. Comme le centre γ est au milieu de BB' et que le point θ est aussi compris entre B et B', les trois points B', γ et θ sont toujours du même côté du point B, à gauche de Oy si les points A et B sont sur la même branche d'hyperbole, à droite de Oy si les points A et B sont sur des branches différentes.

Lorsque l'hyperbole se réduit à la droite BA et à la perpendiculaire élevée en B sur BA, les points γ et θ se confondent en B, ce qui explique pourquoi le cercle et l'ellipse sont tangents en B : mais il y a plus. Lorsque A et B sont sur la même branche, le point θ est entre B et γ; au contraire, lorsque les points A et B sont sur des branches différentes, le point θ est entre γ et B'. Donc l'ellipse traverse le cercle au point B ; en d'autres termes, le cercle est le cercle osculateur à l'ellipse en B.

2° La condition pour que l'équation (1) représente une parabole est

$$m^2p^2 - (2u + q^2) = 0,$$

et cette équation s'écrit alors

$$(5) \qquad p(y - mx)^2 - (m^2p^2 + q^2)x - 2pqy + pq^2 = 0.$$

L'équation de l'axe de cette parabole est

$$m[2mp(y - mx) + (m^2p^2 + q^2)] + [2p(y - mx) - 2pq] = 0.$$

Si l'on veut que cet axe passe par un point (α, β), on trouve, pour déterminer m, l'équation

$$p(p - 2\alpha)m^3 + 2p\beta m^2 + (q^2 - 2p\alpha)m + 2p(\beta - q) = 0.$$

Cette équation étant du troisième degré en m, on voit que par un point donné on peut faire passer trois axes de paraboles passant par A et tangentes en B à Oy.

Pour que l'un de ces axes soit parallèle à Oy, il faut et il suffit que le coefficient de m^3 soit nul, ce qui donne la condition

$$p - 2\alpha = 0.$$

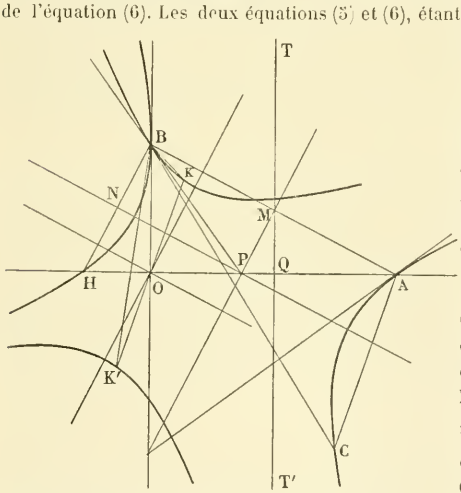
Le point donné doit donc se trouver sur la parallèle à Oy menée par le milieu de OA. Cette droite est, en effet, l'axe de la parabole formée par le couple de droites parallèles dont l'une est Oy et l'autre passe par le point A.

La condition précédente étant remplie, l'équation qui donne les coefficients angulaires des axes des deux autres paraboles peut s'écrire

$$(6) \qquad 2p\beta m^2 + (q^2 - p^2)m + 2p(\beta - q) = 0.$$

Or, si dans l'équation (5) x et y représentent les coordonnées du point d'intersection C de ces deux paraboles, cette équation (5), en y considérant m comme l'inconnue, doit être vérifiée par les racines de l'équation (6). Les deux équations (5) et (6), étant du second degré en m, doivent donc être identiques, ce qui donne

$$(7) \qquad \frac{px^2 - p^2x}{2p\beta} = \frac{2pxy}{p^2 - q^2} = \frac{py^2 - q^2x - 2pqy + pq^2}{2p(\beta - q)}.$$



L'équation du lieu du point C résulte de l'élimination de β entre ces deux conditions. Or en retranchant terme à terme le premier et le dernier des rapports (7), on obtient un rapport égal, indépendant de β comme le second. L'équation cherchée est donc

$$(8) \qquad \frac{2pxy}{p^2 - q^2} = \frac{p(x^2 - y^2) - (p^2 - q^2)x + 2pqy - pq^2}{2pq}.$$

On voit que le lieu du point C est une hyperbole équilatère, passant par A et tangente en B à Oy; elle passe aussi par le point H, et c'est l'une des hyperboles (2) considérées dans la première partie. Les coordonnées du centre sont $x = \frac{p^2 - q^2}{2p}$ et $y = 0$; donc ce centre est le milieu P de AH. On voit alors que les droites PM et PN, qui sont respectivement perpendiculaires aux cordes BA et BH en leur milieu, sont les axes de l'hyperbole (8) (*fig.* 2).

3° En égalant les deux premiers rapports (7), on obtient une équation qui se décompose en deux : $x = 0$ et $(p^2 - q^2)(x - p) - 4p\beta y = 0$; cette dernière n'est autre que l'équation de la droite AC, et l'équation de la parallèle menée à cette droite par l'origine est

$$(p^2 - q^2)x - 4p\beta y = 0.$$

D'autre part, l'équation du diamètre conjugué de Oy dans l'une des paraboles passant par C est

$$y - mx - q = 0,$$

en y remplaçant m par l'une des racines de l'équation (6). L'équation du dernier lieu demandé s'obtiendra donc en éliminant m et β entre l'équation (6) et les deux dernières équations que nous venons d'écrire ; on obtient, tous calculs faits,

$$(9) \qquad (p^2 - q^2)(x^2 - y^2) - 4pqxy + (p^2 - q^2)q^2 = 0.$$

Ainsi ce lieu est une hyperbole équilatère ayant pour centre l'origine et passant par le point B.

Les termes du second degré de l'équation (9) étant, à un facteur constant près, les mêmes que ceux de l'équation (8), les axes de l'hyperbole (9) sont, comme ceux de l'hyperbole (8), l'un perpendiculaire et l'autre parallèle à AB.

Solution géométrique. — On sait que l'enveloppe des axes des paraboles circonscrites à un triangle est une hypocycloïde à trois rebroussements (Voir *Revue*, 5e année, p. 38 et 40). Cette courbe étant de la troisième classe, on voit que par un point donné passent trois de ces axes.

Pour que l'un de ces axes soit parallèle à Oy, c'est-à-dire à la tangente en B, il faut que la parabole dégénère en un couple de droites, dont l'une sera la tangente en B elle-même et l'autre la parallèle à Oy menée par le point A. L'axe de ce couple de droites est la parallèle TT′ menée par le milieu Q de OA à Oy. (Il est tangent à l'enveloppe au point Q ; mais je passe la démonstration.) Il y a une autre parabole singulière : c'est la droite double AB, qui se confond avec son axe, lequel est tangent en B à l'enveloppe.

Soit D un point pris sur TT′, et soient DZ et DZ′ les deux tangentes autres que TT′ qu'on peut mener du point D à l'hypocycloïde. Ce sont les axes de deux paraboles qui se coupent en C et qui peuvent être regardées comme circonscrites au quadrilatère ABBC.

On sait que les directions de ces axes sont conjuguées harmoniques par rapport aux directions des côtés opposés de ce quadrilatère, c'est-à-dire de AC et Oy ou TT′ d'une part, et de BC et BA d'autre part.

Cela étant, menons la parallèle DE à AC : le faisceau (D.ZZ′TE) est harmonique. Quand le point D se confond avec le point de contact Q de TT′ avec l'hypocycloïde, l'un des axes DZ en DZ′ se confond avec TT′, et il en est de même de DE. L'enveloppe de DE est donc une conique tangente à TT′ en Q. Quand le point D s'éloigne à l'infini, DZ et DZ′ prennent la direction des droites isotropes, car l'hypocycloïde est bitangente à la droite de l'infini aux points cycliques ; DE devient alors perpendiculaire à TT′. Finalement, l'enveloppe de DE est une parabole (Q) dont le sommet est en Q et dont l'axe est Qx. On en conclut que la direction de AC et la position du point D sont reliées homographiquement.

Menons maintenant la parallèle DF à BC : nous avons dit que DF est conjuguée harmonique de la direction de BA par rapport à DZ et DZ′. Quand le point D vient au point de rencontre de TT′ avec la tangente à la parabole (Q) parallèle à BA, DF se confond avec TT′. L'enveloppe de DF est donc encore une parabole tangente à TT′ ; son axe est perpendiculaire à BA. On en conclut que la direction de BC et la position du point D sont aussi reliées homographiquement.

En résumé, AC et BC forment deux faisceaux homographiques, et le lieu du point C est une conique. Pour déterminer sa nature, rappelons que l'hypocycloïde à trois rebroussements est une courbe du quatrième ordre ; l'une quelconque de ses tangentes, TT′ par exemple, la coupe en deux points D_1 et D_2, et l'on peut démontrer (Voir *Revue*, n° 475) que les deux tangentes D_1T_1 et D_2T_2 en D_1 et D_2 sont rectangulaires. Quand le point D vient en D_1 (ou en D_2), DZ et DZ′ se confondent avec D_1T_1 (ou avec D_2T_2) ; il en est de même de DE et DF, et par suite AC et BC sont parallèles à D_1T_1 (ou à D_2T_2). Le lieu du point C est donc une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles à D_1T_1 et D_2T_2.

Quand le point D s'éloigne à l'infini, nous avons vu que DE devient perpendiculaire à TT′ et que DF devient perpendiculaire à AB : le point C vient alors en H. L'hyperbole étant circonscrite au triangle rectangle ABH, est tangente en B à Oy. — D'autre part, quand le point D coïncide avec le milieu M de AB, l'un des axes DZ ou DZ′ se confond avec AB ; il en est de même de BC, et le point C vient en A. Le troisième axe passant par M est la perpendiculaire MP à AB ; le faisceau harmonique (D.ZZ′TE) ayant alors deux rayons conjugués rectangulaires, les deux autres rayons, dont l'un est TT′ et dont l'autre est parallèle à la tangente en A à l'hyperbole,

sont également inclinés sur les deux premiers. Ainsi les tangentes en A et en B à l'hyperbole sont également inclinées sur AB, et par suite la corde AB est parallèle à l'un des axes de cette hyperbole. Ces deux axes sont donc les perpendiculaires élevées sur AB et sur BH en leurs milieux ; ils se coupent au milieu P de AH, qui est le centre de l'hyperbole.

Transportons le faisceau (D.ZZTE) au point B : les deux premiers rayons deviennent les diamètres des deux paraboles, le troisième vient se confondre avec Oy et le quatrième est toujours parallèle à AC. Si donc on mène par le point O la parallèle à AC, elle rencontrera les deux diamètres en deux points K et K' symétriques par rapport au point O ; il résulte d'ailleurs des explications précédentes que, sur chaque droite passant par le point O, il n'y a que deux points tels que K et K'. Quand le point D vient au milieu Q de OA, l'un des diamètres se confond avec Oy et l'autre (comme on peut le démontrer) passe par le point P ; comme AC devient alors parallèle à Oy, on voit que Oy intervient comme partie singulière du lieu des points K et K' (on la trouve aussi dans la solution analytique, mais je n'en ai pas parlé). Le véritable lieu des points K et K' est une conique ayant pour centre le point O et passant par le point B où elle a pour tangente BP. Cette conique est une hyperbole équilatère ; car on voit immédiatement qu'elle a les mêmes directions asymptotiques que l'hyperbole lieu du point C, et par suite ses axes sont la parallèle et la perpendiculaire à AB menées par le point O.

A. GOULARD,
Professeur au lycée de Marseille.

Ont résolu cette question : MM. Mario Guesde, J. Mossery.

Calcul trigonométrique.

441. — 1° *Calculer les côtés et les angles du triangle* ABC *dans lequel on connaît la surface* S, *le rayon* r *du cercle inscrit et le rayon* r' *du cercle exinscrit situé dans l'angle* A :

$$S = 832^{\text{Ha}},786, \qquad r = 927^{\text{m}},285, \qquad r' = 1276^{\text{m}},475.$$

2° *Donner la valeur minimum de la surface* S *qui correspond aux valeurs numériques données pour* r *et pour* r'.

I. **Solution du problème.** — 1° *Calcul de* A *et* a. — Des formules

$$S = pr = (p-a)r'$$

on déduit

$$p = \frac{S}{r}, \qquad p - a = \frac{S}{r'};$$

d'où, en ajoutant et retranchant,

$$2p - a = b + c = S\,\frac{r' + r}{rr'},$$

$$a = S\,\frac{r' - r}{rr'}.$$

D'autre part, on a

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a} = \frac{r'}{p} = \frac{rr'}{S}.$$

On est ramené à résoudre un triangle connaissant A, a et $b + c$.

2° *Calcul des angles* B *et* C. — De la proportionnalité des côtés aux sinus des angles opposés, on déduit

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b + c}{\sin B + \sin C}.$$

Remplaçant a et $b + c$ par leurs valeurs, il vient

$$\frac{r' - r}{\sin A} = \frac{r' + r}{\sin B + \sin C}$$

ou

$$\frac{r' - r}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} = \frac{r' + r}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}},$$

d'où, en remarquant que
$$\sin\frac{B+C}{2} = \cos\frac{A}{2},$$
$$\cos\frac{B-C}{2} = \frac{r'-r}{r'+r}\sin\frac{A}{2}.$$

La valeur trouvée pour $\cos\frac{B-C}{2}$ est positive $(r' > r)$. Elle doit être inférieure ou égale à 1. On doit donc avoir
$$\frac{r'+r}{r'-r}\sin\frac{A}{2} \leqslant 1,$$
ou, en élevant au carré et chassant le dénominateur,
$$(r'+r)^2\sin^2\frac{A}{2} \leqslant (r'-r)^2,$$
ou encore
$$(r'+r)^2\sin^2\frac{A}{2} \leqslant (r'-r)^2\left(\cos^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}\right),$$
c'est-à-dire
$$4rr'\operatorname{tg}^2\frac{A}{2} \leqslant (r'-r)^2,$$
ou, en remplaçant $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ par son expression en fonction de r, r', S,
$$\frac{4r^3r'^3}{S^2} \leqslant (r'-r)^2,$$
d'où l'on tire
$$S \geqslant \frac{2r^{\frac{3}{2}}r'^{\frac{3}{2}}}{r'-r}.$$

Supposons cette condition remplie; il existe alors un angle positif $\alpha < 90^0$ admettant pour cosinus $\frac{r'+r}{r'-r}\sin\frac{A}{2}$. On aura donc, en supposant, pour fixer les idées, $B > C$,
$$\frac{B-C}{2} = \alpha.$$
En adjoignant l'équation
$$\frac{B+C}{2} = 90^0 - \frac{A}{2},$$
on en déduira
$$B = 90^0 - \frac{A}{2} + \alpha,$$
$$C = 90^0 - \frac{A}{2} - \alpha.$$

Discussion. — Les valeurs trouvées pour B et C doivent être positives et moindres que 180^0. Comme on a employé la relation
$$A + B + C = 180^0,$$
il suffit que ces valeurs soient positives ou encore que la valeur de C soit positive $(B > C)$. On doit donc avoir
$$90^0 - \frac{A}{2} - \alpha > 0,$$
$$\alpha < 90^0 - \frac{A}{2},$$
et, puisque α et $90^0 - \frac{A}{2}$ sont deux angles positifs moindres que 90^0,
$$\cos\alpha > \cos\left(90^0 - \frac{A}{2}\right) = \sin\frac{A}{2},$$

ou enfin
$$\frac{r'+r}{r'-r}\sin\frac{A}{2} > \sin\frac{A}{2},$$
condition qui est vérifiée d'elle-même.

3° *Calcul des côtés b et c.* — Les expressions trouvées plus haut pour a et $b+c$ peuvent s'écrire
$$a = \frac{r'-r}{\frac{rr'}{S}} = \frac{r'-r}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}} = (r'-r)\operatorname{cotg}\frac{A}{2},$$
$$b+c = \frac{r'+r}{\frac{rr'}{S}} = \frac{r'+r}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}} = (r'+r)\operatorname{cotg}\frac{A}{2}.$$
Reste à calculer $b-c$. Nous nous servirons de la formule
$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}} = \operatorname{tg}\frac{B-C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2},$$
d'où
$$b-c = (r'+r)\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}.$$

Connaissant $b+c$ et $b-c$, on en déduit $2b$ et $2c$, d'où b et c.

Discussion. — Les valeurs trouvées pour b et c doivent être positives. On voit facilement que cette condition est remplie d'elle-même. En effet,
$$b+c = (r'+r)\operatorname{cotg}\frac{A}{2},$$
$$b-c = (r'+r)\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}.$$

Ces deux valeurs sont positives. Donc leur somme, égale à $2b$, sera positive. Pour que leur différence, égale à $2c$, le soit également, il faut et il suffit que l'on ait
$$b+c > b-c,$$
c'est-à-dire
$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2} > \operatorname{tg}\frac{B-C}{2},$$
ou enfin
$$\frac{B-C}{2} = \alpha < 90^0 - \frac{A}{2}.$$

Nous avons vu dans la discussion relative aux angles B et C que cette condition est vérifiée d'elle-même.

4° *Minimum de S pour les valeurs données pour r et r'.* — La condition de possibilité du problème est
$$S \geqslant \frac{2r^{\frac{3}{2}}r'^{\frac{3}{2}}}{r'-r}.$$
Cela revient à dire que le minimum de S est
$$m = 2\frac{r^{\frac{3}{2}}r'^{\frac{3}{2}}}{r'-r}.$$
Il a lieu pour $\cos\frac{B-C}{2} = 1$, par suite $\frac{B-C}{2} = 0$, $B = C$, c'est-à-dire lorsque le triangle est isocèle.

II. Calcul numérique.

Données :

$S = 8.327.860^{m\square}$

$r = 927^m,285$

$r' = 1.276^m,475$

Formules :

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{rr'}{S}$$

$$\frac{B+C}{2} = 90^0 - \frac{A}{2}$$

$$\cos\frac{B-C}{2} = \frac{r'+r}{r'-r}\sin\frac{A}{2}$$

$$a = (r'-r)\operatorname{cotg}\frac{A}{2}$$

$$b+c = (r'+r)\operatorname{cotg}\frac{A}{2}$$

$$b-c = (r'+r)\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}$$

Résultats :

$A = 16^0 10' 43'',58$

$B = 109^0 16' 39'',95$

$C = 54^0 32' 36'',47$

$a = 2456^m,800$

$b = 8322^m,866$

$c = 7182^m,148$

$2p = 17961^m,814$

Calculs auxiliaires :

$r' + r = 2203^m,760$

$r' - r = 349^m,190$

Calcul de log S.

83278 9205303
6 31,2

$\log S = 6,9205334$

Calcul de log r.

92728 9672109
5 23,5

$\log r = 2,9672132$

Calcul de log r'.

12764 1059868
7 238
5 17

$\log r' = 3,1060123$

Calcul de log $(r'+r)$.

22037 3431525
6 118,2

$\log (r'+r) = 3,3431643$

Calcul de log $(r'-r)$.

34919 5430618

$\log (r'-r) = 2,5430618$

Calcul de $\log \sin \frac{A}{2}$.

$8^0 5' 20''$ $\bar{1},1483226$
$1''$ 148,1
$0'',7$ 103,67
$0'',09$ 13,329

$\log \sin \frac{A}{2} = \bar{1},1483491$

Calcul de $\log \operatorname{tg} \frac{B-C}{2}$.

$27^0 22'$ $\bar{1},7140051$
$1''$ 51,6
$0'',7$ 36,2
$0'',04$ 2,064

$\log \operatorname{tg} \frac{B-C}{2} = \bar{1},7140141$

Calculs définitifs :

Calcul de A.

$\log r = 2,9672132$
$\log r' = 3,1060123$
$\operatorname{colog} S = \bar{7},0794666$

$\log \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \bar{1},1526921$

$8^0 5' 20''$ 651
270
$1''$ 151,1
118,9
$0'',7$ 105,77
$0'',09$ 13,13

$\frac{A}{2} = 8^0\ 5' 21'',79$

$A = 16^0 10' 43'',58$

Calcul de B et C.

$\log (r'+r) = 3,3431643$
$\operatorname{colog} (r'-r) = \bar{3},4569382$
$\log \sin \frac{A}{2} = \bar{1},1483491$

$\log \cos \frac{B-C}{2} = \bar{1},9484516$

$27^0 22' 10''$ 426
90
$-8''$ 87,2
2,8
$-0'',2$ 2,18
$-0'',06$ 0,62

$\frac{B-C}{2} = 27^0 22'\ 1'',74$

$\frac{B+C}{2} = 81^0 54' 38'',21$

$B = 109^0 16' 39'',95$

$C = 54^0 32' 36'',47$

Minimum de S.

$$m = 2\frac{r^{\frac{3}{2}} r'^{\frac{3}{2}}}{r'-r}$$

$\log 2 = 0,3010300$

$\frac{3}{2}\log r = 4,4508198$

$\frac{3}{2}\log r' = 4,6590184$

$\operatorname{colog} (r'-r) = \bar{3},4569382$

$\log m = 6,8678064$

73757 32
32
5 29,5
5 2,5

$m = 7.375.755^{m\square}$

Calcul de a.

$\log (r'-r) = 2,5430618$
$\operatorname{colog} \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 0,8473079$

$\log a = 3,3903697$
$a = 2456^m,8$

Calcul de $b+c$.

$\log (r'+r) = 3,3431643$
$\operatorname{colog} \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 0,8473079$

$\log (b+c) = 4,1904722$

15505 18
4
0,01 2,81
0,004 1,19

$b+c = 15.505^m,014$

Calcul de $b-c$.

$\log (r'+r) = 3,3431643$
$\log \operatorname{tg} \frac{B-C}{2} = \bar{1},7140141$

$\log (b-c) = 3,0571784$

11407 14
70
1 38,1
8 31,9

$b-c = 1140^m,718$

Calcul de b et c.

$b+c = 15.505^m,014$
$b-c = 1.140^m,718$

$2b = 16.645^m,732$
$2c = 14.364^m,296$

$b = 8322^m,866, \quad c = 7182^m,148$

Vérification :

Calcul de $2p = 2\frac{S}{r}$.

$\log S = 6,9205334$
$\operatorname{colog} r = \bar{3},0327868$
$\log 2 = 0,3010300$

$\log 2p = 4,2543502$

17961 305
197
8 193,6
3,4
1 2,42
4 0,98

$2p = 17961^m,814$

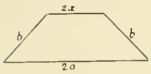
P. L.

Solution assez bonne, calcul numérique exact : M. Mario Guende.

CONCOURS DE 1895 (Suite)

ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES (Cours préparatoires).

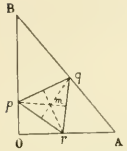
Algèbre.



476. — On demande de déterminer un trapèze isocèle dont on connaît la base $2a$ et les côtés égaux b de manière à rendre sa surface aussi grande que possible.

(25 septembre, de 8 h. 1/2 à midi.)

Géométrie analytique.



477. Lieu du point de concours des hauteurs d'un triangle équilatéral pqr de grandeur variable, inscrit dans un triangle rectangle donné OAB.

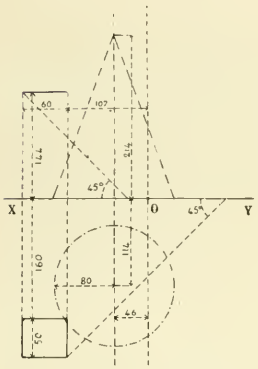
(25 septembre, de 1 h. 1/2 à 5 h. 1/2.)

Lavis.

Exécuter à l'encre de Chine, à teintes plates ou à teintes fondues, le lavis d'une sphère de 14^{cm} de diamètre.

(26 septembre, de 8 h. 1/2 à midi.)

Épure.



On donne un cône de révolution à axe vertical posé sur le plan horizontal de projection et un parallélépipède défini par une base rectangulaire située dans un plan horizontal et par la direction de ses génératrices. On demande de représenter la portion de ce parallélépipède comprise entre sa base et sa courbe d'entrée dans le cône.

Les cotes sont fournies par le croquis ci-contre, la ligne de terre étant prise parallèlement aux petits côtés de la feuille et à mi-hauteur de cette feuille et le point O étant le milieu de cette ligne de terre limitée aux grands côtés de la feuille.

Les lignes inclinées à 45° sur la ligne de terre figurent la direction des génératrices du parallélépipède.

Nota. — On représentera le contour apparent de la portion conservée du parallélépipède en traits pleins pour les lignes vues, en pointillé pour les lignes cachées. Le contour apparent du cône sera indiqué en trait mixte. Les lignes de construction seront tracées en traits interrompus ou à l'encre rouge.

(26 septembre, de 1 h. 1/2 à 5 h. 1/2.)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

ÉCOLE CENTRALE (1894)

Géométrie analytique. (M. Gouilly.)

Géométrie analytique à deux dimensions.

98. — On donne une circonférence et un point extérieur ; on mène par ce point une sécante : le produit de la sécante entière par la partie extérieure est constant.

99. — Variation de l'aire du triangle formé par deux tangentes rectangulaires fixes à un cercle et une tangente mobile à ce cerle.

100. — On donne une circonférence ayant son centre à l'origine et une seconde circonférence ayant son centre sur Ox. Équation des tangentes communes à ces deux circonférences.

101. — On donne un point d'une circonférence ; par ce point on fait passer une circonférence variable tangente à la première. Lieu des points de contact des tangentes communes à ces deux circonférences.

102. — On considère les coniques représentées par l'équation $x^2 + \lambda xy + 3y^2 + x + 4 = 0$.
Lieu des points de contact des tangentes issues d'un point donné de l'axe des y.

103. — On considère les coniques représentées par l'équation $(1 - m)x^2 + 2mxy + my^2 + x + y + 1 = 0$.
Lieu du centre quand on fait varier m. — Séparer sur ce lieu les centres d'ellipses des centres d'hyperboles.

104. — Angle de deux diamètres conjugués (m, m') d'une conique. — L'exprimer en fonction de m seulement. — Maximum de l'angle V. — Qu'obtient-on en égalant à 0 le numérateur, le dénominateur de tg V ?

105. — Lieu des points d'où on peut mener à une ellipse des tangentes parallèles à deux directions conjuguées. — Cas d'une conique quelconque.

106. — On donne une ellipse. Variations de l'aire du triangle formé par une tangente et les axes.

107. — On donne une ellipse rapportée à ses axes ; on mène la polaire d'un point par rapport à cette ellipse. On demande le pôle de cette droite par rapport à un cercle donné.

108. — Que représente l'équation $(ax + by + c)^2 - (a'x + b'y + c')^2 = k^2$?
Pourquoi est-ce une hyperbole ? — Quelles sont les asymptotes ? — Équation de l'hyperbole conjuguée.
Mêmes questions pour l'équation $(ax + by + c)(a'x + b'y + c') = k$.

109. — Équation générale des hyperboles dont le centre se trouve sur deux droites données $D = 0$, $D' = 0$.
Équation générale des hyperboles qui auraient leurs centres sur une droite donnée $D = 0$ et admettraient pour asymptote une autre droite donnée $\Delta = 0$.

110. — On donne une hyperbole équilatère par une de ses asymptotes $mx + ny + h = 0$ et un point situé à l'origine. Lieu du point de rencontre de la deuxième asymptote et de la tangente à l'origine.

111. — Une courbe est telle que la tangente en un point quelconque est partagée en deux parties égales par le point de contact et les deux points de rencontre avec deux droites fixes. Trouver l'équation de cette courbe.

112. — On donne une parabole tournant autour de la verticale qui passe par son foyer. Lieu des points de contact des tangentes parallèles à une direction donnée.

BIBLIOGRAPHIE

La Géométrie réglée et ses applications, par G. KŒNIGS. — Un vol. in-4°, de 148 pages, chez Gauthier-Villars.

La considération de la droite comme élément fondamental de l'espace a déjà été employée depuis assez longtemps ; mais pour se mettre au courant des théories de l'espace réglé on était obligé de lire un assez grand nombre de mémoires épars dans divers recueils, les ouvrages didactiques ne donnant en général que fort peu de chose sur ce sujet, sauf sur la théorie des congruences si intimement liée à la géométrie des surfaces. M. Kœnigs comble donc une lacune en donnant un exposé complet de la théorie des complexes linéaires. Le caractère philosophique de cet exposé, et l'élégance des calculs, due à l'introduction systématique des propriétés des formes et des invariants, seront appréciés par tous les lecteurs.

Après avoir insisté sur le double caractère dualistique et projectif de l'espace réglé, M. Kœnigs définit un système de coordonnées dualistiques de la droite. Ces coordonnées, au nombre de 6, sont homogènes et liées par une équation dont le premier membre est une forme quadratique, *forme fondamentale*, de discriminant non nul qui joue un rôle important dans la théorie. La condition de rencontre de deux droites s'obtient en égalant à zéro la forme polaire de la forme fondamentale. Viennent ensuite les définitions des divers systèmes de droites. Je signalerai en particulier la distinction faite pour les systèmes dépendant d'un paramètre entre les surfaces réglées et les *séries réglées*, cette distinction ayant un intérêt tout particulier pour les élèves de mathématiques spéciales. Ainsi j'ai vu poser aux examens de l'École Normale la question suivante : Trouver le lieu des droites qui rencontrent en trois points la courbe

$$Y = X^2, \qquad Z = X^4 ;$$

ces droites forment une série réglée, constituant *un seul* des systèmes de génératrices du paraboloïde $XY = Z$. C'est ce que M. Kœnigs appelle plus loin une *demi-quadrique*.

On trouve dans le 2e chapitre les propriétés élémentaires des complexes linéaires, la notion de *corrélation normale*, existant entre les points d'une droite et les plans polaires de ces points, et celle de l'invariant de M. Klein qui s'annule pour les complexes spéciaux, c'est-à-dire pour les complexes dont les droites rencontrent une droite fixe.

Le 3e chapitre est consacré aux systèmes de complexes. Après avoir montré que deux complexes linéaires ont généralement en commun un couple de droites conjuguées, rencontrées par toutes les droites appartenant à ces deux complexes, et après avoir examiné le cas particulier où ces droites viennent se confondre, M. Kœnigs aborde les systèmes à p termes, c'est-à-dire les complexes tels que le premier membre de leurs équations soit une fonction linéaire des premiers membres des équations de p complexes fixes. La notion d'*angle de deux corrélations* fondée sur une conception de Laguerre qui rattache la notion d'angle à celle de rapport anharmonique permet de définir l'*angle de deux complexes*. Deux complexes sont dits *en involution* lorsque leur angle est droit. Cette notion d'involution et d'orthogonalité de deux complexes sert à discuter les systèmes de droites communs à plusieurs complexes.

Lorsqu'on aborde les propriétés infinitésimales des surfaces réglées, on est conduit à considérer la congruence linéaire singulière formée par les tangentes dont les points de contact sont sur une même génératrice de la surface ; la demi-quadrique de raccordement, et les *complexes tangents* à la surface : un complexe ayant un contact du p^e ordre avec une surface contient $p + 1$ génératrices consécutives de la surface. Pour étudier les propriétés des complexes, M. Kœnigs considère certains systèmes à deux termes dits : *complexes tangents* à un complexe donné ; cette dénomination se justifiant par ce fait que les coordonnées d'une droite infiniment voisine de la droite de contact substituées dans le premier membre de l'équation des complexes tangents donne un résultat du second ordre infinitésimal. Viennent ensuite les propriétés infinitésimales des congruences qui jouent un si grand rôle non seulement dans la géométrie des surfaces, mais encore dans la théorie des équations de Laplace.

Dans le dernier chapitre, M. Kœnigs étudie en particulier un système de coordonnées dû à M. Klein pour lequel la forme fondamentale est une somme de six carrés. Les six complexes coordonnées forment une configuration remarquable, dans le détail des propriétés de laquelle je ne puis entrer ici. Enfin M. Kœnigs montre les relations qui existent entre l'étude des systèmes de droites et diverses autres questions de géométrie et en particulier rapproche la géométrie de la droite de celle des propriétés métriques d'un espace à quatre dimensions.

CH. BIOCHE.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

6e Année. N° 4. Janvier 1896.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UNE QUADRIQUE

ADMETTANT DES SECTIONS ELLIPTIQUES

par M. **V. Hioux.**

C'est surtout au point de vue de la géométrie descriptive que nous traiterons la question ; mais nous allons établir auparavant certains théorèmes concernant les quadriques et sur lesquels nous nous appuierons.

Lorsque deux quadriques ont un plan principal commun et mêmes plans de sections elliptiques se projetant sur ce plan suivant des cercles, leur ligne d'intersection a pour projection sur le plan principal commun un cercle et leurs autres plans principaux sont parallèles.

Réciproquement : *lorsque deux quadriques ont un plan principal commun et que leur intersection se projette sur ce plan suivant un cercle, elles ont les mêmes plans de sections elliptiques se projetant sur ce plan principal suivant des cercles, et leurs autres plans principaux sont parallèles.*

Considérons deux quadriques, $Q = 0$ et $Q_1 = 0$, astreintes simplement à avoir un même plan principal, et supposons que ce plan ait été pris pour plan des xy ; nous aurons alors

$$Q \equiv az^2 + f(x, y) = 0,$$
$$Q_1 \equiv a_1z^2 + f_1(x, y) = 0,$$

pour équations de ces surfaces, en désignant par a et a_1 deux constantes, par $f(x, y)$ et $f_1(x, y)$ les premiers membres des deux coniques principales de ces quadriques, situées dans le plan des xy. La projection de l'intersection de ces deux quadriques sur les plans des xy a dès lors pour équation

$$\Sigma = 0, \qquad h\Sigma \equiv a_1f(x, y) - af_1(x, y) ;$$

dans cette identité, h désigne une constante quelconque, généralement choisie de façon à simplifier le premier membre de la conique Σ.

Cela posé, coupons les deux quadriques par un même plan quelconque non perpendiculaire au plan des xy, $z = \alpha x + \beta y + \gamma$, ou, pour abréger, $z = P$, en désignant par P la fonction linéaire $\alpha x + \beta y + \gamma$; les projections des deux sections planes sur le plan des xy ont pour équations

$$C(x, y) \equiv aP^2 + f(x, y) = 0,$$
$$C_1(x, y) \equiv a_1P^2 + f_1(x, y) = 0,$$

et nous en déduisons l'identité

$$a_1C(x, y) - aC_1(x, y) \equiv a_1f(x, y) - af_1(x, y),$$

ou

$$(1) \qquad h\Sigma \equiv a_1C(x, y) - aC_1(x, y).$$

Cette identité montre de suite que, si $C(x, y) = 0$ et $C_1(x, y) = 0$ sont deux cercles, $\Sigma = 0$ représente un cercle passant par leurs points de rencontre. D'autre part, les identités

$$f(x, y) \equiv C(x, y) - aP^2, \qquad f_1(x, y) \equiv C_1(x, y) - a_1P^2$$

nous montrent aussi que les deux coniques principales, f et f_1, sont respectivement bitangentes aux cercles C et C_1 en leurs points de rencontre avec la même droite $P = 0$; donc leurs axes sont parallèles à la droite P et à la direction perpendiculaire. Or ces axes sont les traces des autres plans principaux des deux quadriques sur le plan des xy. Le premier théorème est donc entièrement démontré.

Réciproquement, si $\Sigma = 0$ représente un cercle, et si $C = 0$ en représente un aussi, l'identité I nous montre que $C_1(x, y) = 0$ est aussi un cercle passant par l'intersection des deux autres, et le second théorème est alors ramené en partie au premier et entièrement établi.

Remarque. — Il est bon de remarquer que les cercles C et C_1 sont des cercles focaux des coniques principales $f(x, y) = 0$, $f_1(x, y) = 0$, et que cela devait être, d'après un théorème très général sur les contours apparents. Enfin il faut encore remarquer que les plans de sections elliptiques d'une quadrique qui se projettent sur un plan principal suivant des cercles, sont perpendiculaires à l'un des autres plans principaux, comme cela résulte de l'une ou de l'autre des identités :

$$C(x, y) \equiv aP^2 + f(x, y),$$
$$C_1(x, y) \equiv a_1P^2 + f_1(x, y).$$

On pourra rapprocher cette propriété de la propriété semblable concernant les plans cycliques.

Problème I. — *Étant donnée une quadrique, déterminer les plans de sections elliptiques qui se projettent sur un de ses plans principaux suivant des cercles.*

Prenons, par exemple, comme quadrique donnée, un ellipsoïde à trois axes inégaux et soient a, b, c les longueurs des demi-axes de cet ellipsoïde $(a > b)$. Plaçons (*fig.* 1) l'ellipse (a, b) dans le plan horizontal de projection ou dans un plan parallèle et l'ellipse (a, c) dans un plan parallèle au plan vertical de projection; l'axe $2a$ est alors parallèle à la ligne de terre, l'axe $2b$ est de bout et l'axe $2c$ est vertical. Nous venons de voir que la projection de la section elliptique cherchée sera un cercle focal de l'ellipse (a, b), sur le plan principal de cette ellipse, si toutefois on cherche les ellipses de la surface qui se projettent sur ce plan principal suivant des cercles. Considérons alors en particulier un quelconque des cercles focaux de l'ellipse (a, b) : c'est la base d'un cylindre de révolution vertical doublement tangent à l'ellipsoïde et qui, par suite, le coupe suivant deux courbes planes qui passent aux points de contact du cercle focal avec l'ellipse. Les cercles du système dont le lieu des centres est l'axe $2a$ donnent les plans de sections elliptiques qui se projettent horizontalement suivant des cercles et qui sont symétriques par rapport au plan de front du centre de l'ellipsoïde ; les cercles de l'autre système donnent de la même façon les plans d'ellipses qui se projettent

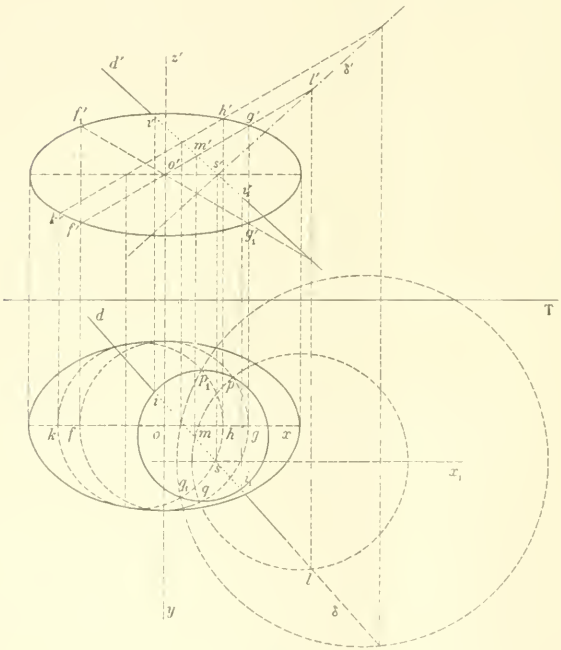


Fig. 1

horizontalement suivant des cercles et qui sont symétriques par rapport à l'autre plan principal, le plan de profil passant par le centre.

Considérons le cercle du premier système qui a pour centre le centre O de l'ellipse (a, b) et pour rayon b ; les génératrices de contour apparent vertical du cylindre ayant ce cercle pour base coupent le contour apparent vertical de l'ellipsoïde aux quatre points f', f'_1, g', g'_1, et les directions des plans de sections elliptiques du premier système sont les plans de bout qui ont pour traces $f'g'$, $f'_1g'_1$.

Problème II — *Construire un cône contenant une droite donnée, ayant pour plan principal un plan principal d'une quadrique donnée et dont l'intersection avec la quadrique se projette sur ce plan suivant un cercle.*

Soit (*fig.* 1) $(sd, s'd')$ la droite donnée ; le cône cherché contient en outre, dans le plan vertical de trace sd, une seconde génératrice $(s\delta, s'\delta')$, symétrique de la première par rapport à la verticale du point S ; de plus il admet comme plans de sections elliptiques se projetant horizontalement suivant des cercles les plans de bout $f'g'$, $f'_1g'_1$, et ses autres plans principaux sont le plan de front et le plan de profil qui passent par (s, s'). Or le plan de bout $f'g'$ coupe les deux génératrices du cône aux points (m, m') et (l, l') ; la base du cône dans ce plan de bout est donc une ellipse qui se projette horizontalement suivant un cercle passant aux points m et l et dont le centre est sur sx_1, parallèle à la ligne de terre. Le cône est alors parfaitement défini.

Remarque. — Dans le cas où les droites $s'\delta'$ et $s'd'$ sont respectivement parallèles à $f'g'$ et $f'_1g'_1$, la construction précédente est en défaut. On prend alors pour cône le système des deux plans parallèles aux plans de bout $f'g'$ et $f'_1g'_1$ et passant au point (s, s').

Proposons-nous maintenant de traiter le problème que nous avons en vue, de *déterminer les points de rencontre d'une droite avec une quadrique à axes inégaux et admettant des sections elliptiques.*

Pour cela prenons pour plan horizontal un plan principal de la quadrique, ou un plan parallèle, pour plan vertical un plan parallèle à l'un des deux autres plans principaux. Supposons, pour fixer les idées, que la quadrique donnée soit un ellipsoïde à trois axes inégaux et que les contours apparents soient figurés ; soient en outre $s'd'$ et sd les projections de la droite donnée. Déterminons, comme il a été expliqué plus haut, le cône passant par cette droite, admettant le plan horizontal $o's'$ pour plan principal et pour plans de sections elliptiques à projections horizontales circulaires les mêmes que la quadrique donnée. Alors l'intersection du cône et de la quadrique se projette horizontalement suivant un cercle dont on aura deux couples de points (p, q) et (p_1, q_1) en coupant les deux surfaces par deux plans auxiliaires parallèles au plan $f'g'$, l'un d'eux étant, par exemple, le plan $f'g'$ lui-même. Ce cercle coupe la droite Sd en deux points i et i_1 qui sont les projections horizontales des points cherchés (voir la figure 1).

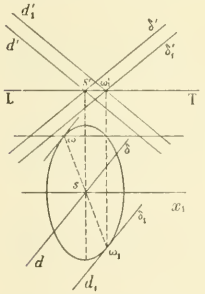


Fig. 2

Substitution au cône auxiliaire d'un hyperboloïde homothétique. — Si le cône auxiliaire n'est pas un système de deux plans, auquel cas l'intersection se trouve immédiatement, on peut lui substituer un hyperboloïde à une nappe dont il soit le cône asymptote. — Supposons, pour fixer les idées (*fig.* 2), que les sections horizontales du cône soient des ellipses ; comme le centre de l'hyperboloïde en question est le point S, sommet du cône, le plan horizontal de projection, lequel passe en S, coupe l'hyperboloïde suivant une ellipse. Traçons dans cette ellipse le diamètre conjugué $\omega\omega_1$ de la droite sd projection horizontale de la droite donnée. Le plan tangent à l'hyperboloïde homothétique du cône, au point ω_1, le coupe suivant deux génératrices respectivement parallèles aux deux génératrices du cône représentées en sd, $s'd'$ et $s\delta$, $s'\delta'$. Faisons subir à l'hyperboloïde une translation égale et parallèle à $s\omega$.

Son centre viendra en ω et, comme ω_1 vient en s, les deux génératrices qui se croisent en ω_1 viendront se placer sur les génératrices correspondantes du cône.

Or le cône et l'hyperboloïde, dans sa nouvelle position, ont les mêmes plans de sections elliptiques se projetant horizontalement suivant des cercles. Les premiers ont leurs centres sur sx' et les autres sur une parallèle à la ligne de terre, menée par ω.

Cela permet, comme on le voit, de déplacer le plan de front utilisé dans la figure 1, et de le déplacer à volonté, ce qui revient à substituer à l'ellipse de la figure 2 une ellipse homothétique [*]. Lorsque le point s n'est pas sur l'axe $2a$ de l'ellipse principale (a, b) de l'ellipsoïde donné figure 1, on peut *supposer* le point ω sur cet axe, c'est-à-dire prendre pour plan de front celui qui passe par le centre de la quadrique donnée.

C'est la solution de M. Rémoy publiée dans la géométrie descriptive de M. Caron.

Si la quadrique donnée est de révolution autour d'un axe vertical par exemple, le cône auxiliaire est aussi de révolution autour d'un axe parallèle au premier. Deux sections planes horizontales suffiront pour obtenir l'intersection d'une droite et d'une pareille quadrique.

Dans le cas de la surface gauche de révolution le procédé si remarquable de M. Rouché peut être remplacé par la méthode du cône auxiliaire en question, laquelle est tout à fait générale et peut s'appliquer facilement, soit à l'ellipsoïde, soit au paraboloïde de révolution.

SUR LA RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ

PAR DES FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES

par M. **J. Girod**, professeur au lycée de Lyon.

Nous supposerons réels les coefficients de l'équation $x^3 + px + q = 0$.

On sait que la résolution algébrique de cette équation par la méthode de Hudde demande la série d'opérations suivante :

Poser $x = y + z$ et déterminer y et z par les conditions : $3yz = -p$, $y^3 + z^3 = -q$.

Pour ce, résoudre l'équation du second degré appelée résolvante : $X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0$; extraire les racines cubiques réelles et imaginaires des nombres obtenus X' et X'', et ajouter deux à deux celles des déterminations de $\sqrt[3]{X'}$ et $\sqrt[3]{X''}$ dont le produit est réel. Les trois sommes ainsi obtenues sont les trois racines.

Or si X' et X'' sont réels, il faut, pour extraire leurs racines cubiques réelles par logarithmes, que leurs expressions soient ramenées à des formules monomes, et, si X' et X'' sont imaginaires conjugués, il faut les réduire d'abord à la forme trigonométrique $\rho(\cos\varphi \pm i \sin\varphi)$, pour avoir sous cette même forme et grouper les valeurs conjuguées de leurs racines cubiques imaginaires :

La méthode qui consiste à transformer les expressions algébriques de X' et X'' mérite ce reproche qu'elle laisse trop d'incertitude dans le choix de la ligne trigonométrique à introduire, pour obtenir le résultat correspondant à chaque cas.

Lorsque les trois racines de $x^3 + px + q = 0$ sont réelles, on fait souvent dépendre ces racines de celles de l'équation qui donne $\sin\frac{a}{3}$ en fonction de $\sin a$. On peut dire que cette méthode est aussi détournée qu'ingénieuse.

---

[*] Il est d'ailleurs complètement inutile de tracer cette ellipse et de déterminer le point ω ; il suffit de se donner le plan de front dans lequel doit être ω.

En principe, la question est résolue par une marche naturelle, si l'on commence par mettre sous une forme monome les racines réelles d'une équation du second degré, ou sous la forme trigonométrique, $\rho(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$, les racines imaginaires conjuguées, *sans se servir des formules algébriques de résolution.*

Rappelons brièvement ces opérations simples, dont l'enchaînement se retient aisément.

Soit $x^2 + px + q = 0$ une équation du second degré à coefficients réels. Nous distinguerons trois cas.

1° *Les racines sont réelles et de même signe.*

Puisque $x'x'' = q$, et que l'on a $q > 0$, on peut poser $x' = \sqrt{q}\,\mathrm{tg}\,\varphi$ et $x'' = \sqrt{q}\,\mathrm{cotg}\,\varphi$.

On détermine φ par l'équation

$$\sqrt{q}\,(\mathrm{tg}\,\varphi + \mathrm{cotg}\,\varphi) = -p\,;$$

d'où
$$\frac{\sqrt{q}}{\sin\varphi\cos\varphi} = -p, \qquad \text{et} \qquad \sin 2\varphi = -\frac{2\sqrt{q}}{p}.$$

Cette équation donne pour 2φ une infinité de valeurs, puisque la condition de possibilité, $\frac{4q}{p^2} \leqslant 1$, est une conséquence de l'hypothèse $p^2 - 4q \geqslant 0$. On calcule celle dont la valeur absolue est fournie par les tables. On en déduit les logarithmes des valeurs absolues de x' et x'', ce qui permet de calculer leurs racines cubiques réelles. La somme de ces racines cubiques donne la racine réelle de l'équation du troisième degré, dont l'équation considérée est la résolvante. Les deux racines imaginaires s'en déduiraient aisément, mais ont une moindre importance pratique.

2° *Les racines sont réelles et de signes contraires.*

Soit $q = -q'$. On peut poser

$$x' = \sqrt{q'}\,\mathrm{cotg}\,\varphi, \qquad x'' = -\sqrt{q'}\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

La valeur de φ satisfait à l'équation

$$\sqrt{q'}\,(\mathrm{cotg}\,\varphi - \mathrm{tg}\,\varphi) = -p\,;$$

d'où
$$\frac{\sqrt{q'}\cos 2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} = -p,$$

et
$$\mathrm{tg}\,2\varphi = -\frac{2\sqrt{q'}}{p}.$$

On calcule l'angle 2φ dont la valeur absolue est fournie par les tables, et l'on continue comme précédemment.

3° *Les racines sont imaginaires conjuguées.*

Posons
$$\begin{cases} x' = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ x'' = \rho(\cos\varphi - i\sin\varphi). \end{cases}$$

Les valeurs de ρ et φ doivent satisfaire aux conditions $x'x'' = q$, $x' + x'' = -p$, qui deviennent avec nos notations

$$\rho^2 = q, \qquad 2\rho\cos\varphi = -p.$$

On a donc
$$\rho = q^{\frac{1}{2}} \qquad \text{et} \qquad \cos\varphi = -\frac{p}{2\rho}.$$

La première formule donne pour ρ une valeur réelle, puisque par hypothèse on a $q > 0$. La seconde donne pour φ une infinité de valeurs, puisque la condition de possibilité $\frac{p^2}{4\rho^2} < 1$, ou $\frac{p^2}{4q} < 1$, est une conséquence de l'hypothèse $p^2 - 4q < 0$. On calcule celle de ces valeurs dont la *valeur absolue* est fournie par les tables.

Les trois racines cubiques imaginaires de x sont alors :

$$x'_1 = \rho^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right),$$

$$x'_2 = \rho^{\frac{1}{3}}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 120^\circ\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{3} + 120^\circ\right)\right],$$

$$x'_3 = \rho^{\frac{1}{3}}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3} - 120^\circ\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{3} - 120^\circ\right)\right].$$

Les trois racines cubiques de x'' sont les conjuguées de celles de x'. Désignons celles qui sont conjuguées deux à deux par le même indice. Pour avoir les racines de l'équation du troisième degré dont l'équation considérée est la résolvante, il faut ajouter les racines de même indice, puisque leur produit doit être réel. Ces trois racines réelles sont donc

$$x_1 = x'_1 + x''_1 = 2\rho^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\varphi}{3},$$

$$x_2 = x'_2 + x''_2 = 2\rho^{\frac{1}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 120^\circ\right),$$

$$x_3 = x'_3 + x''_3 = 2\rho^{\frac{1}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3} - 120^\circ\right).$$

Dans les trois cas, nous avons choisi la plus simple des valeurs de φ qui correspondent à la ligne trigonométrique considérée. Il résulte de nos calculs que toute autre détermination de φ, répondant à la même ligne trigonométrique, nous donnerait les mêmes racines. D'ailleurs on vérifie aisément que la seule modification qui puisse être introduite par une autre valeur de φ, est la permutation des racines x' et x'' de l'équation du second degré, ce qui n'altère pas la somme de leurs racines cubiques.

Il n'est pas inutile de faire remarquer que pour appliquer cette méthode à un exemple numérique donné, on ne doit pas écrire de mémoire les expressions finales de φ et de ρ en fonction des coefficients. Ce serait retomber dans le défaut de la transformation des formules littérales. Il suffit de se rappeler l'enchaînement logique des calculs, et d'opérer sur les résultats successifs.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (Concours de 1895).

428. — *Un cercle* (C) *et une parabole* (P) *sont représentés, en coordonnées rectangulaires, par les deux équations*

$$(C)\quad x^2 + y^2 - 4a^2 = 0, \qquad (P)\quad y^2 - 2ax - 4a^2 = 0;$$

d'un point A *pris sur l'axe* Oy, *on mène les tangentes au cercle, dont les points de contact sont* M *et* M', *et les tangentes à la parabole, dont les points de contact sont* N *et* N'.

1° *Démontrer que chacune des droites* MN, MN', M'N, M'N' *passe par un point fixe lorsque le point* A *décrit l'axe* Oy.

2° *Par les quatre points* M, M', N, N' *on peut faire passer une conique admettant l'axe des* y *pour axe de symétrie ; former l'équation de cette conique* (E).

3° *Trouver le nombre et la nature des coniques* (E) *qui passent par un point donné du plan, d'après la position de ce point dans le plan.*

4° *Construire la courbe décrite par les points de contact des coniques* (E) *avec les tangentes parallèles à la droite qui a pour équation* $y = x$. *Distinguer les portions du lieu qui conviennent à des ellipses de celles qui conviennent à des hyperboles.*

1° Soit u l'ordonnée du point A ; les coordonnées des points M et M′ sont déterminées par les équations du cercle et de la polaire du point A :

$$x^2 + y^2 - 4a^2 = 0, \qquad uy - 4a^2 = 0 ;$$

celles des points N et N′ sont données par les équations

$$y^2 - 2ax - 4a^2 = 0, \qquad uy - ax - 4a^2 = 0.$$

On trouve aisément, en posant $\qquad l^2 = u^2 - 4a^2$,

$$\mathrm{M}\begin{cases} x = \dfrac{2al}{u}, \\ y = \dfrac{4a^2}{u}, \end{cases} \qquad \mathrm{M}'\begin{cases} x = -\dfrac{2al}{u}, \\ y = \dfrac{4a^2}{u}, \end{cases} \qquad \mathrm{N}\begin{cases} x = \dfrac{l(u+l)}{a}, \\ y = u + l, \end{cases} \qquad \mathrm{N}'\begin{cases} x = \dfrac{-l(u-l)}{a}, \\ y = u - l. \end{cases}$$

La droite MN a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2al & 4a^2 & u \\ l(u+l) & u(u+l) & a \end{vmatrix} = 0$$

ou $$ax[4a^2 - u(u+l)] + ly[u(u+l) - 2a^2] - 2a^2l(u+l) = 0 ;$$

ce qui peut s'écrire, en remplaçant dans le coefficient de x $u^2 - 4a^2$ par l^2,

$$-a(x+2a)(u+l) + y[u(u+l) - 2a^2] = 0.$$

En changeant l en $-l$, on obtiendrait l'équation de la droite M′N′ ; nous voyons ainsi que les deux droites MN et M′N′ passent par le point fixe $(-2a, 0)$.

L'équation de la droite MN′ est

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2al & 4a^2 & u \\ -l(u-l) & u-l & a \end{vmatrix} = 0,$$

ou $$ax[4a^2 - u(u-l)] - y[lu(u-l) + 2a^2l] + 6a^2l(u-l) = 0,$$

ou encore $$ax(x+6a)(u-l) - y[u(u-l) + 2a^2] = 0.$$

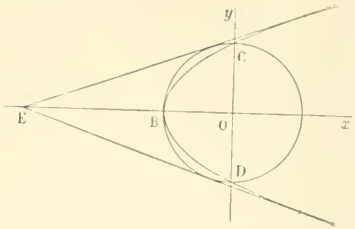
L'équation de la droite M′N se déduit de cette équation en y changeant l en $-l$: on en conclut que les deux droites MN′ et M′N passent par le point fixe $(-6a, 0)$.

Remarque. — Cette propriété est un cas particulier d'une propriété plus générale dont voici l'énoncé :

Soit I *un pôle double relatif à deux coniques ; par le point* I *passent deux cordes communes ; si par un point quelconque de l'une d'elles on mène des tangentes aux coniques la droite qui joint deux des points de contact (non situés sur la même conique) passe par l'un des ombilics qui appartiennent à la polaire du point* I.

La démonstration de ce théorème est fort simple. Projetons la figure de manière que la corde commune coïncide avec la droite de l'infini. Les deux coniques deviennent homothétiques ; si on leur mène des tangentes parallèles à une direction arbitraire, la droite joignant deux points de contact n'appartenant pas à la même conique passe par l'un des centres d'homothétie. Or ces deux points sont précisément les ombilics situés sur la polaire du pôle double qui est à l'infini.

Revenons maintenant au problème proposé. Le cercle (C) et la parabole (P) sont tangents au point



$B(-2a, 0)$ et ont deux autres points communs C et D sur l'axe Oy. Le pôle double par lequel passe la corde commune CD est à l'infini ; sa polaire est l'axe Ox. Les points fixes par lesquels passent les droites MN, MN', M'N, M'N' sont donc les ombilics situés sur Ox, c'est-à-dire le point B d'une part et d'autre part le point de rencontre E des deux tangentes communes symétriques par rapport à Ox. On vérifie aisément que ce point a pour abscisse $-6a$.

2° L'équation générale des coniques passant par les points N et N' est

$$y^2 - 2ax - 4a^2 + (ny - ax - 4a^2)(mx + ny + p) = 0$$

ou, en développant,

$$y^2(1 + nn) - max^2 + xy(mn - an) - x(2a + ap + 4a^2m) + y(pn - 4a^2n) - 4a^2 - 4a^2p = 0.$$

Pour que cette conique soit symétrique par rapport à Oy, il faut que les coefficients de xy et de x soient nuls, ce qui donne

$$mn - na = 0, \qquad 2 + p + 4am = 0,$$

d'où l'on tire

$$m = -\frac{2+p}{4a}, \qquad n = -\frac{n(2+p)}{4a^2}.$$

L'équation de la conique devient alors

$$(2+p)a^2x^2 + (4a^2 - n^2(2+p))y^2 + 8a^2ny(p+1) - 16a^4(p+1) = 0.$$

Exprimons que cette conique passe par l'un des points M ou M' ; on obtient facilement $p = 2$. L'équation de la conique (E) est donc

$$(E) \qquad a^2x^2 + (a^2 - n^2)y^2 + 6a^2ny - 12a^4 = 0.$$

3° En écrivant que la conique (E) passe par un point P (x, y) on a l'équation

$$(1) \qquad f(n) \equiv n^2y^2 - 6a^2ny - a^2(x^2 + y^2 - 12a^2) = 0 \ ;$$

cette équation étant du deuxième degré par rapport à n, on en conclut qu'il existe deux coniques (E) passant par le point P.

Pour que ces deux coniques soient réelles, il faut que l'équation (1) ait ses racines réelles ; on a la condition

$$9a^4y^2 + a^2y^2(x^2 + y^2 - 12a^2) > 0$$

ou

$$a^2y^2(x^2 + y^2 - 3a^2) > 0.$$

Le point P doit être extérieur au cercle (C') qui a pour centre le point O et pour rayon $a\sqrt{3}$.

Déterminons maintenant la nature des coniques qui passent au point P. La conique (E) est une ellipse, une hyperbole ou une parabole suivant que $a^2 - n^2$ est positif, négatif ou nul. On est donc conduit à comparer a et $-a$ aux racines de l'équation (1). On a

$$f(a) = -a^2(x^2 + 6ay - 12a^2),$$

$$f(-a) = -a^2(x^2 - 6ay - 12a^2).$$

Construisons les deux paraboles représentées par les équations

$$x^2 + 6ay - 12a^2 = 0, \quad (Q) \qquad x^2 - 6ay - 12a^2 = 0; \quad (Q')$$

le plan se trouve ainsi divisé en régions numérotées sur la figure 2.

Observons enfin que la conique (E) se réduit à deux droites si u est égal à $\pm 2a$. On a

$$f(+2a) = a^2[3(y-2a)^2 - x^2].$$

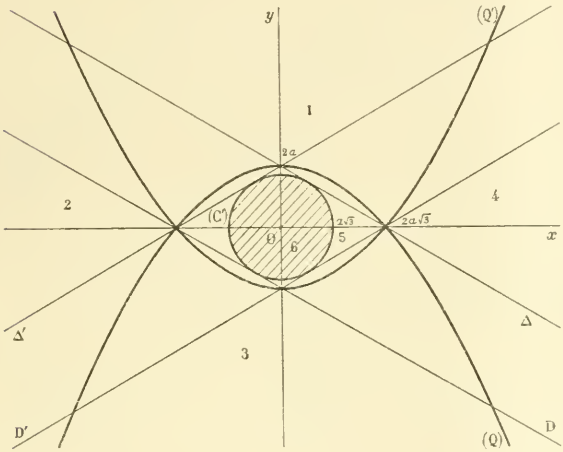
$$f(-2a) = a^2[3(y+2a)^2 - x^2].$$

Construisons les deux couples de droites représentés par les équations

$$3(y-2a)^2 - x^2 = 0, \quad (\Delta, \Delta') \qquad 3(y+2a)^2 - x^2 = 0. \quad (D, D').$$

Ces quatre droites sont tangentes au cercle (C') et passent par les points où les paraboles (Q) et (Q') rencontrent les axes.

Ces paraboles et ces couples de droites font partie de l'ensemble des coniques (E). Les régions numérotées sont seulement limitées par le cercle (C') et les paraboles.



Pour tout point de la région (1) on a $f(a) < 0$, $f(-a) > 0$; on en déduit, en désignant par u' et u'' les racines de l'équation (1),

$$-a < u' < a < u'',$$

et $a^2 - u'^2 > 0$, $a^2 - u''^2 < 0$; donc par tout point de la région (1) il passe une ellipse et une hyperbole.

Même résultat pour tous les points de la région (3).

Dans les régions (2) et (4), on a

$$f(a) < 0, \qquad f(-a) < 0,$$

$$u' < -a < a < u'',$$

les deux coniques qui passent en un point d'une de ces régions sont des hyperboles.

Pour tout point de la région (5), on a $f(a) > 0$, $f(-a) > 0$. Comparons a et $-a$ à la demi-somme des racines $\frac{3a^2}{y}$. On a

$$\frac{3a^2}{y} - a = \frac{a(3a-y)}{y},$$

$$\frac{3a^2}{y} + a = \frac{a(3a+y)}{y};$$

y étant compris entre $-3a$ et $+3a$, les deux seconds membres ont le signe de y. Si y est positif, a et $-a$ sont inférieurs aux deux racines; si y est négatif, a et $-a$ sont supérieurs aux deux racines. Dans les deux cas $a^2 - u'^2$ et $a^2 - u''^2$ sont négatifs; par tout point de la région (5) passent deux hyperboles.

Si le point est à l'intérieur du cercle (C') [région 6], il ne passe par ce point aucune conique réelle.

Si le point est sur la parabole (Q), par exemple, l'une des coniques qui passe en ce point est précisément la parabole (Q), l'autre est une hyperbole (on le voit par continuité en supposant que le point P passe de la région (3) dans la région (4)).

Résultat analogue sur la parabole (Q').

Par tout point du cercle (C) passent deux hyperboles confondues.

On peut ajouter que, quelle que soit la région où se trouve le point P, si ce point est situé sur l'une des droites Δ, Δ', par exemple, l'une des coniques qui passe en ce point se compose précisément des deux droites Δ et Δ'.

4° On a l'équation du lieu demandé en éliminant u entre l'équation de la conique (E),

$$a^2x^2 + (a^2 - u^2)y^2 + 6a^2uy - 12a^4 = 0,$$

et celle du diamètre conjugué de la direction $y = x$,

$$a^2x + (a^2 - u^2)y + 3a^2u = 0.$$

Ajoutons à la première de ces équations la seconde multipliée par $-y$, on a

$$a^2(x^2 - xy) + 3a^2uy - 12a^4 = 0,$$

d'où l'on tire
$$u = \frac{xy - x^2 + 12a^2}{3y};$$

en remplaçant dans la seconde équation, il vient

$$(2) \qquad a^2(x + y) - \frac{(xy - x^2 + 12a^2)^2}{9y} + \frac{a^2(xy - x^2 + 12a^2)}{y} = 0,$$

ou
$$(x^2 - xy)^2 - 3a^2(5x^2 - 2xy + 3y^2) + 36a^4 = 0.$$

C'est l'équation d'une courbe du quatrième degré, symétrique par rapport au point O.

Pour la construire, on peut ordonner l'équation par rapport à y; on obtient

$$y^2(x^2 - 9a^2) - 2xy(x^2 - 3a^2) + (x^2 - 3a^2)(x^2 - 12a^2) = 0.$$

La courbe étant symétrique par rapport à l'origine, il suffira de donner à x des valeurs positives.

Pour que les racines soient réelles il faut qu'on ait

$$x^2(x^2 - 3a^2)^2 - (x^2 - 9a^2)(x^2 - 3a^2)(x^2 - 12a^2) > 0,$$

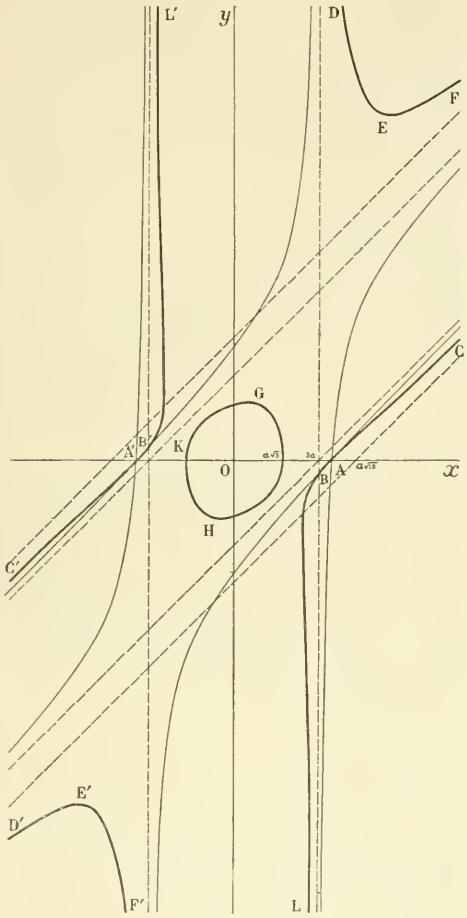
ou
$$(x^2 - 3a^2)(x^2 - 6a^2) > 0.$$

Nous ferons varier x de 0 à $a\sqrt{3}$ et de $a\sqrt{6}$ à $+\infty$. On obtient sans difficulté le tableau de variations suivant :

x	0		$a\sqrt{3}$	$a\sqrt{6}$		$3a$		$a\sqrt{12}$		$+\infty$
y'	$2a$	$+$	0	$-a\sqrt{6}$	$-$	$-\frac{a}{2}$	$-$	0	$+$	$+\infty$
y	$-2a$	$-$	0	$-a\sqrt{6}$	$-$	$-\infty \mid +\infty$	$+$	$6a\sqrt{12}$	$+$	$+\infty$

On achève par symétrie. La construction met en évidence les asymptotes $x - 3a = 0$, $x + 3a = 0$. Il y en a deux autres, parallèles à la direction $y - x = 0$; elles ont pour équations

$$y - x - a\sqrt{18} = 0, \qquad y - x + a\sqrt{18} = 0.$$



Chacune d'elles ne peut rencontrer la courbe qu'en un point; on en conclut aisément la position de la courbe par rapport à ses asymptotes.

Il s'agit maintenant de distinguer les portions du lieu qui conviennent à des ellipses de celles qui conviennent à des hyperboles. Un point (x, y) du lieu conviendra à une ellipse si la valeur de u correspondante à ce point rend positif $a^2 - u^2$. Or on a

$$u = \frac{xy - x^2 + 12a^2}{3y};$$

il faut donc étudier le signe de l'expression

$$a^2 - \frac{(xy - x^2 + 12a^2)^2}{9y^2}$$

ou

$$(3)\quad (3ay + xy - x^2 + 12a^2)(3ay - xy + x^2 - 12a^2).$$

En égalant chacun de ces facteurs à zéro, on obtient les équations de deux hyperboles symétriques l'une de l'autre par rapport à l'origine. La première a pour asymptotes $x + 3a = 0$, $x - y - 3a = 0$. En se reportant à l'équation du lieu, mise sous la forme (2), on voit aisément que ces deux hyperboles rencontrent le lieu aux quatre points A, A′, B, B′.

Or l'origine rend négatif le produit (3); par conséquent les portions du lieu qui seront par rapport aux deux hyperboles dans la même région que l'origine correspondront à des hyperboles, les autres à des ellipses.

On voit ainsi que les points du lieu relatifs à des hyperboles sont sur les branches BAC, B′A′C′, DEF, D′E′F′, GHK. Au contraire, les branches BL et B′L′ sont formées par les points relatifs à des ellipses.

Enfin les deux points B et B′ correspondent aux deux paraboles de l'ensemble des coniques (E), c'est-à-dire aux paraboles Q′ et Q.

A. L., à Alençon.

Solution analogue par M. Pégorier, répétiteur au collège de Cette.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

415. — *Soit* A *un point fixe pris sur le côté* Ox *d'un angle droit* xOy *;* O′ *est le centre d'un cercle* Γ *tangent à* Ox *au point* A *et rencontrant* Oy *en deux points* B *et* C *: l'hyperbole équilatère* H *passant par* O′, A, B, C *rencontre le cercle* Γ *en un quatrième point,* M. *Lorsque le cercle* Γ *varie :*

1° *Le lieu du centre* ω *de l'hyperbole* H *est une circonférence ;*

2° *Le lieu du point* M *est une circonférence ;*

3° *Le lieu du point* M′ *diamétralement opposé à* M *dans le cercle* Γ *est une cissoïde de Dioclès ;*

4° *La droite* Mω *rencontre l'hyperbole* H *en un second point qui reste fixe ;*

5° *La droite menée par* O′ *parallèlement à la tangente en* M *à l'hyperbole* H *enveloppe une parabole.*

Désignons par a l'abscisse du point A et par λ l'ordonnée du centre du cercle Γ ; l'équation de ce cercle, avec les notations choisies, est

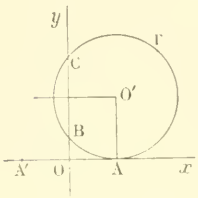
$$x^2 + y^2 - 2ax - 2\lambda y + a^2 = 0 ;$$

d'autre part l'équation générale des hyperboles équilatères du plan est

$$x^2 - y^2 + 2Axy + 2Bx + 2Cy + D = 0 ;$$

pour exprimer que l'une d'elles rencontre l'axe Oy aux mêmes points que le cercle Γ, nous sommes conduit à exprimer que les deux équations

$$y^2 - 2\lambda y + a^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad -y^2 + 2Cy + D = 0$$



ont les mêmes racines, ce qui nous donne immédiatement les deux valeurs de C et D, $C = \lambda$, $D = -a^2$; par suite l'hyperbole cherchée a une équation de la forme

$$x^2 - y^2 + 2Axy + 2Bx + 2\lambda y - a^2 = 0.$$

Il nous reste à exprimer qu'elle rencontre la droite $x = a$ aux deux points dont les ordonnées sont 0 et λ ; nous trouvons ainsi $B = 0$, $A = -\frac{\lambda}{2a}$. L'équation de l'hyperbole H est donc

$$H = x^2 - y^2 - \frac{\lambda}{a}xy + 2\lambda y - a^2 = 0.$$

1° Nous aurons le lieu du centre ω de cette courbe en éliminant λ entre les équations obtenues en égalant à 0 les deux dérivées partielles par rapport à x et à y, c'est-à-dire entre les équations

$$2x - \frac{\lambda y}{a} = 0 \qquad \text{et} \qquad 2y + \frac{\lambda x}{a} - 2\lambda = 0 ;$$

cette élimination est linéaire et nous obtenons de suite l'équation du lieu,

$$(1) \qquad x^2 + y^2 - 2ax = 0.$$

Ce lieu est un cercle ayant pour centre le point A et pour rayon AO.

2° Nous pourrions obtenir très simplement le lieu du point M en éliminant λ entre l'équation du cercle et celle de l'hyperbole, puis en supprimant les deux facteurs x et y qui, égalés à 0, donnent alors deux lieux étrangers ; mais il vaut mieux, pour la suite, calculer les coordonnées du point M en fonction de λ. Ce calcul se fait très simplement en ajoutant les deux équations rappelées ci-dessus ; on a ainsi

$$2x^2 - \frac{\lambda}{a}xy - 2ax = 0 ;$$

cette équation représente deux droites, deux sécantes communes aux deux coniques : la droite $x = 0$, qui passe aux deux points B et C, et la droite $2x - \frac{\lambda}{a}y - 2a = 0$, qui passe au point A et au point M. En remplaçant dans l'équation du cercle $x = a$ par $\frac{\lambda}{2a}y$, on obtient l'équation suivante :

$$y^2 - 2\lambda y + \frac{\lambda^2 y^2}{4a^2} = 0,$$

qui donne l'ordonnée du point A, $y = 0$, et celle du point M, $y = \frac{8\lambda a^2}{\lambda^2 + 4a^2}$; il n'y a plus qu'à porter dans l'équation de la droite obtenue antérieurement cette valeur de y pour avoir l'abscisse du

point M ; les deux coordonnées de ce point sont donc

$$(2)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{5a\lambda^2 + 4a^3}{\lambda^2 + 4a^2}, \\[2ex] y = \dfrac{8a^2\lambda}{\lambda^2 + 4a^2}. \end{cases}$$

L'élimination de λ entre ces deux équations donne de suite l'équation ordinaire du lieu,

$$(3)\qquad x^2 + y^2 - 6ax + 5a^2 = 0\ ;$$

ce lieu est un cercle ayant son centre sur Ox.

3° Désignons par x et y les coordonnées du point M', et proposons-nous de calculer ces nombres en fonction de λ ; nous avons simplement à exprimer que les sommes obtenues en ajoutant à ces nombres les coordonnées correspondantes du point M, données par les équations (2), sont les doubles des coordonnées du centre O' du cercle Γ ; nous obtenons ainsi

$$(4)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{4a^3 - 3a\lambda^2}{\lambda^2 + 4a^2}, \\[2ex] y = \dfrac{2\lambda^3}{\lambda^2 + 4a^2}; \end{cases}$$

ces deux équations donnent le lieu du point M' et montrent que ce lieu est une courbe unicursale. L'élimination de λ entre ces deux équations est encore immédiate et donne l'équation ordinaire du lieu,

$$(x - a)^3 + y^2(x + 3a) = 0.$$

Si l'on porte les axes au point A, on obtient l'équation

$$(5)\qquad X^3 + XY^2 + 4aY^2 = 0,$$

qui montre que le lieu est une cissoïde de Dioclès rapportée actuellement aux axes les plus simples.

4° Les deux équations du centre de l'hyperbole H obtenues dans la première partie donnent de suite les coordonnées du point ω en fonction de λ ; ce sont

$$x = \frac{2a\lambda^2}{\lambda^2 + 4a^2}, \qquad y = \frac{4a^2\lambda}{\lambda^2 + 4a^2};$$

par suite l'équation de la droite qui joint le point M à ce point ω est

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 5a\lambda^2 + 4a^3 & 8a^2\lambda & \lambda^2 + 4a^2 \\ 2a\lambda^2 & 4a^2\lambda & \lambda^2 + 4a^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, après suppression du facteur $\lambda^2 + 4a^2$,

$$4a^2\lambda x - (3a\lambda^2 + 4a^3)y + 4a^3\lambda = 0.$$

Cette droite passe visiblement au point fixe A', dont les coordonnées sont $-a$ et 0, et qui est situé sur l'hyperbole H.

5° En désignant par x et y les coordonnées du point M, données d'ailleurs par les équations (2), la tangente à l'hyperbole en ce point a pour coordonnées

$$XH'_x + YH'_y + H'_z = 0\ ;$$

la parallèle à cette droite menée par le point O a pour équation

$$(X - a)H'_x + (Y - \lambda)H'_y = 0\ ;$$

or $H'_x = 2a$, $H'_y = -3\lambda$; par suite l'équation de la droite envisagée est

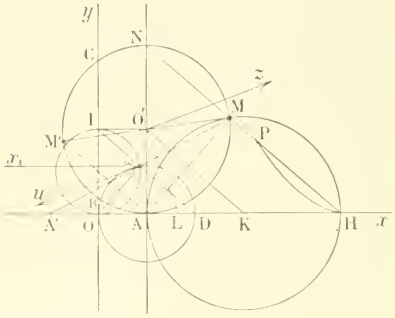
$$2a(x - a) - 3\lambda(y - \lambda) = 0.$$

Il n'y a plus qu'à exprimer que cette équation du second degré en λ a une racine double pour obtenir l'enveloppe demandée ; on obtient ainsi la parabole

$$(6) \qquad 3y^2 - 8a(x - a) = 0. \qquad \text{E.-N. BARISIEN.}$$

Bonnes solutions analytiques : MM. E. Barbé (Douai) ; G. Laederick (Rouen) ; L. Bailly (Dijon) ; J. Marchal ; P. Xambeu (collège Chaptal) ; G. A. Poitilliart (à Joigny) : Mario Guesde.

Solution géométrique. — L'hyperbole équilatère H, passant aux trois points A, B et C, passe par le point de concours des hauteurs de ce triangle, c'est-à-dire par le point A′ symétrique de A par rapport au point O ; son centre est donc sur le cercle des neuf points du triangle AA′C ; soit I le milieu de BC ; le cercle des neuf points du triangle AA′C est le cercle décrit sur OI comme diamètre ; c'est un cercle homothétique au cercle O′, le centre d'homothétie étant le point A′ et le rapport d'homothétie, $\frac{1}{2}$. D'autre part, la droite qui joint le milieu de BC au milieu de O′A est un diamètre de l'hyperbole ; le centre ω de cette courbe est donc au point de rencontre de ce diamètre avec le cercle des neuf points du triangle AA′C ; cette droite rencontre la droite Ox en un point D tel que AD = OA ; le lieu du point ω est donc le cercle décrit sur OD comme diamètre, ou du point A comme centre avec AO pour rayon.



Par le point A menons AM parallèle à Oω, jusqu'à sa rencontre avec le cercle O′ en M ; le point M est le correspondant de ω dans l'homothétie que nous avons signalée ; les trois points A′, ω et M sont donc en ligne droite et l'on a A′M = 2A′ω ; le lieu du point M est, par suite, un cercle homothétique du cercle décrit sur OD comme diamètre, le point A′ étant le centre d'homothétie et le rapport d'homothétie étant égal à 2. Prenons AH = 4OA ; le lieu du point M est le cercle décrit sur AH comme diamètre. D'ailleurs, puisque l'on a ωM = ωA′ et que le point A′ est un point de l'hyperbole, le point M est le quatrième point de rencontre de l'hyperbole avec le cercle O′, et la deuxième question est résolue.

Soit M′ le point diamétralement opposé à M dans le cercle O′ ; AM′ est perpendiculaire sur AM et, par suite, parallèle à HM ; d'ailleurs HM rencontre le cercle O′ en un point N qui est diamétralement opposé à A, dans le cercle O′ ; par conséquent, si on prend HP = MN, le lieu du point P est une cissoïde de Dioclès. D'autre part, AM′, égal et parallèle à MN, est égal à HP ; le lieu du point M′ est donc une cissoïde de Dioclès obtenue en faisant subir à la précédente la translation HA.

Nous avons vu que la droite Mω passe au point A′ ; elle rencontre donc l'hyperbole H en un point fixe, A′. Pour trouver l'enveloppe de la parallèle à la tangente à l'hyperbole en M menée par le point O′, il faut d'abord observer que cette parallèle O′z est parallèle au diamètre conjugué ωu de ωA′ ou ωM ; d'autre part ωO et ωx_1 forment aussi un système de diamètres conjugués de l'hyperbole ; donc les angles A′ωO et $u\omega x_1$ sont égaux, de même, les angles $x_1\,\omega$A′ et $u\omega$O. Menons alors O′K parallèle à ID et O′L perpendiculaire à O′z ou à ωu ; nous aurons DK = a, et ang. KO′L = ang. ωA′D ; puis O′KL = ωDA′ ; par suite les deux triangles A′ωD et O′KL sont semblables. Nous avons donc $\frac{\text{LK}}{\omega\text{D}} = \frac{\text{O′K ou DI}}{\text{A′D}}$; par conséquent $\text{LK} = \frac{\omega\text{D.DI}}{\text{A′D}}$; or ωD.DI est la puissance du point D par rapport au cercle décrit sur OI comme diamètre ; nous avons donc $\text{LK} = \frac{4a^2}{3a} = \frac{4a}{3}$, puis $\text{AL} = \frac{2a}{3}$; le point L est donc fixe. Il en résulte immédiatement que l'enveloppe de O′z est une parabole dont le foyer est L et la tangente au sommet AO′.

Lucien Sueur,

Soldat au 113e de ligne, élève de l'École normale supérieure.

Très bonne solution géométrique : M. V. Bertrand, répétiteur au lycée de Douai.
Autres solutions géométriques : MM. J. B. Foulon (lycée de Lille) ; Mario Guesde.
Bonnes solutions analytique et géométrique : MM. C. Naudin, soldat au 26e de ligne ; Vasnier, lycée de Versailles.

416. — *On considère une ligne plane dont l'équation en coordonnées homogènes est* $f(X, Y, Z) = 0$, *et l'on forme les deux équations*

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 f'_x + y_1 f'_y + z_1 f'_z = 0, \\ \dfrac{x_1 f''_{x^2} + y_1 f''_{xy} + z_1 f''_{xz}}{f'_x} = \dfrac{x_1 f''_{xy} + y_1 f''_{y^2} + z_1 f''_{yz}}{f'_y}. \end{cases}$$

Ces deux équations définissent une transformation des figures, en vertu de laquelle à tout point M *de coordonnées* x, y, z, *il correspond un seul point* M_1 *de coordonnées* x_1, y_1, z_1, *et à tout point* M_1 *un certain nombre de points* M.

1° *Connaissant le point* M, *quelle est la définition géométrique du point* M_1, *et inversement, connaissant le point* M_1, *quelle est la définition géométrique du point* M ?

2° *Montrer que l'inversion est un cas particulier de la transformation définie par les formules* (1).

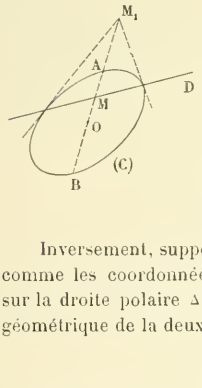
3° *Trouver le lieu des points* M *quand le point* M_1 *est à l'infini, et inversement. Montrer que si le point* M *est à l'infini, les asymptotes de la ligne* $f(X, Y, Z) = 0$ *font partie du lieu des points* M_1.

4° *Connaissant le degré d'une ligne décrite par le point* M, *trouver le degré de la ligne correspondante décrite par le point* M_1, *et inversement.*

5° *Etendre aux figures de l'espace la transformation définie par les formules* (1).

1° et 2° Supposons que l'on se donne le point M_1 et, dans les formules (1), considérons x et y comme les coordonnées courantes. Elles expriment alors : la première, que le point M est sur la première polaire P du point M_1 par rapport à la ligne $f(X, Y, Z) = 0$, que nous appellerons la *courbe directrice*; la deuxième, que la tangente en M à la courbe P est parallèle à la droite polaire du point M par rapport à la directrice. Il en résulte, *qu'à un point* M_1 *les équations* (1) *font correspondre les points de la première polaire de* M_1 *en lesquels la tangente à cette première polaire est parallèle à la droite polaire du point* M *par rapport à la directrice.*

Supposons, en particulier, que la directrice soit une conique (C). La première polaire de M_1 est alors une droite D; la tangente en un point M de cette droite coïncide avec la droite D, et enfin il n'y a, sur D, qu'un point M dont la polaire par rapport à (C) soit parallèle à D : c'est le point de rencontre de D avec le diamètre de la conique qui passe par M_1. Dans le cas particulier où la directrice est une conique, la transformation (1) peut donc être définie de la manière suivante : *On mène le diamètre* AOB *de la conique qui passe par le point* M_1, *et l'on prend le conjugué harmonique* M *du point* M_1 *par rapport aux deux points de rencontre* A *et* B *de ce diamètre avec la courbe : on obtient ainsi le point* M *qui correspond au point* M_1.



Dans le cas examiné, les formules (1) définissent donc bien une inversion.

Inversement, supposons que le point M soit donné, et, dans les équations (1), considérons x_1, y_1, z_1 comme les coordonnées courantes. La première de ces équations exprime alors que le point M_1 est sur la droite polaire Δ du point M par rapport à la directrice, et il est aisé d'avoir la signification géométrique de la deuxième. Considérons en effet l'équation

$$X^2 f''_{x^2} + Y^2 f''_{y^2} + Z^2 f''_{z^2} + 2YZ f''_{yz} + 2ZX f''_{zx} + 2XY f''_{xy} = 0,$$

qui représente la conique polaire du point M par rapport à la directrice, et écrivons l'équation de la polaire du point M_1 par rapport à cette conique.

Nous obtenons ainsi l'équation

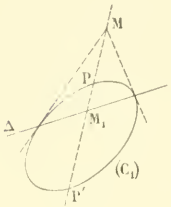
$$(2)\qquad X[x_1 f''_{x^2} + y_1 f''_{xy} + z_1 f''_{xz}] + Y[x_1 f''_{xy} + y_1 f''_{yz} + z_1 f''_{yz}] + Z[x_1 f''_{xz} + y_1 f''_{yz} + z_1 f''_{z^2}] = 0,$$

qui va nous permettre de donner la signification géométrique de la deuxième équation (1) quand on y considère x_1, y_1, z_1 comme les coordonnées courantes.

Il est visible en effet que, dans ces conditions, la deuxième équation (1) exprime que la droite Δ est parallèle à la droite représentée par l'équation (2) dans laquelle les coordonnées courantes sont X, Y, Z.

Si l'on observe alors que Δ est aussi la polaire du point M par rapport à la conique polaire de ce point on voit que le point M_1 se déduira du point M par la construction suivante :

On trace la conique polaire (C_1) *du point* M *par rapport à la directrice, on mène le diamètre* MPP′ *de cette conique et l'on prend le point* M_1 *conjugué harmonique du point* M *par rapport aux deux points* P *et* P′ *: le point* M_1 *ainsi obtenu est celui qui correspond au point* M ; car la polaire de M_1 par rapport à (C_1) est bien parallèle à la polaire du point M par rapport à la même conique (C_1).



En particulier, si la directrice est une conique, elle coïncide avec (C_1), et l'on retrouve encore la transformation par rayons vecteurs réciproques.

3° Pour obtenir le lieu des points M quand le point M_1 est à l'infini, il suffit de faire $z_1 = 0$ dans les équations (1), qui deviennent ainsi

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{c} x_1 f'_x + y_1 f'_y = 0, \\ \dfrac{x_1 f''^2_x + y_1 f''_{xy}}{f'_x} = \dfrac{x_1 f''_{xy} + y_1 f''^2_y}{f'_y}. \end{array}\right.$$

L'équation du lieu des points M s'obtient alors en éliminant x_1 et y_1 entre ces deux équations homogènes ; cette élimination donne, tous calculs effectués,

$$(4)\qquad (f'_x)^2 f''^2_y - 2 f'_x f'_y f''_{xy} + (f'_y)^2 f''^2_x = 0.$$

Le lieu des points M, quand le point M_1 est à l'infini, est donc une courbe de degré $3m - 4$.

Ce résultat n'est d'ailleurs qu'un cas particulier du suivant, plus général et facile à établir :

Quand le point M_1 *décrit une droite, le point* M *décrit une courbe de degré* $3m - 4$.

Si l'on se reporte à la construction qui donne le point M_1 quand on connaît le point M, il est possible de donner une autre forme à l'équation (4). En vertu de cette construction, le point M_1 est l'intersection de la polaire du point M par rapport à la conique (C_1) avec le diamètre de cette conique qui passe par M. Si alors le point M_1 est à l'infini, ces deux droites sont parallèles, ce qui signifie que le point M a une position telle que sa polaire par rapport à (C_1) soit parallèle au diamètre de cette conique qui passe par M. Or, ceci ne peut avoir lieu que si le point M est sur une asymptote de la conique (C_1). Mais, si l'on pose

$$\Pi = \begin{vmatrix} f''^2_x & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''^2_y & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''^2_z \end{vmatrix} \qquad \text{et} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} f''^2_x & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''^2_y \end{vmatrix},$$

les deux asymptotes de la conique (C_1) sont représentées par l'équation

$$X^2 f''^2_x + Y^2 f''^2_y + Z^2 f''^2_z + 2YZ f''_{yz} + 2ZX f''_{zx} + 2XY f''_{xy} - \frac{\Pi}{\Delta} = 0.$$

Si donc on exprime que le point $M(x, y, z)$ est sur cette courbe, on a l'équation du lieu des points M ; cette équation s'écrit

$$m(m-1) f(xyz) - \frac{\Pi}{\Delta} = 0,$$

et nous laissons au lecteur le soin d'en tirer des conclusions évidentes.

Passons maintenant au problème inverse, et cherchons le lieu des points M_1 quand le point M est à l'infini. Posons pour cela

$$f(XYZ) = \varphi_m(XY) + Z\varphi_{m-1}(XY) + Z^2\varphi_{m-2}(XY) + \cdots,$$

et faisons $z = 0$ dans les équations (1). Nous obtenons ainsi, pour définir le point M_1, les équations

$$x_1 \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} + y_1 \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} + z_1 \varphi_{m-1}(xy) = 0,$$

$$\frac{x_1 \dfrac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x^2} + y_1 \dfrac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x \partial y} + z_1 \dfrac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial x}}{\dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x}} = \frac{x_1 \dfrac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x \partial y} + y_1 \dfrac{\partial^2 \varphi_m}{\partial y^2} + z_1 \dfrac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y}}{\dfrac{\partial \varphi_m}{\partial y}}.$$

Ces équations sont homogènes en x et en y, de sorte que si l'on y fait $z_1 = 1$, elles donnent x_1 et y_1 en fonction rationnelle d'un paramètre variable, le rapport $\frac{y}{x}$. On constate d'ailleurs facilement que les expressions de x_1 et de y_1 en fonction de ce paramètre sont de degré $3m - 4$, en sorte que le lieu des points M_1 quand le point M est à l'infini semble être de ce degré. Mais il est aisé de voir que ce degré s'abaisse *parce que les asymptotes de la directrice font partie du lieu*.

Pour cela, reportons-nous à la définition du point M à l'aide du point M_1, et supposons que le point M_1 soit sur une asymptote de la directrice; sa première polaire par rapport à cette directrice passe alors par le point à l'infini sur l'asymptote considérée : soit M ce point à l'infini. La tangente en ce point à la première polaire est évidemment parallèle à l'asymptote et, d'un autre côté, la droite polaire de ce même point par rapport à la directrice n'est autre chose que l'asymptote elle-même; il en résulte que le point M correspond au point M_1, et, comme le point M_1 est quelconque sur l'asymptote, les asymptotes de la directrice font partie du lieu des points M_1 quand le point M est à l'infini. Donc le lieu des points M_1 est une courbe unicursale de degré $3m - 4 - m = 2(m - 2)$.

4° Supposons que le point M décrive une ligne L de degré p, et cherchons le degré du lieu L_1 décrit par le point M_1. Pour cela cherchons le nombre des points à l'infini sur L_1. Nous l'obtiendrons en cherchant le nombre des points de rencontre de L avec la courbe (4) lieu des points M quand le point M_1 est à l'infini. Les degrés respectifs des deux courbes étant p et $3m - 4$, le nombre de leurs points de rencontre est $p(3m - 4)$; donc la courbe L_1 est de degré $(3m - 4)p$.

Inversement, on voit d'une manière analogue que si L_1 est de degré p, L est de degré $p(3m - 4)$. C'est ainsi, en particulier, qu'une courbe de degré p transformée par inversion donne une courbe de degré $2p$, puisque m est dans ce cas égal à 2.

5° Pour étendre la transformation aux figures de l'espace, il suffit de partir des formules

$$x_1 f'_x + y_1 f'_y + z_1 f'_z + t_1 f'_t = 0,$$

$$\frac{x_1 f''_{x^2} + y_1 f''_{yx} + z_1 f''_{zx} + t_1 f''_{xt}}{f'_x} = \frac{x_1 f''_{xy} + y_1 f''_{y^2} + \cdots}{f'_y} = \frac{x_1 f''_{xz} + y_1 f''_{yz} + \cdots}{f'_z}.$$

Les développements qui précèdent dispensent d'entrer dans de plus longs détails.

Nous terminerons en engageant le lecteur à faire une étude plus approfondie de cette transformation : cela ne serait probablement pas dépourvu d'intérêt.

X. A.

QUESTIONS PROPOSÉES

478. — D'un point M du plan d'une ellipse on mène les tangentes à cette courbe; soient P, Q les points de contact. On désigne par H le point de rencontre des hauteurs du triangle MPQ.

1° Prouver que les points M et H sont conjugués par rapport au cercle lieu des sommets des angles droits circonscrits. En conclure la construction du point H au moyen de deux droites quand le point M est donné.

2° En conclure le lieu des points M pour lesquels le point H se trouve sur l'ellipse proposée.

3° On donne le point H, trouver le point M. Montrer que le problème comporte deux solutions M, M′ toujours réelles, que l'on obtient en coupant par une droite l'hyperbole des normales (hyperbole d'Apollonius) relative au point H.

4° Prouver que le triangle HMM′ est conjugué par rapport au cercle lieu des sommets des angles droits circonscrits.

5° Pouvait-on déduire cette dernière propriété de cette proposition générale que, s'il existe un triangle conjugué par rapport à une conique et inscrit dans une autre, il en existe une infinité ?

6° Pourquoi les diamètres de l'ellipse qui passent en M et M′ sont-ils conjugués ?

479. — Soit O un point pris sur l'intersection de deux plans, P et P′ ; étudier le complexe des droites Δ qui percent respectivement les plans P et P′ en des points A et A′, tels que OA = OA′.

HENET, à Toulouse.

Exercices tirés du premier volume de la *Théorie des Nombres* de E. LUCAS :

480. — Dans le développement du carré de

$$1 + x + 2x^2 + \cdots + px^p,$$

le coefficient de x^q, pour $q < p$, est égal à $\frac{q^3 + 11q}{6}$.

481. — Le nombre des manières dont on peut amener le point n avec p dés à jouer est le coefficient de x^n dans le développement de

$$(x + x^2 + x^3 + \cdots + x^6)^p.$$

482. — Un récipient clos est exactement rempli d'eau liquide à 0° sous la pression d'une atmosphère. On refroidit le tout à — 1°. Que devient la pression intérieure dans l'hypothèse où l'eau reste en surfusion ? Comment pourrait-on calculer la fraction d'eau congelée en supposant qu'il n'y ait pas surfusion ?

Coefficient de dilatation de l'eau entre — 1° et 0° . . . . . $\alpha = -60 \times 10^{-6}$.

Coefficient de compressibilité de l'eau (diminution de volume pour une mégadyne par centimètre carré) . . . . . $\mu = 50 \times 10^{-6}$.

Coefficient de dilatation cubique de l'enveloppe . . . . . $k = 23 \times 10^{-6}$.

Coefficient de compressibilité de l'enveloppe (augmentation de volume pour une mégadyne par centimètre carré) . . . . . $\lambda = 2{,}2 \times 10^{-6}$.

DEUXIEME PARTIE

ÉCOLE CENTRALE (Seconde session de 1895).

Géométrie analytique.

464. — *Les axes de coordonnées étant supposés rectangulaires, on demande l'équation générale des hyperboles équilatères admettant une asymptote passant par un point fixe* B *de l'axe des* y *et dont le coefficient angulaire soit* m, *telles en outre que le produit des abscisses à l'origine des asymptotes soit constant et que le carré du demi-axe transverse soit* $2a^2$.

Faisant varier m *et* a,

1° *Démontrer que les axes de symétrie de ces hyperboles forment un faisceau passant par deux points fixes et prouver géométriquement que le lieu des sommets de celles de ces hyperboles dont les axes transverses sont égaux est un limaçon de Pascal.*

2° *On considérera les hyperboles du faisceau telles que, l'origine des coordonnées se trouvant avec la courbe dans un même angle des asymptotes, le produit de* m *et des abscisses à l'origine des asymptotes soit de signe contraire au produit des distances de l'origine aux asymptotes.*

On démontrera que, par un point du plan, on peut mener deux hyperboles de ce système ayant un axe transverse donné.

3° *Trouver le lieu* Δ *des points par lesquels on peut mener deux de ces hyperboles telles qu'une asymptote, passant par* B, *ait pour coefficient angulaire* $+1$, *pour l'une, et* -1, *pour l'autre.*

4° *On considérera, pour chaque point du lieu* Δ, *les hyperboles qui répondent, l'une à la valeur maximum, l'autre à la valeur minimum de l'axe transverse ; on leur mènera une tangente commune et on cherchera le lieu du milieu de la distance des points de contact.*

Désignons par b l'ordonnée du point fixe B ; l'équation de l'asymptote qui passe en ce point est $y - b - mx = 0$, et cette droite a pour abscisse à l'origine le nombre $-\frac{b}{m}$. Si donc nous représentons par k le produit constant des abscisses à l'origine des deux asymptotes, le nombre correspondant de la seconde asymptote sera donné par l'équation $-\frac{bx}{m} = k$ et aura, par suite, pour valeur $x = -\frac{km}{b}$; d'autre part, la seconde asymptote est perpendiculaire à la première ; elle aura donc pour équation

$$y = -\frac{1}{m}\left(x + \frac{km}{b}\right) \qquad \text{ou} \qquad my + x + \frac{km}{b} = 0.$$

Cette équation montre immédiatement que la seconde asymptote passe aussi par un point fixe de l'axe des y, ayant pour ordonnée $-\frac{k}{b}$.

L'équation générale des hyperboles considérées est alors

$$(y - mx - b)\left(my + x + \frac{km}{b}\right) - h = 0,$$

h ayant une valeur que nous allons déterminer en fonction des données. Pour cela portons les axes parallèlement à eux-mêmes au centre de cette conique ; les premiers membres des équations des asymptotes se réduisent à leurs parties du premier degré, et, par suite, l'équation de l'hyperbole se réduit à

$$(y - mx)(my + x) - h = 0,$$

ou à

$$mx^2 + (1 - m^2)xy + my^2 - h = 0.$$

Coupons maintenant cette conique par le cercle $x^2 + y^2 - 2a^2 = 0$ et exprimons que les droites qui joignent l'origine aux points de rencontre des deux courbes sont confondues ; nous aurons à former une combinaison homogène des deux équations,

$$(-2a^2m - h)x^2 + 2a^2(1 - m^2)xy + (2a^2m - h)y^2 = 0,$$

et à écrire que le premier membre de cette nouvelle équation est un carré parfait ; nous obtenons ainsi

$$(1 - m^2)^2a^4 - (h^2 - 4a^4m^2) = 0,$$

d'où

$$h = \pm a^2(1 + m^2).$$

L'équation générale demandée est donc

$$(1) \qquad (y - mx - b)\left(my + x + \frac{km}{b}\right) + \varepsilon a^2(1 + m^2) = 0,$$

en désignant par ε l'un des nombres $+1$ et -1.

1° Cela posé, l'équation qui lie les coefficients angulaires de deux diamètres conjugués, μ et μ', est

$$2m\mu\mu' + (1 - m^2)(\mu + \mu') - 2m = 0 ;$$

en exprimant que $\mu\mu' = -1$, nous aurons l'équation qui donne les coefficients angulaires des deux axes ; cette équation est

$$(1 - m^2)\mu^2 - 4m\mu - (1 - m^2) = 0.$$

D'ailleurs chaque axe passe au point de rencontre des asymptotes et a pour équation

$$y - mx - b + \lambda\left(my + x + \frac{km}{b}\right) = 0,$$

pour une certaine valeur de λ ; nous aurons les deux valeurs de λ en exprimant que le coefficient angulaire de cette droite, $\mu = \frac{m-\lambda}{1+\lambda m}$, vérifie l'équation aux coefficients angulaires des axes ; nous trouvons ainsi très rapidement $\lambda^2 - 1 = 0$; par suite, les valeurs de λ sont $+1$ et -1, et les équations des deux axes sont

$$(2)\qquad \begin{cases} y - mx - b + my + x + \dfrac{km}{b} = 0, \\ y - mx - b - my - x - \dfrac{km}{b} = 0. \end{cases}$$

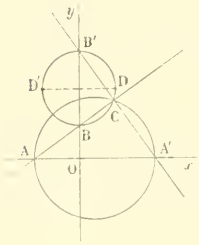
Ces deux équations sont linéaires par rapport au paramètre m ; donc elles représentent des droites qui passent par deux points fixes, ayant respectivement pour coordonnées

$$x = \frac{1}{2}\left(b + \frac{k}{b}\right), \qquad y = \frac{1}{2}\left(b - \frac{k}{b}\right),$$

et

$$x = -\frac{1}{2}\left(b + \frac{k}{b}\right), \qquad y = \frac{1}{2}\left(b - \frac{k}{b}\right).$$

Tous ces résultats sont d'ailleurs évidents géométriquement. Désignons en effet par B′ le point de rencontre de la seconde asymptote avec Oy, par A et A′ les points de rencontre des deux asymptotes avec Ox, et par C le point de rencontre des deux asymptotes ; appelons φ l'angle BAO. Nous aurons en valeur absolue $OB = OA \operatorname{tg}\varphi$, $OB' = OA' \cot\varphi$, et, par suite, $OB.OB' = OA.OA' = c^{te}$. Le point B′ est donc fixe aussi, et le lieu du centre C de l'hyperbole est le cercle décrit sur BB′ comme diamètre. En outre, les axes de l'hyperbole sont les bissectrices de l'angle des deux droites CB et CB′ ; ils passent donc par les milieux des deux demi-circonférences sous-tendues par le diamètre BB′, c'est-à-dire par deux points fixes D et D′ du cercle envisagé.



Il est alors aisé d'achever le premier paragraphe ; car les deux axes sont les droites DC et D′C, et si on porte sur chacun d'eux des longueurs égales à une constante, de part et d'autre du point C, le lieu des points ainsi obtenus se compose de deux limaçons de Pascal ayant pour points doubles les points D et D′, d'après la définition même de cette courbe.

C'est donc une imperfection de l'énoncé que de signaler l'existence d'un seul limaçon de Pascal, quand il y en a deux en réalité.

2° Ici l'auteur invoque, pour préciser celui des deux systèmes d'hyperboles qu'il veut étudier, le signe du produit des distances de l'origine aux deux asymptotes. Or ce signe est complètement arbitraire : il dépend de conventions facultatives, et la condition imposée au signe du produit km n'a aucune signification précise. Pour lui en donner une, nous supposerons que l'auteur a voulu dire que le produit des distances de l'origine aux asymptotes doit être regardé comme étant positif ; mais alors il eût été bien plus naturel de dire que le produit km doit être négatif : l'énoncé eût gagné ainsi en simplicité et en précision.

Soient, pour abréger, P et Q les premiers membres des équations des deux asymptotes, tels qu'ils ont été écrits ; les coordonnées de l'origine donnent au produit PQ le signe de $-km$; les coordonnées d'un point de la courbe donnent $PQ = -\varepsilon a^2(1+m^2)$, et, par suite, elles donnent au produit PQ le signe de $-\varepsilon$; ε et km doivent donc avoir le même signe, et, si l'on se reporte à ce qui précède, on voit qu'il faut prendre $\varepsilon = -1$. Le système des hyperboles à considérer est donc le système à deux paramètres

$$(3)\qquad y - mx - b\left(my + x + \frac{km}{b}\right) - a^2(1+m^2) = 0.$$

L'autre système d'hyperboles a pour équation

$$(y - mx - b)\left(my + x + \frac{km}{b}\right) + a^2(1 + m^2) = 0 \ ;$$

d'ailleurs, ces deux systèmes ne sont distincts que si l'on suppose que a^2 ne puisse prendre que des valeurs positives ; or, au point de vue algébrique, a^2 peut prendre toutes les valeurs possibles, rien alors ne distingue les deux systèmes l'un de l'autre, et, comme il n'y a aucun intérêt à faire cette distinction en spécialisant les valeurs que peut prendre a^2, nous regarderons l'équation (3) comme représentant le système total des hyperboles considérées.

Mais une autre difficulté se présente immédiatement : nous donnons à km le signe — ; cela supprime de nos considérations toutes les valeurs positives de m ou bien toutes les valeurs négatives, et les paragraphes qui suivent perdent leurs sens. Nous regarderons donc, dans l'équation (3), m et a^2 comme étant des paramètres réels pouvant prendre toutes les valeurs réelles, positives ou négatives. Seulement alors la courbe et l'origine ne sont plus nécessairement dans un même angle des asymptotes.

Si nous regardons maintenant x et y comme étant les coordonnées d'un point donné dans le plan, l'équation (3) est une équation du second degré par rapport à m et du premier degré par rapport à a^2 qui relie entre elles les valeurs des deux paramètres des hyperboles du système qui passent au point choisi (x, y). On voit donc immédiatement qu'il y a deux hyperboles ayant un axe transverse donné et passant en ce point. Les valeurs de m relatives à ces deux hyperboles sont fournies par l'équation du second degré

$$(4) \qquad \left[x\left(y + \frac{k}{b}\right) + a^2\right] m^2 + \left[x^2 - (y - b)\left(y + \frac{k}{b}\right)\right] m + a^2 - x(y - b) = 0.$$

3° L'équation (4) ne peut avoir deux racines égales et de signes contraires que si le coefficient de m est nul. En annulant ce coefficient et faisant ensuite $m^2 = 1$ dans l'équation (4), on obtient d'abord l'équation du lieu Δ, puis la valeur de a^2 qui correspond au point (x, y) envisagé sur le lieu.

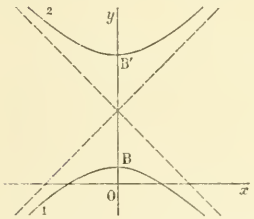
On a ainsi

$$\Delta \equiv x^2 - (y - b)\left(y + \frac{k}{b}\right) = 0,$$

et

$$a^2 = -\frac{x}{2}\left(b + \frac{k}{b}\right).$$

Le lieu Δ est une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux bissectrices des axes et dont les sommets sont les deux points B et B′ de l'axe des y. D'autre part, nous voyons que si $b + \frac{k}{b}$ est positif, et si on ne prend que les valeurs positives de a^2, il n'y a dans le réseau d'autres hyperboles répondant à la question que celles qui correspondent aux points du lieu situés sur les axes B1 et B′2 ; l'autre moitié du lieu est donc parasite, si l'on suit strictement l'énoncé. Si, au contraire, on adopte notre point de vue, si on regarde a^2 comme pouvant prendre indifféremment des valeurs positives et négatives, tous les points du lieu Δ conviennent également. Enfin il est bon de remarquer que le lieu Δ est à proprement parler le lieu des points de rencontre des hyperboles d'axes transverses égaux et ayant leurs asymptotes passant par B également inclinées sur les axes. La spécification pour m des valeurs $+1$ et -1 était bien inutile et ne pouvait qu'augmenter la complication et l'obscurité de l'énoncé.



4° Pour tout point du lieu Δ, les valeurs de m sont données par

$$m^2 = \frac{x(y - b) - a^2}{x\left(y + \frac{k}{b}\right) + a^2}.$$

Sur l'arc B1 (dans le cas supposé pour la figure), $x(y-b)$ et $x\left(y+\frac{k}{b}\right)$ sont positifs ; donc, en admettant que a^2 ne puisse prendre que des valeurs positives, la condition de réalité du paramètre m nous oblige à prendre a^2 entre 0 et $x(y-b)$; à proprement parler, a^2 n'aurait qu'un maximum ; d'ailleurs en lui donnant pour minimum 0, l'hyperbole correspondante se réduirait à deux droites et le 4e paragraphe perdrait à peu près tout sens. En considérant l'arc B2, on serait conduit à des critiques analogues. Mais il y a mieux : en acceptant les limites trouvées dans chaque cas pour a^2, on n'aurait pas le même maximum pour a^2 sur les deux arcs B1 et B2 et le lieu indiqué dans le 4e paragraphe, à supposer qu'il ait le sens que l'énoncé semble lui donner, ne serait pas défini d'une manière uniforme pour le lieu Δ tout entier.

Il faut donc encore revenir à notre interprétation et supposer que a^2 puisse prendre indifféremment des valeurs positives et négatives. Alors la condition de réalité de m^2 nous donne

$$x(y-b)-a^2\left[x\left(y+\frac{k}{b}\right)+a^2\right]>0;$$

elle nous montre que a^2 doit être compris entre les deux nombres $x(y-b)$ et $-x\left(y+\frac{k}{b}\right)$; a^2 a donc bien alors un maximum et un minimum définis d'une façon uniforme pour tous les points du lieu Δ. Les valeurs de m correspondant à ces deux nombres sont 0 et ∞, et par suite les deux hyperboles à considérer ont pour équations

$$f(x, y) \equiv x(y-b)-\alpha(\beta-b)=0,$$

$$\varphi(x, y) \equiv x\left(y+\frac{k}{b}\right)-\alpha\left(\beta+\frac{k}{b}\right)=0.$$

en désignant cette fois, pour éviter toute confusion, par α et β les coordonnées du point choisi sur le lieu Δ.

Pour avoir le lieu du milieu d'une tangente commune à ces deux coniques, appelons x et y les coordonnées de l'un de ces points, φ l'angle que fait l'une des directions de la tangente commune correspondante avec Ox et ρ la distance du point (x, y) au point de contact avec l'une ou l'autre hyperbole, distance comptée à partir du premier point et affectée d'un signe; les coordonnées du point de contact envisagé seront $x+\rho\cos\varphi$, $y+\rho\sin\varphi$; en portant successivement ces nombres dans les équations des deux hyperboles, $f(x, y)=0$, $\varphi(x, y)=0$, nous aurons deux équations en ρ du second degré et ayant chacune une racine double ; en outre ces deux racines doubles devront être égales et de signes contraires. Effectuons les calculs.

L'équation en ρ fournie par la première hyperbole est

$$f(x+\rho\cos\varphi,\ y+\rho\sin\varphi)=0,$$

ou

$$\rho^2\sin\varphi\cos\varphi+L\rho+f(x, y)=0,$$

en posant

$$L=f'_x\cos\varphi+f'_y\sin\varphi;$$

elle nous donne, conformément à ce qui a été dit plus haut,

$$(5)\quad \begin{cases} 4f(x, y)\sin\varphi\cos\varphi-L^2=0, \\ \rho=\dfrac{-L}{2\sin\varphi\cos\varphi}. \end{cases}$$

L'équation de la seconde hyperbole donne naissance aux mêmes calculs et fournit

$$(6)\quad \begin{cases} 4\varphi(x, y)\sin\varphi\cos\varphi-M^2=0, \\ \rho'=\dfrac{-M}{2\sin\varphi\cos\varphi}, \end{cases}$$

en désignant par M l'expression $\varphi'_x\cos\varphi+\varphi'_y\sin\varphi$.

Il faut maintenant écrire que $\rho = -\rho'$ ou $\rho + \rho' = 0$, puis éliminer φ, α et β entre cette relation, la première équation (5), la première équation (6) et la relation $\Delta(\alpha, \beta) = 0$. Or la relation $\rho + \rho' = 0$ nous donne $L + M = 0$; en retranchant la première équation (6) de la première équation (5) et tenant compte de $L + M = 0$, il vient $f(x, y) - \varphi(x, y) = 0$, ou simplement $\alpha = x$; il ne reste donc plus qu'à éliminer β et φ entre les relations signalées, dans lesquelles on a fait $\alpha = x$. Pour cela, nous tirons de l'équation $L + M = 0$, $\dfrac{\cos\varphi}{2x} = \dfrac{\sin\varphi}{b - \dfrac{k}{b} - 2y}$, et en portant à la place de $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ les quantités proportionnelles $b - \dfrac{k}{b} - 2y$ et $2x$ dans l'une ou l'autre des premières équations (5) ou (6), nous obtenons $\beta = y + \dfrac{\left(b + \dfrac{k}{b}\right)^2}{8\left(2y - b + \dfrac{k}{b}\right)}$. En remplaçant α par x et β par cette valeur dans l'équation $\Delta(\alpha, \beta) = 0$, nous avons de suite l'équation du lieu,

$$\left[\frac{\left(b + \frac{k}{b}\right)^2}{8\left(2y - b + \frac{k}{b}\right)} - \frac{1}{2}\left(2y - b + \frac{k}{b}\right)\right]^2 - x^2 = 0;$$

cette équation se décompose en deux :

$$\frac{\left(b + \frac{k}{b}\right)^2}{8\left(2y - b + \frac{k}{b}\right)} - \frac{1}{2}\left(2y - b + \frac{k}{b}\right) - x = 0,$$

ou

$$(7) \qquad \left(2y - b + \frac{k}{b}\right)\left(8x + 8y - 4b + \frac{4k}{b}\right) - \left(b + \frac{k}{b}\right)^2 = 0,$$

et

$$(8) \qquad \left(2y - b + \frac{k}{b}\right)\left(-8x + 8y - 4b + \frac{4k}{b}\right) - \left(b + \frac{k}{b}\right)^2 = 0.$$

Ce sont deux hyperboles ayant pour asymptote commune la droite CD qui joint les points fixes autour desquels tournent les axes des hyperboles du système donné; elles ont de plus leurs centres confondus sur l'axe des y et leurs deux autres asymptotes sont respectivement parallèles aux deux bissectrices des axes. Rien n'est plus aisé que de placer ces deux hyperboles dans une figure totale comprenant tous les résultats qui se rapportent à une hypothèse donnée et facultative d'ailleurs sur le nombre k.

Enfin nous ferons remarquer, pour terminer, que si l'on ne veut pas suivre strictement les méthodes ordinairement indiquées dans les cours, on peut abréger certains calculs en s'appuyant, d'une part, sur ce que le produit des distances d'un point d'une hyperbole équilatère aux deux asymptotes est égal au demi-carré du demi-axe transverse, d'autre part, sur ce que les axes sont les bissectrices des angles formés par les deux asymptotes.

QUESTION PROPOSÉE

483. — On considère un cercle fixe et une tangente à ce cercle en un point fixe O ; un point M quelconque du cercle est le sommet d'un triangle isocèle MOP ayant sa base OP sur la tangente fixe. On demande, quand le point M décrit le cercle donné :

1° Le lieu du point de concours des hauteurs du triangle OMP ;

2° Le lieu du centre du cercle circonscrit à ce triangle ;

3° Le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée de O sur PM ;

4° L'enveloppe de PM.

L.-J. Goujon, pensionnat de Valbenoite (Saint-Etienne).

BIBLIOGRAPHIE

Questions de Mécanique à l'usage des élèves des classes de Mathématiques spéciales, par X. ANTOMARI et C.-A. LAISANT, docteurs ès sciences. — Un vol. in-8°, Paris, Nony et Cie.

Cet ouvrage, qui n'a pas d'autre but que d'aider les candidats à l'Ecole Polytechnique dans la préparation de leurs examens, est un petit recueil de questions très bien choisies et classées d'après le programme de Mécanique. Beaucoup de ces questions ont été proposées aux examens oraux ; la plupart des autres le seront nécessairement, car elles constituent des applications trop directes du cours de Mécanique pour échapper à l'attention des examinateurs. Les auteurs ont exposé la solution de nombre d'entre elles afin que les élèves aient toujours sous les yeux des exemples de questions bien traitées et pouvant servir de modèles pour toutes celles qui leur seront demandées ou proposées au lycée à titre d'exercices. Ils ont placé en tête de chaque chapitre un résumé bien fait des définitions, principes et théorèmes de la partie du programme qu'ils ont alors en vue ; de sorte qu'à côté des exercices intéressants dont nous avons parlé, le candidat trouvera la substance de son cours et le rappel, sous une forme simple et précise, des propositions et principes qu'il a étudiés.

Depuis son introduction au programme de l'Ecole Polytechnique, la Mécanique joue un rôle sans cesse grandissant aux examens oraux : il n'est pour ainsi dire pas de candidat qui n'ait une question de Mécanique à quelqu'un de ses examens oraux et parfois plusieurs ; d'un autre côté le temps que l'on peut consacrer à la Mécanique dans l'enseignement des Mathématiques spéciales est nécessairement très limité par l'étendue des autres parties du programme. Il est donc de toute nécessité que chaque candidat cherche lui même à compléter sa préparation. Nous croyons que le livre que nous venons de lui signaler peut lui rendre de grands services et cela dans un temps très court, grâce à sa simplicité et son peu d'étendue.

E. H.

Questions d'Algèbre à l'usage des élèves des classes de Mathématiques spéciales, par G. MAUPIN, licencié es sciences mathématiques et physiques, membre de la Société mathématique de France. — Un vol. gr. in-8°, Paris, Nony et Cie.

Cet ouvrage, ainsi que le précédent, s'adresse plus particulièrement aux élèves des diverses classes de Mathématiques spéciales. Cependant la variété et l'originalité des questions qu'il renferme, l'importance des aperçus historiques et des citations qu'il fournit en font un livre intéressant et utile à consulter pour beaucoup d'autres. Il n'est guère de questions d'Algèbre quelque peu célèbres et ayant occupé les géomètres des siècles derniers que l'auteur ne rappelle ; souvent il les accompagne de développements historiques importants et bien faits pour attacher le lecteur et lui donner le goût de ces retours en arrière si utiles à qui veut pénétrer le véritable sens des théories actuelles. Aussi nous associons-nous avec plaisir aux éloges que M. Laisant adresse à l'auteur dans l'élégante préface qu'il a mise en tête de ce volume, et nous félicitons bien sincèrement M. Maupin de n'avoir pas reculé devant le travail énorme qu'un pareil recueil exigeait.

La place nous manque pour analyser complètement cet ouvrage. Bornons-nous à dire qu'il renferme 125 questions résolues et plus de 1 300 énoncés d'autres questions dont beaucoup, comme nous l'avons déjà dit, sont intéressantes, au point de vue historique ; un grand nombre d'autres ont été proposées aux examens oraux de l'Ecole Polytechnique dans ces dix dernières années et, à ce titre, ne peuvent manquer d'attirer l'attention des candidats à cette école ; d'ailleurs celles de ces questions qui ne sont pas résolues sont souvent accompagnées d'explications sommaires qui mettent à chaque fois sur le chemin de la solution. Ajoutons que le recueil est divisé en 17 chapitres qui correspondent aux diverses parties du programme et permet ainsi d'adjoindre sans efforts des exercices appropriés aux diverses phases de la révision du cours d'Algèbre ; qu'enfin il se termine par une note relative à la recherche de certaines limites dont l'une, sous la forme même que lui donne l'auteur, est souvent demandée aux examens d'admission de l'Ecole Polytechnique, et a trait à l'existence de la célèbre constante d'Euler.

E. H.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

6e Année. N° 5. Février 1896.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

NOTE SUR LES FONCTIONS IMPLICITES

par M. **Cels**, professeur au lycée Lakanal.

Si $f(x, y)$ désigne une fonction de deux variables x et y bien définie dans un champ de variations (C) *comprenant en particulier le point (x_0, y_0) pour lequel on a $f(x_0, y_0) = 0$; si, de plus, cette fonction admet des dérivées partielles continues dans ce champ de variations et que la seconde dérivée partielle, $f'_y(x, y)$, ne soit pas nulle au point (x_0, y_0), l'équation $f(x, y) = 0$ définit une fonction y de x au voisinage de $x = x_0$, continue en ce point et ayant pour dérivée en ce même point le nombre $-\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}$.*

En effet, $f'_y(x_0, y_0)$ n'étant pas nul, il existe, en vertu de la continuité de la fonction $f'_y(x, y)$ dans le champ de variations (C), un intervalle $(-\alpha, +\alpha)$ tel que h et k tombant tous les deux dans cet intervalle, on ait toujours $b < | f'_y(x_0 + h, y_0 + k) | < B$, b et B étant deux nombres positifs entre lesquels se trouve le nombre $| f'_y(x_0, y_0) |$; dans tout cet intervalle la fonction $f'_x(x, y)$ est continue, sa valeur absolue est donc comprise de même entre deux nombres positifs a et A. Nous allons montrer alors que l'on peut établir entre h et k une relation telle que l'accroissement $f(x_0 + h, y_0 + k)$ de la fonction f ait le signe de kf'_y; on a, en effet,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = hf'_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + kf'_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k),$$

θ étant un nombre compris entre 0 et 1, et quand h et k restent dans l'intervalle $(-\alpha, \alpha)$, le premier terme du second membre est moindre en valeur absolue que $A | h |$, le second supérieur à $b | k |$; il suffira donc, dans ces hypothèses, de prendre $b | k | \geqslant A | h |$ ou $| k | \geqslant \frac{A}{b} | h |$, et, par suite, $| k | \geqslant M | h |$, en appelant M le nombre $\frac{A}{b}$ ou un nombre plus fort.

Il résulte de là que si l'on fait varier h dans l'intervalle $\left(-\frac{\alpha}{M}, \frac{\alpha}{M}\right)$, et que l'on prenne toujours $k = \pm Mh$, les deux nombres $f(x_0 + h, y_0 - Mh)$ et $f(x_0 - h, y_0 + Mh)$ sont constamment de signes contraires. Par conséquent la valeur de la fonction de y, $f(x_0 + h, y)$, change de signe quand y varie de $y_0 \pm Mh$ à $y_0 \mp Mh$; cette fonction est continue dans l'intervalle signalé, donc elle s'y annule au moins une fois; enfin elle ne s'y annule qu'une fois parce que sa dérivée $f'_y(x_0 + h, y)$ garde un signe constant dans l'intervalle $(y_0 \pm Mh, y_0 \mp Mh)$ et que, par suite, la fonction envisagée varie toujours dans le même sens.

L'équation $f(x_0 + h, y) = 0$ a donc toujours une racine et une seule de la forme $y_0 + \theta Mh$, θ étant compris entre -1 et $+1$, quand h parcourt l'intervalle $\left(\frac{-\alpha}{M}, \frac{\alpha}{M}\right)$. Il en résulte donc bien que l'équation $f(x, y) = 0$ définit une fonction y de x, au voisinage de $x = x_0$, continue pour $x = x_0$ et qui se réduit à y_0 en ce point.

Reste à montrer que cette fonction a une dérivée pour $x = x_0$. Or si on appelle maintenant h

et k les accroissements correspondants de x et y, on a

$$f(x_0 + h,\ y_0 + k) = 0,$$

ou

$$hf'_x(x_0 + \theta h,\ y_0 + \theta k) + kf'_y(x_0 + \theta h,\ y_0 + \theta k) = 0,$$

θ étant encore ici un nombre compris entre 0 et 1 : de là on déduit

$$\frac{k}{h} = -\frac{f'_x(x_0 + \theta h,\ y_0 + \theta k)}{f'_y(x_0 + \theta h,\ y_0 + \theta k)},$$

puisque le dénominateur n'est pas nul ; et enfin,

$$\lim_{h=0} \frac{k}{h} = -\frac{f'_x(x_0,\ y_0)}{f'_y(x_0,\ y_0)},$$

puisque les deux dérivées partielles sont continues au point $(x_0,\ y_0)$ et que le dénominateur n'est pas nul en ce point.

Il résulte en outre du raisonnement précédent que si l'on considère une valeur quelconque de x comprise entre $-\frac{\alpha}{M}$ et $\frac{\alpha}{M}$ et la valeur correspondante de y, pour tout couple de ce genre, (x_1, y_1), les conditions indiquées dans l'énoncé du théorème sont remplies ; par conséquent l'équation $f(x, y) = 0$ définit une fonction de x continue et pourvue de dérivée, *au voisinage de* $x = x_1$. Cette dérivée de la fonction y a pour valeur $-\frac{f'_x(x_1,\ y_1)}{f'_y(x_1,\ y_1)}$ pour tous ces couples de valeurs ; elle est donc *continue* puisque le numérateur et le dénominateur sont fonctions continues de x_1 et y_1, que x_1 et y_1 varient toutes deux d'une manière continue et que $f'_y(x_1,\ y_1)$ n'est pas nulle.

Le raisonnement précédent n'est plus applicable si pour le couple initial $(x_0,\ y_0)$ on a $f'_y(x_0,\ y_0) = 0$; mais alors si $f'_x(x_0,\ y_0)$ n'est pas nul, on applique le raisonnement à x envisagé comme fonction de y et l'on arrive à cette conclusion, que l'équation $f(x, y) = 0$ définit, au voisinage de $y = y_0$, une fonction continue de y et pourvue d'une dérivée continue dont la valeur est $-\frac{f'_x(x,\ y)}{f'_y(x,\ y)}$, cette fonction particulière prenant la valeur x_0 pour $y = y_0$. La dérivée de cette fonction est nulle pour $y = y_0$; deux cas peuvent alors se présenter : ou bien elle change de signe pour cette valeur de y, ou son signe reste invariable. Si elle change de signe supposons, pour fixer les idées, qu'elle passe du positif au négatif ; alors la fonction x croît d'abord, puis décroît ensuite ; si nous supposons que toutes les propriétés signalées aient lieu de $y_0 - \beta$ à y_0 et de y_0 à $y_0 + \beta$, nous voyons que x croît d'une manière continue de $x_0 - \alpha$ à x_0, puis décroît de x_0 à $x_0 - \alpha'$, α et α' étant certains nombres qui correspondent aux accroissements acceptables, $-\beta$ et $+\beta$, de y ; soit maintenant η un nombre positif moindre que α et α', nous voyons que, d'après le théorème des fonctions inverses, il y a deux fonctions y de x définies dans l'intervalle $(x_0 - \eta,\ x_0)$, l'une croissante, l'autre décroissante, toutes deux continues et se réduisant à y_0 pour $x = x_0$; dans l'intervalle $(x_0,\ x_0 + \eta)$ il n'y a aucune fonction de ce genre. Si la dérivée ne change pas de signe, supposons, pour fixer les idées, qu'elle soit positive ; alors la fonction x croît de $x_0 - \alpha$ à $x_0 + \alpha'$ quand y décrit l'intervalle $(y_0 - \beta,\ y_0 + \beta)$, que nous supposons acceptable comme précédemment ; soit maintenant η un nombre positif moindre que α et α', nous voyons que, d'après le théorème des fonctions inverses, il y a une fonction y de x définie dans l'intervalle $(x_0 - \eta,\ x_0 + \eta)$, croissante, continue et se réduisant à y_0 pour $x = x_0$. Dans les deux cas que nous venons de signaler, aucune des fonctions y n'admet de dérivée pour $x = x_0$.

Enfin, si pour le couple initial (x_0, y_0), les deux dérivées partielles sont nulles, les raisonnements faits plus haut ne s'appliquent plus, et il faudrait s'appuyer sur les dérivées partielles d'ordres supérieurs pour édifier une théorie analogue. Nous n'aborderons pas ce cas.

Les énoncés qui suivent sont de simples conséquences de ce qui précède.

Si l'équation $f(x_0, y) = 0$ *admet* p *racines réelles* $y_1, y_2, \ldots, y_p$, *pour lesquelles* $f'_y(x_0, y)$ *ne soit*

pas nulle, et si les conditions toujours supposées jusqu'ici sont remplies par la fonction $f(x, y)$, *l'équation* $f(x, y) = 0$ *représente* p *fonctions de* x, *réelles, continues et pourvues de dérivées continues au voisinage de* $x = x_0$.

Au point de vue géométrique, *cette équation représente* p *branches de courbes coupant la droite* $x = x_0$, *aux points d'ordonnées* $y_1, y_2, \ldots, y_p$.

Si pour une racine y_0 de $f(x_0, y) = 0$, on a $f'_y(x_0, y_0) = 0$, on se renseignera sur les branches correspondantes de la courbe totale qui passent au point (x_0, y_0) en étudiant la fonction x de y, pour les valeurs de y voisines de y_0.

Le théorème suivant se démontre absolument comme le premier :

Si $f(x, y, z)$ *désigne une fonction de trois variables, bien définie dans un champ de variations* (C) *comprenant le point* (x_0, y_0, z_0) *pour lequel on a* $f(x_0, y_0, z_0) = 0$; *si, de plus, cette fonction admet des dérivées partielles continues dans ce champ de variations et que la troisième dérivée partielle,* $f'_z(x, y, z)$, *ne soit pas nulle au point* (x_0, y_0, z_0), *l'équation* $f(x, y, z) = 0$ *définit une fonction* z *de* x *et* y, *qui se réduit à* z_0 *pour* $x = x_0$, $y = y_0$, *continue et pourvue de dérivées partielles continues au voisinage du point* (x_0, y_0).

De là, ces conséquences :

Si l'équation $f(x_0, y_0, z) = 0$ *admet* p *racines différentes* $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_p$, *pour lesquelles* $f'_z(x_0, y_0, z)$ *ne soit pas nulle, et si les conditions toujours supposées jusqu'ici sont remplies par la fonction* $f(x, y, z)$, *l'équation* $f(x, y, z) = 0$ *représente* p *fonctions de* x *et* y, *réelles, continues et pourvues de dérivées partielles continues au voisinage du point* (x_0, y_0).

Au point de vue géométrique, *cette équation représente* p *nappes de surfaces coupant la droite* $x = x_0$, $y = y_0$, *aux points dont les cotes sont* $z_1, z_2, \ldots, z_p$.

Si pour une racine z_0 de l'équation $f(x_0, y_0, z) = 0$, on a $f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0$, on se renseignera sur les nappes correspondantes de la surface totale qui passent au point (x_0, y_0, z_0), en étudiant l'une ou l'autre des fonctions x ou y de y et z ou de x et z que l'équation définit en général, pour des valeurs voisines de y_0 et z_0 ou de x_0 et z_0.

A un autre point de vue et pour une généralisation plus grande, on a le théorème particulier que voici :

Les racines d'une équation entière sont des fonctions continues des coefficients.

Comme dernière extension, nous allons considérer deux fonctions de x, y et z, $f(x, y, z)$ et $\varphi(x, y, z)$, bien définies dans le même champ de variations (C), y possédant des dérivées partielles continues, et nulles pour un point (x_0, y_0, z_0) de ce champ de variations, et nous allons nous demander sous quelles conditions les deux équations

$$f(x, y, z) = 0, \qquad \varphi(x, y, z) = 0$$

définissent deux fonctions de x, y et z, se réduisant à y_0 et z_0 pour $x = x_0$. Supposons que l'une des dérivées partielles, f'_z ou φ'_z, ne soit pas nulle pour x_0, y_0, z_0, par exemple $f'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$; alors la première équation définit une fonction $z = F(x, y)$, qui se réduit à z_0 pour $x = x_0$, $y = y_0$, qui est continue et pourvue de dérivées partielles continues au voisinage du point (x_0, y_0) ; si on porte cette valeur de z dans la seconde fonction on obtient une fonction composée de x et y,

$$\Phi(x, y) = \varphi[x, y, F(x, y)],$$

qui est pourvue de dérivées partielles continues par rapport à x et y, au voisinage du point (x_0, y_0) et qui, de plus, est nulle en ce point; si donc la dérivée par rapport à y, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$, n'est pas nulle au point (x_0, y_0), l'équation

$$\Phi(x, y) = 0$$

définit au voisinage de $x = x_0$ une fonction y de x, réelle, continue et pourvue d'une dérivée continue ; la fonction $z = F(x, y)$ devient donc bien aussi une fonction de x réelle, continue et pourvue

d'une dérivée continue au voisinage de $x = x_0$; d'ailleurs ces deux fonctions prennent les valeurs y_0 et z_0 pour $x = x_0$. Le but que nous poursuivions est donc atteint.

Nous avons trouvé qu'en outre des conditions générales imposées aux deux fonctions $f(x, y, z)$, $\varphi(x, y, z)$, dans un certain champ de variations, il faut encore que l'une des dérivées partielles f'_z, φ'_z soit différente de 0 au point initial (x_0, y_0, z_0), et que de plus si on choisit, par exemple, $f'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, il faut que l'on ait $\Phi'_y(x_0, y_0) \neq 0$; mais $\Phi = \varphi + \varphi'_z F'_y$, pour $z = F(x, y)$, et, comme on a $F'_y = -\frac{f'_y}{f'_z}$, et que $z_0 = F(x_0, y_0)$, on voit qu'il faut que le déterminant $\varphi'_y f'_z - f'_y \varphi'_z$ ne soit pas nul au point (x_0, y_0, z_0); cette nouvelle condition entraîne d'ailleurs la première, car si $\varphi'_y f'_z - f'_y \varphi'_z$ est différent de 0, les deux dérivées partielles par rapport à z, f'_z et φ'_z, ne peuvent être nulles en même temps. La seule condition à ajouter aux conditions générales que nous avons rappelées plusieurs fois au cours de cet article, est donc que le *déterminant fonctionnel* des deux fonctions f et φ, regardées comme fonctions de y et z seulement, soit différent de 0 au point (x_0, y_0, z_0), c'est-à-dire que l'on ait

$$\begin{vmatrix} f'_y & f'_z \\ \varphi'_y & \varphi'_z \end{vmatrix}_{(x_0, y_0, z_0)} \neq 0.$$

Les fonctions y et z existant alors et ayant des dérivées, nous obtiendrons ces dérivées en appliquant la règle des fonctions composées aux deux fonctions $f(x, y, z)$ et $\varphi(x, y, z)$ qui, étant toujours nulles, ont des dérivées toujours nulles, et conduisent ainsi aux deux équations du premier degré

$$f'_x + y' f'_y + z' f'_z = 0,$$
$$\varphi'_x + y' \varphi'_y + z' \varphi'_z = 0;$$

ces équations du premier degré donneront y' et z' tant que le déterminant fonctionnel ne sera pas nul,

$$y' = \frac{\varphi'_z f'_x - \varphi'_x f'_z}{f'_y \varphi'_z - \varphi'_y f'_z},$$
$$z' = \frac{f'_x \varphi'_y - f'_y \varphi'_x}{f'_y \varphi'_z - \varphi'_y f'_z}.$$

Nous ne parlerons pas du cas où le déterminant fonctionnel est nul au point (x_0, y_0, z_0), et nous terminerons cet article en faisant remarquer que, sous les conditions signalées plus haut, les deux équations $f(x, y, z) = 0$ et $\varphi(x, y, z) = 0$ représentent analytiquement une branche de courbe qui passe au point (x_0, y_0, z_0).

Ce résultat est susceptible de s'étendre au cas où il y a plus d'une variable indépendante.

A notre avis, il est intéressant de remarquer que toute cette théorie a été édifiée sans recourir à la théorie de l'élimination.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (Concours de 1895).

433. — *On donne un ellipsoïde* E *qui, rapporté à ses plans principaux, a pour équation*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

et une sphère de rayon r *et de centre* A (x_0, y_0, z_0).

On considère les quadriques S *qui sont tangentes à tous les plans tangents communs à la sphère et à l'ellipsoïde* E; *du point* A *on abaisse une normale* AP *sur l'une des quadriques* S, *et au pied* P *de cette normale on mène le plan tangent* H *à cette quadrique.*

1° *Prouver que le plan* H *est le plan polaire du point* A *par rapport à une surface* H_ρ, *homofocale à l'ellipsoïde* E, *représentée par l'équation*

$$H_\rho \quad \frac{x^2}{a^2 - \rho} + \frac{y^2}{b^2 - \rho} + \frac{z^2}{c^2 - \rho} - 1 = 0.$$

2° *Prouver que le plan* Π *est le plan polaire du point* A *par rapport à l'une des quadriques* S ; *prouver qu'il est aussi un plan principal pour une autre de ces quadriques. Les réciproques de ces propositions sont-elles vraies ?*

3° *Par tout point* M *de l'espace il passe trois plans* Π *polaires du point* A *par rapport à trois quadriques* H_λ, H_μ, H_ν *du système homofocal. Exprimer les coordonnées du point* M *en fonction des paramètres* λ, μ, ν.

Déduire des expressions ainsi obtenues le lieu des points M *pour lesquels les trois plans* Π *sont rectangulaires.*

4° *Trouver ce que deviennent les expressions des coordonnées du point* M, *soit quand ce point est sur la développable enveloppée par le plan* Π, *soit quand il se trouve sur l'arête de rebroussement de cette développable. En conclure le degré de la développable et la nature de son arête de rebroussement.*

5° *Tout plan* Π *coupe la développable suivant la génératrice de contact et suivant une conique. De quelle espèce est cette conique ? En connaît-on des tangentes remarquables ?*

6° *Trouver le lieu des foyers de ces diverses coniques.*

L'équation tangentielle de l'ellipsoïde est

$$E \equiv a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - p^2 = 0 ;$$

celle de la sphère,

$$\Sigma \equiv r^2(u^2 + v^2 + w^2) - (ux_0 + vy_0 + wz_0 + p)^2 = 0.$$

L'équation générale des quadriques S inscrites dans la développable circonscrite à ces deux surfaces est donc $\Sigma + \theta E = 0$, θ étant un paramètre arbitraire.

1° Soit alors AP l'une des normales à la surface (θ) issue du point A, et $ux + vy + wz + p = 0$ l'équation du plan tangent à la surface (θ), au pied P de cette normale ; les coordonnées de ce plan vérifient la relation $\Sigma + \theta E = 0$; d'autre part, les coordonnées du point de contact sont données par les relations symboliques

$$x = \frac{f'_u}{f'_p}, \qquad y = \frac{f'_v}{f'_p}, \qquad z = \frac{f'_w}{f'_p},$$

ou, dans le cas actuel, en posant $P = ux_0 + vy_0 + wz_0 + p$,

$$(\text{point P}) \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{r^2u - Px_0 + \theta a^2u}{-P - \theta p}, \\ y &= \frac{r^2v - Py_0 + \theta b^2v}{-P - \theta p}, \\ z &= \frac{r^2w - Pz_0 + \theta c^2w}{-P - \theta p} ; \end{aligned} \right.$$

les paramètres de la droite AP ont pour valeurs $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, ou

$$r^2u + \theta a^2u + \theta p x_0, \qquad r^2v + \theta b^2v + \theta p y_0, \qquad r^2w + \theta c^2w + \theta p z_0.$$

Pour exprimer que cette droite est perpendiculaire au plan (u, v, w, p), il n'y a qu'à écrire que les nombres précédents sont proportionnels à u, v, w : on a ainsi

$$r^2 + \theta a^2 + \frac{\theta p x_0}{u} = r^2 + \theta b^2 + \frac{\theta p y_0}{v} = r^2 + \theta c^2 + \frac{\theta p z_0}{w},$$

ou

$$a^2 + \frac{\rho}{u} x_0 = b^2 + \frac{\rho}{v} y_0 = c^2 + \frac{\rho}{w} z_0 = \rho,$$

en appelant ρ la valeur commune de ces trois nombres. On déduit de là

$$\frac{u}{\rho} = \frac{x_0}{\rho - a^2}, \qquad \frac{v}{\rho} = \frac{y_0}{\rho - b^2}, \qquad \frac{w}{\rho} = \frac{z_0}{\rho - c^2},$$

et, par suite, l'équation du plan Π est

$$\Pi \equiv \frac{xx_0}{a^2-\rho} + \frac{yy_0}{b^2-\rho} + \frac{zz_0}{c^2-\rho} - 1 = 0.$$

Cette équation montre immédiatement que le plan Π est le plan polaire du point (x_0, y_0, z_0) par rapport à la surface

$$\Pi_\rho \equiv \frac{x^2}{a^2-\rho} + \frac{y^2}{b^2-\rho} + \frac{z^2}{c^2-\rho} - 1 = 0,$$

homofocale à l'ellipsoïde E.

2° Cherchons le plan polaire du point (x_0, y_0, z_0) par rapport à la surface (θ); il nous suffit, pour cela, de remarquer que les formules (point P) donnent les coordonnées du pôle du plan (u, v, w, p), puis d'égaler les valeurs de x, y, z aux nombres x_0, y_0, z_0; nous aurons ainsi les coordonnées du plan polaire du point A, à l'aide des équations

$$u(r^2+\theta a^2) + \theta p x_0 = 0, \qquad v(r^2+\theta b^2) + \theta p y_0 = 0, \qquad w(r^2+\theta c^2) + \theta p z_0 = 0.$$

Nous obtenons de cette façon

$$\frac{-u}{p} = \frac{\theta x_0}{\theta a^2 + r^2}, \qquad \frac{-v}{p} = \frac{\theta y_0}{\theta b^2 + r^2}, \qquad \frac{-w}{p} = \frac{\theta z_0}{\theta c^2 + r^2},$$

et nous voyons qu'il suffit de poser $\frac{r^2}{\theta} = -\rho$, ou de prendre pour valeur de θ $\frac{-r^2}{\rho}$, pour que le plan envisagé coïncide avec le plan Π. Le procédé employé démontre évidemment la réciproque, c'est-à-dire que le plan polaire du point A par rapport à une certaine surface (θ) est aussi plan polaire par rapport à une des surfaces Π_ρ, et, par suite aussi, plan tangent au pied de l'une des normales issues du point A à une autre surface du faisceau (θ).

Pour prouver que le plan Π est aussi plan principal pour une des surfaces (θ), il suffit de considérer l'ensemble des surfaces homofocales à cette surface particulière,

$$\Sigma + \theta E + \theta_1(u^2+v^2+w^2) = 0,$$

et de chercher celles de ces surfaces qui se réduisent à une courbe, c'est-à-dire celles dont l'équation admet une solution double par rapport à u, v, w, p. Si l'on pose $r^2 + \theta_1 = \sigma$, on obtient, en annulant les quatre dérivées partielles par rapport à u, v, w, p,

$$\begin{aligned} \sigma u - \mathrm{P}x_0 + \theta a^2 u &= 0, \\ \sigma v - \mathrm{P}y_0 + \theta b^2 v &= 0, \\ \sigma w - \mathrm{P}z_0 + \theta c^2 w &= 0, \\ \mathrm{P} + \theta p &= 0; \end{aligned}$$

ces équations, jointes à $\mathrm{P} = ux_0 + vy_0 + wz_0 + p$, déterminent u, v, w, p et σ.

Elles donnent successivement $\mathrm{P} = -\theta p$, $u = -\frac{p\theta x_0}{\sigma + \theta a^2}$, $v = -\frac{p\theta y_0}{\sigma + \theta b^2}$, $w = -\frac{p\theta z_0}{\sigma + \theta c^2}$, puis

$$\frac{\theta x_0^2}{\sigma + \theta a^2} + \frac{\theta y_0^2}{\sigma + \theta b^2} + \frac{\theta z_0^2}{\sigma + \theta c^2} = 1 - \theta.$$

Cette dernière équation détermine σ, les précédentes déterminent le plan principal qui correspond à la valeur choisie pour σ; et l'on voit aisément que ce plan coïncide avec le plan Π si l'on a $\frac{\sigma}{\theta} = -\rho$; or ceci a lieu pour une valeur de θ donnée par l'équation

$$1 - \theta = \frac{x_0^2}{a^2-\rho} + \frac{y_0^2}{b^2-\rho} + \frac{z_0^2}{c^2-\rho}.$$

La proposition annoncée est donc établie.

Les calculs que nous venons de faire établissent en même temps la réciproque : ils montrent que tout plan principal d'une surface (θ) est plan polaire du point (x_0, y_0, z_0) par rapport à trois surfaces Π_ρ, c'est-à-dire est trois fois plan Π, en limitant ainsi la signification de ce plan.

3° Si, dans l'équation $\Pi = 0$, on regarde x, y, z comme donnés, on obtient une équation du troisième degré en ρ,

$$\frac{xx_0}{a^2-\rho}+\frac{yy_0}{b^2-\rho}+\frac{zz_0}{c^2-\rho}-1=0,$$

et il en résulte immédiatement que trois plans Π passent par le point donné (x, y, z). En désignant par λ, μ, ν les paramètres de ces plans, on obtient de suite l'identité

$$xx_0(b^2-\rho)(c^2-\rho)+yy_0(c^2-\rho)(a^2-\rho)+zz_0(a^2-\rho)(b^2-\rho)-(a^2-\rho)(b^2-\rho)(c^2-\rho)\equiv(\rho-\lambda)(\rho-\mu)(\rho-\nu).$$

Il suffit de faire dans cette identité ρ égal successivement à a^2, b^2, c^2, pour avoir les valeurs de x, y, z en fonction des paramètres des trois plans qui passent en ce point; on trouve ainsi

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{(a^2-\lambda)(a^2-\mu)(a^2-\nu)}{x_0(b^2-a^2)(c^2-a^2)},\\ y &= \frac{(b^2-\lambda)(b^2-\mu)(b^2-\nu)}{y_0(c^2-b^2)(a^2-b^2)},\\ z &= \frac{(c^2-\lambda)(c^2-\mu)(c^2-\nu)}{z_0(a^2-c^2)(b^2-c^2)}.\end{aligned}\right.$$

En exprimant que les trois plans Π de paramètres λ, μ, ν sont rectangulaires, nous obtenons trois relations telles que la suivante :

$$\frac{x_0^2}{(a^2-\lambda)(a^2-\mu)}+\frac{y_0^2}{(b^2-\lambda)(b^2-\mu)}+\frac{z_0^2}{(c^2-\lambda)(c^2-\mu)}=0;$$

ces relations se réduisent à deux et, en décomposant chacune des fractions du premier membre de chaque équation en deux autres, nous avons de suite les égalités

$$\frac{x_0^2}{a^2-\lambda}+\frac{y_0^2}{b^2-\lambda}+\frac{z_0^2}{c^2-\lambda}=\frac{x_0^2}{a^2-\mu}+\frac{y_0^2}{b^2-\mu}+\frac{z_0^2}{c^2-\mu}=\frac{x_0^2}{a^2-\nu}+\frac{y_0^2}{b^2-\nu}+\frac{z_0^2}{c^2-\nu};$$

finalement si nous désignons par k la valeur inconnue commune à ces trois expressions, nous sommes conduit à exprimer que les deux équations

$$\frac{xx_0}{a^2-\rho}+\frac{yy_0}{b^2-\rho}+\frac{zz_0}{c^2-\rho}-1=0,$$

$$\frac{x_0^2}{a^2-\rho}+\frac{y_0^2}{b^2-\rho}+\frac{z_0^2}{c^2-\rho}-k=0$$

ont les mêmes racines λ, μ, ν pour une certaine valeur de k; cette identification donne pour lieu du point (x, y, z) la droite $\dfrac{x}{x_0}=\dfrac{y}{y_0}=\dfrac{z}{z_0}$.

Mais il est facile de parvenir à ce résultat par la méthode qu'indique l'énoncé, en se servant des formules (1). En effet, à l'aide de ces formules, la relation d'orthogonalité écrite plus haut devient

$$\frac{(a^2-\nu)x_0}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)x}+\frac{(b^2-\nu)y_0}{(c^2-b^2)(a^2-b^2)y}+\frac{(c^2-\nu)z_0}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)z}=0;$$

les deux autres relations analogues deviennent

$$\frac{(a^2-\lambda)x_0}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)x}+\frac{(b^2-\lambda)y_0}{(c^2-b^2)(a^2-b^2)y}+\frac{(c^2-\lambda)z_0}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)z}=0,$$

$$\frac{(a^2-\mu)x_0}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)x}+\frac{(b^2-\mu)y_0}{(c^2-b^2)(a^2-b^2)y}+\frac{(c^2-\mu)z_0}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)z}=0.$$

Ces trois équations ont un déterminant nul et se réduisant à deux, et nous aurons des quantités proportionnelles aux inconnues en résolvant les deux dernières équations ; nous obtenons ainsi

$$\frac{\dfrac{x_0}{x(b^2-a^2)(c^2-a^2)}}{(b^2-\lambda)(c^2-\mu)-(b^2-\mu)(c^2-\lambda)}=\frac{\dfrac{y_0}{y(c^2-b^2)(a^2-b^2)}}{(c^2-\lambda)(a^2-\mu)-(c^2-\mu)(a^2-\lambda)}=\cdots,$$

ou

$$\frac{x_0}{x(b^2-a^2)(c^2-a^2)(b^2-c^2)(\lambda-\mu)} = \frac{y_0}{y(c^2-b^2)(a^2-b^2)(c^2-a^2)(\lambda-\mu)} = \ldots,$$

et nous déduisons immédiatement de là

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}.$$

4° La développable enveloppe des plans Π est le lieu des points par où passent deux plans Π confondus, c'est-à-dire le lieu des points pour lesquels l'équation du 3e degré en ρ a une racine double. Nous aurons donc les coordonnées des points de cette surface en rendant égaux deux des paramètres λ, μ, ν, dans les formules (1); on obtient ainsi les équations de la surface à l'aide de deux paramètres arbitraires,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} xx_0 &= \frac{(a^2-\lambda)^2(a^2-\mu)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)},\\ yy_0 &= \frac{(b^2-\lambda)^2(b^2-\mu)}{(c^2-b^2)(a^2-b^2)},\\ zz_0 &= \frac{(c^2-\lambda)^2(c^2-\mu)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}.\end{aligned}\right.$$

Ces équations mettent en évidence un double mode de génération de cette surface : les courbes $\lambda = c^{te}$ sont des droites, les génératrices rectilignes de la surface; les courbes $\mu = c^{te}$ sont des coniques; toutes ces courbes sont situées dans les plans Π, d'après la nature même des paramètres λ et μ.

Si on porte les valeurs de x, y, z dans les équations de deux plans quelconques, on obtient deux équations en λ et μ, du second degré en λ, du premier degré en μ, qui, par suite, ont quatre solutions communes; nous en concluons que l'ordre de la surface est 4. La développable est donc du 4e degré.

Les points de l'arête de rebroussement sont ceux pour lesquels les trois plans Π sont confondus; les équations de cette courbe sont donc

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{(a^2-\lambda)^3}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)x_0},\\ y &= \frac{(b^2-\lambda)^3}{(c^2-b^2)(a^2-b^2)y_0},\\ z &= \frac{(c^2-\lambda)^3}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)z_0};\end{aligned}\right.$$

elles montrent que l'arête de rebroussement est une cubique gauche. La développable enveloppe des plans Π est formée par les tangentes à cette courbe; les plans Π sont les plans osculateurs de la cubique, et le fait seul que par tout point de l'espace il passe trois de ces plans permettait de prévoir tous les résultats qui précèdent.

5° Chaque plan Π coupe la développable en deux espèces de points : en certains points il est tangent à cette surface, et, en d'autres, il est simplement sécant. Si l'on se reporte aux formules (2) et à la manière dont elles ont été établies, on voit que, pour les premiers points, le paramètre du plan Π est le paramètre double, pour les autres, le paramètre simple; donc en appelant h le paramètre d'un plan Π particulier, on aura les premiers points en faisant $\lambda = h$ dans les formules (2), et les seconds en faisant $\mu = h$; on trouve ainsi une droite et une conique, la droite devant être comptée deux fois, à cause du contact du plan Π avec la surface en chacun de ses points.

Cette conique est une parabole, car elle rencontre le plan de l'infini en deux points confondus; elle

passe évidemment au point de l'arête de rebroussement qui est dans le plan II $(\mu = h)$, et touche cette courbe en ce point; ceci se vérifie facilement en faisant $\lambda = h$ dans les équations de cette conique et en formant les équations de la tangente en ce point.

6° Il s'agit maintenant de trouver le lieu des foyers des coniques

$$x = \frac{(a^2-\lambda)^2(a^2-h)}{x_0(b^2-a^2)(c^2-a^2)},$$

$$y = \frac{(b^2-\lambda)^2(b^2-h)}{y_0(c^2-b^2)(a^2-b^2)},$$

$$z = \frac{(c^2-\lambda)^2(c^2-h)}{z_0(a^2-c^2)(b^2-c^2)},$$

quand h varie.

Nous allons à cet effet déterminer d'abord les points en lesquels la tangente est isotrope. On sait que les équations de la tangente au point dont le paramètre est λ sont

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{d\lambda}} = \frac{Y-y}{\frac{dy}{d\lambda}} = \frac{Z-z}{\frac{dz}{d\lambda}};$$

on a donc, dans le cas actuel, pour équations de la tangente au point (λ),

$$(4) \qquad \frac{x - A(a^2-\lambda)^2}{A(a^2-\lambda)} = \frac{y - B(b^2-\lambda)^2}{B(b^2-\lambda)} = \frac{z - C(c^2-\lambda)^2}{C(c^2-\lambda)},$$

en désignant par A, B, C les constantes qui figurent comme coefficients de $(a^2-\lambda)^2$, $(b^2-\lambda)^2$, $(c^2-\lambda)^2$, dans x, y, z; il en résulte que les paramètres des points en lesquels la tangente est isotrope sont donnés par l'équation

$$(5) \qquad A^2(a^2-\lambda)^2 + B^2(b^2-\lambda)^2 + C^2(c^2-\lambda)^2 = 0.$$

Si l'on se reporte aux valeurs de x, y, z, on voit de suite que ces deux points sont dans le plan

$$Ax + By + Cz = 0;$$

comme d'autre part nous connaissons *a priori* l'équation du plan de la conique (h),

$$\frac{xx_0}{a^2-h} + \frac{yy_0}{b^2-h} + \frac{zz_0}{c^2-h} - 1 = 0,$$

nous avons de suite les deux équations de la directrice de la parabole considérée. Pour obtenir le foyer, désignons par λ_1, λ_2 les racines de l'équation (5), par t_1 et t_2 les valeurs respectives des rapports (4), pour les valeurs λ_1 et λ_2, et pour les coordonnées du point commun aux deux tangentes isotropes; nous aurons en égalant les valeurs de x, y, z,

$$t_1(a^2-\lambda_1) - t_2(a^2-\lambda_2) = (a^2-\lambda_2)^2 - (a^2-\lambda_1)^2,$$

$$t_1(b^2-\lambda_1) - t_2(b^2-\lambda_2) = (b^2-\lambda_2)^2 - (b^2-\lambda_1)^2,$$

$$t_1(c^2-\lambda_1) - t_2(c^2-\lambda_2) = (c^2-\lambda_2)^2 - (c^2-\lambda_1)^2;$$

si nous posons $\tau = t_1 - t_2 - 2(\lambda_1 - \lambda_2)$, $\tau' = t_1\lambda_1 - t_2\lambda_2$, ces équations se simplifient et deviennent

$$a^2\tau - \tau' = \lambda_2^2 - \lambda_1^2,$$

$$b^2\tau - \tau' = \lambda_2^2 - \lambda_1^2,$$

$$c^2\tau - \tau' = \lambda_2^2 - \lambda_1^2;$$

nous voyons immédiatement qu'elles se réduisent à deux et ont pour solution $\tau = 0$, $\tau' = \lambda_1^2 - \lambda_2^2$. De ces deux dernières équations on déduit de suite

$$t_1 = \lambda_1 - \lambda_2, \qquad t_2 = \lambda_2 - \lambda_1,$$

et, en se servant de l'une de ces valeurs, on peut calculer de suite, à l'aide des rapports (4), les coordonnées du point commun aux deux tangentes isotropes, c'est-à-dire du foyer ; on trouve ainsi

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{x}{A} &= a^4 - a^2(\lambda_1+\lambda_2) + \lambda_1\lambda_2, \\ \frac{y}{B} &= b^4 - b^2(\lambda_1+\lambda_2) + \lambda_1\lambda_2, \\ \frac{z}{C} &= c^4 - c^2(\lambda_1+\lambda_2) + \lambda_1\lambda_2. \end{aligned}\right.$$

Il n'y a plus qu'à porter dans ces formules les valeurs de $\lambda_1+\lambda_2$ et $\lambda_1\lambda_2$ qui sont données par l'équation (5),

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \lambda_1+\lambda_2 &= 2\,\frac{A^2a^2+B^2b^2+C^2c^2}{A^2+B^2+C^2}, \\ \lambda_1\lambda_2 &= \frac{A^2a^4+B^2b^4+C^2c^4}{A^2+B^2+C^2}, \end{aligned}\right.$$

pour avoir les coordonnées du foyer en fonction de h.

Les équations (6) simplifiées à l'aide des formules (7) définissent le lieu des foyers. Ces équations montrent que x, y, z sont du 3e degré en h, avec un dénominateur commun du second degré. Le lieu est donc une cubique.

ALGÈBRE

436. — *Démontrer que l'on a*

$$1.2.3\ldots\ldots n > \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

et que l'on a

$$1.2.3\ldots\ldots n < \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

si n est inférieur à e.

1° Si l'on envisage la courbe $y = \mathrm{L}x$ et l'aire comprise entre cette courbe, l'axe des x et les ordonnées $x = 1$, $x = n$, on a de suite en considérant des rectangles circonscrits à cette aire ayant pour bases des segments égaux à 1 et portés par Ox et pour hauteurs les ordonnées L2, L3, ..., Ln, l'inégalité

$$\mathrm{L}2 + \mathrm{L}3 + \cdots + \mathrm{L}n > \int_1^n \mathrm{L}x.dx,$$

ou

$$\mathrm{L}(n!) > n\mathrm{L}n - n + 1;$$

on a donc *a fortiori*

$$\mathrm{L}(n!) > n\mathrm{L}n - n = \mathrm{L}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Par conséquent on a bien

$$n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Cette première inégalité peut d'ailleurs s'obtenir immédiatement en considérant le développement de e^n en série ; car on a

$$e^n = 1 + \frac{n}{1} + \frac{n^2}{1.2} + \cdots + \frac{n^n}{n!} + \cdots,$$

et par conséquent l'inégalité qui suit est évidente :

$$e^n > \frac{n^n}{n!};$$

c'est une autre façon d'écrire l'inégalité annoncée.

2° De même que précédemment on a, en considérant cette fois des rectangles inscrits,

$$L2 + L3 + \cdots + Ln < \int_1^{n+1} Lx.dx,$$

ou

$$L(n!) < (n+1)L(n+1) - n.$$

On déduit de là

$$L(n!) < L\frac{(n+1)^{n+1}}{e^n},$$

et, par suite,

$$n! < \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}.$$

Cette inégalité peut s'écrire

$$n! < \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} n,$$

ou, en introduisant un nombre a positif et inférieur à e,

$$n! < \left(\frac{n}{a}\right)^n \left(\frac{a}{e}\right)^n n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Or, quand n grandit indéfiniment, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ tend vers e, $n\left(\frac{a}{e}\right)^n$ ou $\frac{n}{\left(\frac{e}{a}\right)^n}$ tend vers 0; par conséquent au delà d'une certaine valeur de n, on a $n\left(\frac{a}{e}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < 1$ et, par suite,

$$n! < \left(\frac{n}{a}\right)^n.$$

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

448. — *Étant donnée une ellipse fixe* (E), *on considère toutes les coniques* (C) *qui sont bitangentes à cette ellipse, tangentes à une droite* (D), *et qui sont vues d'un point donné* P *sous un angle droit.*

On demande :

1° *Le lieu du pôle de la corde des contacts ;*

2° *D'étudier la nature de ce lieu, quand la droite* (D) *varie dans le plan ;*

3° *De trouver, dans le cas où la droite* (D) *est rejetée à l'infini, le lieu des foyers et l'enveloppe des axes des coniques* (C).

Soit $E \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ l'équation ponctuelle de l'ellipse donnée, rapportée à ses axes; désignons par α et β les coordonnées du pôle de la corde des contacts, par x_0 et y_0 celles du point P et enfin par $ux + vy + 1 = 0$ l'équation de la droite donnée (D). L'équation générale des coniques (C) est

$$\lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) + \left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1\right)^2 = 0,$$

avec les deux conditions qui expriment que ces coniques sont tangentes à la droite (D) et vues du point P sous un angle droit.

La première condition s'obtient en formant l'équation du faisceau des droites qui joignent l'origine aux deux points de rencontre de la conique (C) et de la droite (D), puis exprimant que le premier membre de cette équation homogène en x et y est un carré parfait. Nous obtenons ainsi et successivement

$$\lambda\left[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-(ux+vy)^2\right]+\left[\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+ux+vy\right]^2=0,$$

$$\left[\lambda\left(\frac{1}{a^2}-u^2\right)+\left(\frac{\alpha}{a^2}+u\right)^2\right]x^2+2\left[\left(\frac{\alpha}{a^2}+u\right)\left(\frac{\beta}{b^2}+v\right)-\lambda uv\right]xy+\left[\lambda\left(\frac{1}{b^2}-v^2\right)+\left(\frac{\beta}{b^2}+v\right)^2\right]y^2=0,$$

puis enfin la condition

$$\left[\lambda\left(\frac{1}{a^2}-u^2\right)+\left(\frac{\alpha}{a^2}+u\right)^2\right]\left[\lambda\left(\frac{1}{b^2}-v^2\right)+\left(\frac{\beta}{b^2}+v\right)^2\right]-\left[\left(\frac{\alpha}{a^2}+u\right)\left(\frac{\beta}{b^2}+v\right)-\lambda uv\right]^2=0;$$

cette condition se simplifie et se met aisément sous la forme

$$(1)\qquad -\Lambda\left(\lambda+\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-1\right)+(\alpha u+\beta v+1)^2=0,$$

où Λ désigne le premier membre de l'équation tangentielle de l'ellipse, pour les valeurs considérées actuellement de u et v, $\Lambda=a^2u^2+b^2v^2-1$.

Nous obtiendrons la seconde condition en remarquant que l'équation (1) représente, quand u et v varient, l'équation tangentielle de la conique (C); nous aurons alors les deux tangentes issues du point (x_0, y_0) en résolvant les deux équations simultanées (1) et $ux_0+vy_0+1=0$; l'équation en $\frac{u}{v}$ ou en $\frac{v}{u}$ s'obtient en éliminant la variable d'homogénéité entre les précédentes; nous trouverons ainsi, en désignant par λ' la quantité $\lambda+\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-1$.

$$\lambda'(ux_0+vy_0)^2-a^2u^2-b^2v^2+(\alpha-x_0)u+(\beta-y_0)v]^2=0,$$

ou

$$(\lambda'x_0^2-a^2)+(\alpha-x_0)^2]u^2+\cdots+[\lambda'(y_0^2-b^2)+(\beta-y_0)^2]v^2=0.$$

Il reste à exprimer que le produit des racines de cette équation est égal à -1, c'est-à-dire que la somme des coefficients des termes en u^2 et v^2 est nulle. On trouve ainsi la seconde condition :

$$(2)\qquad \lambda'C_0+(\alpha-x_0)^2+(\beta-y_0)^2=0,$$

où C_0 désigne la quantité $x_0^2+y_0^2-a^2-b^2$.

1° Nous aurons le lieu du point (α, β) en éliminant λ' entre les équations (1) et (2). Cette élimination est immédiate et donne

$$(3)\qquad \Lambda[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]+C_0(ux+vy+1)^2=0,$$

en désignant actuellement par x et y les deux coordonnées variables α et β. Ce lieu est une conique ayant pour foyer le point P et pour directrice correspondante la droite (D).

2° Pour que cette conique soit réelle, il faut que Λ et C_0 soient de signes contraires; si donc le point P est à l'extérieur du cercle orthoptique de l'ellipse (E), il faut que Λ soit négatif, c'est-à-dire que la droite (D) ne soit pas sécante à l'ellipse; si, au contraire, le point P est à l'intérieur du cercle orthoptique, il faut que la droite (D) soit sécante à l'ellipse (E); dans le cas où le point P est sur le cercle orthoptique, le lieu se réduit à $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=0$, à moins que Λ ne soit aussi nul, auquel cas le lieu est complètement indéterminé.

Supposons alors que C_0 et Λ soient de signes contraires, et désignons par e^2 l'excentricité de la conique (3); nous aurons $e^2=-\frac{C_0(u^2+v^2)}{\Lambda}$. En écrivant que e^2 est plus petit que 1, nous aurons la condition pour que cette conique soit une ellipse; nous trouverons ainsi $-\frac{C_0(u^2+v^2)}{\Lambda}<1$, ou

$$(4)\qquad \Lambda\Lambda+C_0(u^2+v^2)>0.$$

Le premier facteur, égalé à 0, fournit l'équation tangentielle de l'ellipse (E); le second donne de

même l'équation tangentielle d'une conique homofocale à (E) et dont l'équation ponctuelle est

$$(5) \qquad \frac{x^2}{a^2+C_0}+\frac{y^2}{b^2+C_0}-1=0.$$

Bornons notre discussion au cas où la conique (3) est réelle. Deux cas sont à distinguer :

Ou bien le point P est à l'extérieur du cercle orthoptique $(C_0>0)$; alors A est négatif, la droite (D) est non-sécante à l'ellipse (E) ; d'autre part la conique (5) est une ellipse extérieure à (E), et si (D) ne coupe pas cette conique, l'inégalité (4) est vérifiée, le lieu est *une ellipse* ; si (D) coupe cette conique, le lieu est *une hyperbole ;* si (D) est tangent à cette conique, le lieu est une *parabole ;* et enfin, dans le cas extrême où (D) est tangente à (E), le lieu se réduit à une *droite double*, deux fois la droite (D).

Ou bien le point P est intérieur au cercle orthoptique $(C_0<0)$; alors A est positif, la droite (D) est sécante à (E). D'ailleurs ce cas se subdivise en plusieurs autres : si le point P est tel que $-b^2<C_0<0$, c'est-à-dire si le point P est compris entre les deux cercles $x^2+y^2-a^2=0$ et $x^2+y^2-a^2-b^2=0$, la conique (5) est une ellipse intérieure à (E), les sécantes à cette conique donnent des *ellipses*, les sécantes à (E) seulement donnent des *hyperboles*, les tangentes à (5) des *paraboles* et les tangentes à (E), des *droites doubles ;* si l'on a $-a^2<C_0<-b^2$, la conique (5) est une hyperbole, et les résultats sont semblables aux précédents ; enfin si $-a^2-b^2<C_0<-a^2$, la conique (5) est imaginaire, toutes les coniques réelles du faisceau (3) sont des *hyperboles* ou, à la limite, des *droites doubles*.

3° Dans le cas où la droite (D) est rejetée à l'infini, la conique (C) est une parabole ; la condition (1) devient alors $\lambda=-\frac{\alpha^2}{a^2}-\frac{\beta^2}{b^2}$; et l'équation de la conique (C) est

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)-\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}-1\right)^2=0,$$

ou

$$(\beta x-\alpha y)^2+2(b^2\alpha x+a^2\beta y)-(b^2\alpha^2+a^2\beta^2+a^2b^2)=0.$$

Nous poserons $B=b^2\alpha^2+a^2\beta^2+a^2b^2$; puis nous formerons l'équation aux coefficients angulaires des tangentes issues du point (x_0, y_0) en formant l'équation aux abscisses des points de rencontre de cette conique avec la droite $y-y_0=m(x-x_0)$ et exprimant ensuite que cette équation a une racine double. Nous obtenons d'abord

$$(\beta-\alpha m)^2x^2+2[b^2\alpha+a^2\beta m-\alpha(\beta-\alpha m)(y_0-mx_0)]x+\alpha^2(y_0-mx_0)^2+2a^2\beta(y_0-mx_0)-B=0,$$

puis

$$[b^2\alpha+a^2m\beta-\alpha(\beta-\alpha m)(y_0-mx_0)]^2-(\beta-\alpha m)^2[\alpha^2(y_0-mx_0)^2+2a^2\beta(y_0-mx_0)-B]=0.$$

Cette relation simplifiée, ordonnée par rapport à m, et débarrassée du facteur $a^2\beta^2+b^2\alpha^2$, s'écrit

$$(6) \qquad (\alpha^2-2\alpha x_0+a^2)m^2+2(\beta x_0+\alpha y_0-\alpha\beta)m+\beta^2-2\beta y_0+b^2=0.$$

En exprimant que la somme des coefficients extrêmes est nulle, on obtient d'abord la condition pour que la parabole soit vue du point (x_0,y_0) sous un angle droit ; cette condition, qu'on aurait pu déduire immédiatement des relations (1) et (2), est actuellement

$$(7) \qquad \alpha^2+\beta^2-2\alpha x_0-2\beta y_0+a^2+b^2=0.$$

Si maintenant dans l'équation (6), on remplace x_0, y_0 par x, y, et si on exprime que cette équation se réduit alors à $k(m^2+1)=0$, on obtient les deux équations suivantes, qui définissent le foyer de la parabole,

$$(8) \qquad \begin{cases} \alpha^2-\beta^2-2\alpha x+2\beta y+a^2-b^2=0, \\ \alpha\beta-\beta x-\alpha y=0. \end{cases}$$

Nous aurons donc le lieu des foyers en éliminant α et β entre les équations (7) et (8). Or cette élimination peut se faire très simplement en calculant d'abord α^2 et β^2 à l'aide de l'équation (7) et de la première équation (8) ; on a alors linéairement, en fonction de α et β, les valeurs de α^2, β^2, $\alpha\beta$,

$$\alpha^2 = \alpha(x + x_0) - \beta(y - y_0) - a^2,$$
$$\beta^2 = -\alpha(x - x_0) + \beta(y + y_0) - b^2,$$
$$\alpha\beta = \alpha y + \beta x;$$

cela fait, on multiplie la première équation par β, la seconde par α, et l'on remplace dans les deux résultats α^2, β^2, $\alpha\beta$ par les valeurs précédentes tant qu'on le peut ; on arrive ainsi à deux équations linéaires en α et β,

$$\alpha(x_0y_0 - xy_0 - x_0y) + \beta(xx_0 - yy_0 + y_0^2 - a^2 - b^2) + a^2y + b^2(y - y_0) = 0,$$
$$\alpha(yy_0 - xx_0 + x_0^2 - b^2) + \beta(x_0y_0 - x_0y - y_0x) + a^2(x - x_0) + b^2x = 0.$$

De ces deux équations on déduit α et β, et il n'y a plus qu'à porter leurs valeurs dans l'équation $\alpha\beta = \alpha y + \beta x$, pour avoir l'équation du lieu. Ce calcul facile à faire conduit à un lieu du quatrième degré.

L'axe de la parabole (C) a pour coefficient angulaire $\frac{\beta}{\alpha}$; la direction perpendiculaire a pour coefficient angulaire $\frac{-\alpha}{\beta}$. L'axe de la parabole a donc pour équations

$$f'_x - \frac{\alpha}{\beta} f'_y = 0, \quad \text{ou} \quad \beta f'_x - \alpha f'_y = 0 :$$

cette équation développée est ici

$$(\alpha^2 + \beta^2)(\beta x - \alpha y) + (b^2 - a^2)\alpha\beta = 0 :$$

les coordonnées de cette droite sont données par

$$(9) \qquad \theta u = \beta(\alpha^2 + \beta^2), \qquad \theta v = -\alpha(\alpha^2 + \beta^2), \qquad \theta w = (b^2 - a^2)\alpha\beta.$$

Nous aurons l'équation tangentielle de l'enveloppe des axes en éliminant α, β et θ entre ces équations et la relation (7). Or des deux premières équations (9) nous déduisons $\frac{\alpha}{v} = \frac{\beta}{-u} = \mu$; les équations (9) deviennent alors

$$\theta = -\mu^3(u^2 + v^2), \qquad \theta w = c^2\mu^2 uv,$$

en désignant comme habituellement par c^2 la quantité $a^2 - b^2$; d'autre part, l'équation (7) devient

$$\mu^2(u^2 + v^2) - 2\mu(vx_0 - uy_0) + a^2 + b^2 = 0.$$

On a immédiatement la valeur de μ, $\mu = -\frac{c^2uv}{w(u^2 + v^2)}$; il n'y a plus qu'à porter cette valeur de μ dans la dernière équation pour avoir l'équation tangentielle de l'enveloppe des axes ; cette équation est

$$(10) \qquad c^4u^2v^2 + 2c^2uvw(vx_0 - uy_0) + (a^2 + b^2)w^2(u^2 + v^2) = 0 ;$$

elle montre que l'enveloppe des axes est une courbe de quatrième classe doublement tangente à la droite de l'infini aux deux points cycliques.

Remarque. — Les calculs sont plus simples en se servant dès le début des coordonnées tangentielles. C'est un exercice utile que nous signalons à nos lecteurs et qui ne présente pas de difficultés.

Il est bon en outre de remarquer que l'équation (7) peut s'écrire

$$(\alpha - x_0)^2 + (\beta - y_0)^2 = C_0.$$

On voit ainsi que les paraboles (C) ne peuvent être réelles que si C_0 est positif, c'est-à-dire si le point (P) est à l'extérieur du cercle orthoptique de l'ellipse (E) ; on peut alors poser

$$\alpha - x_0 = \sqrt{C_0}\cos\varphi, \qquad \beta - y_0 = \sqrt{C_0}\sin\varphi,$$

et tirer des équations (8) les coordonnées du foyer en fonction de $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$. On aperçoit ainsi immédiatement que le lieu des foyers est une quartique unicursale.

Solutions exactes par l'emploi des coordonnées tangentielles : MM. E. Bally (collège Stanislas) ; J. Lhémaud (lycée de Toulouse). A. Laubeaux (lycée de Besançon).

M. E. Dupocq, élève-ingénieur des télégraphes, nous a envoyé une solution géométrique intéressante de la première partie.

Solution analogue à la précédente, mais plus compliquée : M. C. Gholleau, répétiteur général au lycée de Marseille.

PHYSIQUE

463. — *Étudier la distribution des pressions dans une masse de liquide pesant enfermée dans un vase qui se déplace verticalement avec une accélération donnée. Un corps solide plongé dans ce liquide étant supposé maintenu en repos relatif à l'aide d'un ressort qui le relie au fond du vase, quelle est l'action supportée par ce ressort? Si le fond du vase est percé d'un orifice, que peut-on prévoir au sujet de l'écoulement du liquide par cet orifice? Examiner en particulier le cas d'un mouvement uniforme et celui d'un vase abandonné à lui-même et tombant en chute libre.*

La question doit être traitée comme dans le cas d'équilibre.

Un cylindre liquide vertical de hauteur z et de section σ supporte les forces verticales suivantes : son poids $\sigma z \mu g$, μ désignant la masse spécifique du liquide ; l'action $p\sigma$ due à la pression p sur sa base inférieure; l'action $p'\sigma$ due à la pression p' sur sa base supérieure. Ces forces, au lieu de maintenir l'équilibre comme dans le cas habituel, produisent une accélération donnée, γ ; elles ont donc pour résultante $\sigma z \mu \gamma$:

$$\sigma z \mu g + p'\sigma - p\sigma = \sigma z \mu \gamma,$$
$$p - p' = z\mu(g - \gamma).$$

La répartition des pressions est donc la même que si, le liquide étant en repos, la gravité était $g - \gamma$. Par suite, la résultante des actions sur une surface fermée de volume V sera

$$V\mu(g - \gamma).$$

Le corps plongé dans le liquide et fixé par un ressort supporte : son poids Vmg, m désignant sa masse spécifique ; l'action F du ressort; la poussée du liquide, $V\mu(g - \gamma)$; et ces forces, produisant une accélération γ, doivent avoir pour résultante $V\mu\gamma$:

$$Vmg + F - V\mu(g - \gamma) = V\mu\gamma,$$
$$F = -V(m - \mu)(g - \gamma).$$

Si on perce un orifice en mince paroi, la vitesse relative d'écoulement est déterminée par la pression au fond du vase et, par conséquent, donnée par l'expression

$$v = \sqrt{2(g - \gamma)h}.$$

Si γ était plus grand que g, la pression serait plus grande à la partie supérieure qu'à la partie inférieure, et le liquide s'écoulerait par un orifice percé à la partie supérieure du vase.

La question a été résolue partiellement par M. R. Delacroix, lycée de Besançon.

QUESTIONS PROPOSÉES

484. — On considère une ellipse fixe de foyers F et F′ et un point M mobile sur cette ellipse ; la tangente à l'ellipse au point M rencontre les directrices relatives aux foyers F et F′ respectivement en T et T′ ; par ces points on mène les deuxièmes tangentes TN et T′N′, et on considère les paraboles inscrites dans les angles MTN et MT′N′ et ayant respectivement pour foyers F′ et F. On demande alors :

1° De démontrer qu'une des deux autres tangentes communes aux deux paraboles est fixe et que la seconde est la normale à l'ellipse en M ;

2° De démontrer que les tangentes aux sommets des deux paraboles sont respectivement parallèles à MF et MF′ et passent par un point fixe, et de déduire de là le lieu du point de rencontre des directrices ;

3° De démontrer que les axes des deux paraboles se coupent sur la parallèle au petit axe passant par le point M, et de trouver le lieu de leur point de rencontre ;

4° De trouver les lieux des points de contact de chacune des paraboles avec les tangentes communes aux deux paraboles et variables. Vasnier.

485. — On considère une conique variable homofocale à une ellipse fixe et une droite fixe. On demande :

1° Le lieu du point de rencontre des normales à cette conique aux points où elle est coupée par la droite fixe;

2° L'enveloppe de la corde qui joint les pieds des deux autres normales concourantes avec les premières.

J. Chambon.

486. — Étant donnée une ellipse fixe et une ellipse de grandeur constante qui tourne autour de son centre, trouver le lieu du point de rencontre de deux tangentes communes à ces ellipses. J. Chambon.

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ET GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

431. — *La tangente au point* M *d'une parabole rencontre la tangente au sommet en un point* N. *On joint le sommet* O *au point* M, *on mène par* N *une parallèle à* OM *et par* O *une parallèle à* MN; *ces deux droites se rencontrent en un point* M'. *En supposant que le point* M *décrive la parabole, on demande :*

1° *L'enveloppe de* M'N;

2° *Le lieu du point* M';

3° *L'enveloppe de la droite* MM';

4° *Le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle* OMN.

1° Soit $y^2 - 2px = 0$ l'équation de la parabole, et $y - mx = 0$ celle de la droite OM. Les coordonnées du point M sont $\frac{2p}{m^2}$, $\frac{2p}{m}$, et la tangente en ce point à la parabole a pour équation

$$m^2x - 2my + 2p = 0.$$

Elle rencontre Oy au point N $\left(0, \frac{p}{m}\right)$, et l'équation de NM' est

$$m^2x - my + p = 0. \tag{1}$$

En écrivant que cette équation a une racine double en m, on a l'équation de l'enveloppe de la droite NM' :

$$y^2 - 4px = 0,$$

qui représente une parabole ayant même axe et même sommet que la parabole donnée et un paramètre double.

2° La droite OM' ayant pour équation $2y - mx = 0$, en éliminant m entre cette équation et l'équation (1) on obtient l'équation du lieu du point M'. On trouve aisément

$$2y^2 + px = 0,$$

qui représente une parabole aisée à construire.

3° La figure NOMM' est un parallélogramme; la droite MM' passe par le milieu $\left(x = 0, \quad y = \frac{p}{2m}\right)$ de ON. L'équation de cette droite peut donc s'écrire

$$\frac{y - \frac{p}{2m}}{x} = \frac{\frac{2p}{m} - \frac{p}{2m}}{\frac{2p}{m^2}},$$

ou

$$3m^2x - 4my + 2p = 0.$$

L'enveloppe de cette droite a pour équation

$$2y^2 - 3px = 0 :$$

c'est une parabole.

4° Le centre du cercle circonscrit au triangle OMN est à l'intersection des perpendiculaires menées respectivement aux droites ON et OM en leurs milieux :

$$y - \frac{p}{2m} = 0, \qquad y - \frac{p}{m} = -\frac{1}{m}\left(x - \frac{p}{m^2}\right).$$

En éliminant m entre ces deux équations, obtient l'équation du lieu demandé. On trouve

$$8y^2 - 2px + p^2 = 0 :$$

c'est encore une parabole

Louis-Joseph GOUJON, pensionnat de Valbenoite, à Saint-Etienne.

Solutions analogues par MM. Henri BONNARD, à Bordeaux; F. PÉGORIER, répétiteur au collège de Cette; G. A. POUILLIART; G. LŒDERICH.

M. É.-N. BARISIEN nous a aussi envoyé une solution de la même question et propose de démontrer :

1° *Que le lieu du centre de gravité du triangle* OMN *est une parabole ;*

2° *Que le lieu de l'orthocentre de ce même triangle est une autre parabole ;*

3° *Que le cercle circonscrit à ce triangle enveloppe une cubique circulaire unicursale.*

Solution géométrique. — 1° Soient F le foyer de la parabole; A et I les points de rencontre des droites MN, M'N avec l'axe de cette parabole. On a

$$AN = NM = M'O.$$

La figure ANOM' est donc un parallélogramme et I est le milieu de AO.

Dès lors, soit NF' la perpendiculaire élevée en N à M'N. On a, dans les triangles rectangles ANF, INF',

$$\overline{ON}^2 = OA.OF = OI.OF',$$

d'où $$OF' = 2OF.$$

La droite M'N enveloppe donc la parabole de foyer F' et de sommet O.

2° La droite M'O rencontre en H la parallèle menée par M à l'axe de la parabole donnée. La figure AMHO est un parallélogramme. Donc

$$OH = AM = 2OM';$$

OM' rencontre donc la parabole donnée en un point K tel que

$$OK = 4OM'.$$

Le lieu de M' est par suite la parabole homothétique inverse de la parabole donnée par rapport à O, le rapport d'homothétie étant $\frac{1}{4}$, c'est-à-dire la parabole de sommet O admettant pour foyer le point F'' situé à gauche de O tel que

$$OF'' = \frac{OF}{4}.$$

3° La droite M'M est une diagonale du parallélogramme NMOM'. Elle rencontre OA en un point J qui est le point de rencontre des médianes du triangle ONM'. Soit PF''' la perpendiculaire élevée à M'M au point P où elle rencontre ON et soit $P\varphi\left(O\varphi = \frac{OF}{2}\right)$ la perpendiculaire élevée en ce point à la droite IP. Les triangles rectangles IPφ, JPF''' donnent

$$\overline{OP}^2 = OI \times O\varphi = OJ \times OF''' = \frac{2}{3}OI.OF''',$$

d'où l'on tire $$OF''' = \frac{3}{2}O\varphi = \frac{3}{4}OF;$$

M'M enveloppe donc la parabole de sommet O et de foyer F'''.

4° Soit R le point de rencontre de la normale en M à la parabole avec l'axe. Les angles en M et O étant droits, le centre du cercle circonscrit au triangle OMN n'est autre que le milieu ω de NR. Des points ω et M abaissons les perpendiculaires ωC, MD sur l'axe de la parabole et soit E le point de rencontre de cette dernière droite avec OH.

On a

$$ED = NO = 2\omega C,$$
$$OD = F'R = 2FC.$$

Les triangles OED, FωC sont donc semblables. Fω est donc parallèle à OK et l'on a

$$F\omega = \frac{OE}{2} = \frac{OK}{8}.$$

Le lieu de ω est donc une parabole de sommet F, d'axe FR, le rapport de similitude de cette parabole à la parabole donnée étant égal à $\frac{1}{8}$.

Victor BERTRAND, répétiteur au lycée de Douai.

Bonnes solutions analytique et géométrique de M. G. de FRANCE.

---

432. — *Une conique à centre tourne autour de son centre. Trouver l'enveloppe de la polaire d'un point fixe et le lieu du pôle d'une droite fixe par rapport à cette conique.*

1° Prenons pour origine le centre O de la conique, pour axe des y la droite qui joint le point O au point fixe P, l'axe des x étant perpendiculaire à Ox.

Soient A et B les carrés des demi-longueurs des axes. L'équation de la conique peut s'écrire

$$\frac{(x\cos\alpha + y\sin\alpha)^2}{A} + \frac{(x\sin\alpha - y\cos\alpha)^2}{B} - 1 = 0,$$

en désignant par α l'angle que fait Ox avec l'un des axes de la conique.

La polaire du point $P(0, p)$ a pour équation

$$\frac{(x\cos\alpha + y\sin\alpha)p\sin\alpha}{A} - \frac{(x\sin\alpha - y\cos\alpha)p}{B} - 1 = 0,$$

ou, en posant $\operatorname{tg}\alpha = t$,

$$\frac{(x + ty)pt}{A} - \frac{(tx - y)p\cos\alpha}{B} - (1 + t^2) = 0.$$

On aura l'enveloppe de cette droite en écrivant que cette équation a une racine double en t. On trouve

$$p^2x^2\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)^2 - 4\left(\frac{py}{A} - 1\right)\left(\frac{py}{B} - 1\right) = 0,$$

équation qui représente une conique ayant son centre sur Oy.

2° Prenons pour origine le centre O de la conique, pour axe des y une parallèle à la droite fixe donnée et pour axe des x une perpendiculaire à cette droite.

Le pôle de la droite $(x - d = 0)$ par rapport à la conique

$$\frac{(x\cos\alpha + y\sin\alpha)^2}{A} + \frac{(x\sin\alpha - y\cos\alpha)^2}{B} - 1 = 0$$

est déterminé par les équations

$$\frac{\cos\alpha\,(x\cos\alpha + y\sin\alpha)}{A} + \frac{\sin\alpha(x\sin\alpha - y\cos\alpha)}{B} - \frac{1}{d} = 0,$$

$$\frac{\sin\alpha\,(x\cos\alpha + y\sin\alpha)}{A} - \frac{\cos\alpha\,(x\sin\alpha - y\cos\alpha)}{B} = 0.$$

Multiplions les deux membres de la première par $\cos\alpha$, ceux de la seconde par $\sin\alpha$ et ajoutons ; nous avons

$$\frac{x\cos\alpha + y\sin\alpha}{A} - \frac{\cos\alpha}{d} = 0.$$

Multiplions de même les deux membres de la première par $\sin\alpha$, ceux de la seconde par $-\cos\alpha$, puis ajoutons ; nous obtenons

$$\frac{x\sin\alpha - y\cos\alpha}{B} - \frac{\sin\alpha}{d} = 0.$$

Il est alors aisé d'éliminer $\operatorname{tg}\alpha$ entre ces deux dernières équations ; il vient

$$\left(\frac{x}{A}-\frac{1}{d}\right)\left(\frac{x}{B}-\frac{1}{d}\right)+\frac{y^2}{AB}=0.$$

Cette équation représente un cercle ayant son centre sur Ox.

J. HAIS.

Ont résolu la question : MM. G. de France, E.-N. Barisien.

---

446. — *Lieu du milieu d'une corde de longueur constante inscrite dans une parabole.*

Soient $y^2-2px=0$ l'équation de la parabole rapportée à ses axes ordinaires et $A(x, y)$, $B(x', y')$ les extrémités de la corde indiquée dans l'une de ses positions ; désignons par l la longueur de la corde AB. Nous aurons successivement :

(1) $$y^2-2px=0, \qquad y'^2-2px'=0,$$

(2) $$(x-x')^2+(y-y')^2=l^2,$$

et

(3) $$x+x'=2X, \qquad y+y'=2Y,$$

en appelant X et Y les coordonnées du milieu de AB, c'est-à-dire d'un point du lieu.

Des équations (1) nous tirons $x=\frac{y^2}{2p}$, $x'=\frac{y'^2}{2p}$; l'équation (2) devient alors, en tenant compte de la seconde des équations (3),

$$(y-y')^2=\frac{p^2l^2}{Y^2+p^2};$$

la première des équations (3) devient

$$y^2+y'^2=4pX,$$

et l'on déduit de ces deux équations

$$2yy'=4pX-\frac{p^2l^2}{Y^2+p^2},$$

puis,

$$(y+y')^2=8pX-\frac{p^2l^2}{Y^2+p^2};$$

mais $y+y'=2Y$; l'équation du lieu est donc

(4) $$4Y^2=8pX-\frac{p^2l^2}{Y^2+p^2}.$$

Pour construire cette courbe, il suffit d'étudier la fonction X de Y ; or si on change Y en $-Y$, X ne change pas, la courbe est donc symétrique par rapport à Ox et il suffit, pour l'étude de X, de faire varier Y de 0 à $+\infty$. La valeur de X est

$$X=\frac{1}{8p}\left(4Y^2+\frac{p^2l^2}{Y^2+p^2}\right);$$

on en déduit immédiatement

$$\frac{dX}{dY}=\frac{1}{4p}\left(4Y-\frac{p^2l^2Y}{(Y^2+p^2)^2}\right),$$

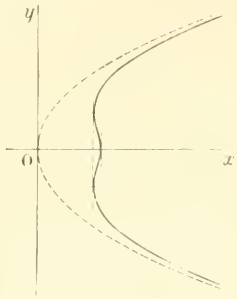
ou

$$\frac{dX}{dY}=\frac{4(Y^2+p^2)^2-p^2l^2}{4p(Y^2+p^2)^2}Y.$$

Le numérateur s'annule pour $Y=0$ et pour les valeurs de Y qui vérifient les équations

$$2(Y^2+p^2)=\pm pl;$$

seules, les valeurs qui correspondent au signe $+$ sont susceptibles d'être réelles ; elles ne le sont d'ailleurs que si l est plus grand que $2p$. Plaçons-nous d'abord dans cette hypothèse ; nous voyons alors que $\frac{dX}{dY}$ n'est nul que pour $Y=0$ et $Y_0=\sqrt{\frac{p}{2}(l-2p)}$. De 0 à Y_0, $\frac{dX}{dY}$ est négative, X décroît,



de $\frac{l^2}{8p}$ à une certaine valeur positive ; puis, de Y_0 à $+\infty$, $\frac{dX}{dY}$ est positive. X croît jusqu'à $+\infty$.

Appelons X_1 l'abscisse de la parabole qui correspond au même Y que l'abscisse de la courbe ; nous aurons $X_1 = \frac{Y^2}{2p}$ et

$$X - X_1 = \frac{pl^2}{8Y^2 - l^2}.$$

Cette relation nous montre que la courbe proposée est tout entière à l'intérieur de la parabole et asymptote à cette parabole. La portion de courbe étudiée est alors aisée à construire, et la symétrie par rapport à Ox permet d'achever le lieu.

Si $l < 2p$, X croît constamment et le lieu total affecte la forme d'une parabole ordinaire ; elle est d'ailleurs toujours à l'intérieur de la parabole donnée et asymptote à cette courbe.

E. MERLIN (Bruxelles).

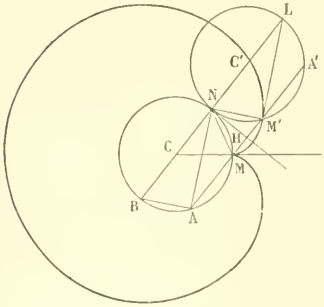
Solutions analogues : MM. E.-N. Barisien ; G. de Fraange (Versailles) ; J. Goujon (Pensionnat de Valbenoîte).
Solution d'un problème plus général : M. Mario Guesde.

447. — *Un cercle C roule sur un autre, C, fixe, qui lui est égal. Soient M un point fixe sur C, M son correspondant sur C. La droite MM′ coupant C en A, C en A′, on joint M′, A avec le point N de contact des deux cercles ; on demande :*

1° De démontrer que le triangle M′NA est rectangle ;

2° D'en déduire le lieu du point M.

1° Puisque les arcs NM, NM′ ont même longueur dans des cercles égaux, on a évidemment NM = NM′, le triangle NMM′ est isocèle, et la bissectrice de l'angle MNM′ est, par suite, la hauteur de ce triangle ; mais cette bissectrice est la tangente commune en N aux deux cercles ; donc MM′ est parallèle à la ligne des centres CC′. Alors on a $\widehat{M'NH} = \widehat{HNM}$ et $\widehat{HNM} = \widehat{NAM}$; par suite



$$\widehat{ANM'} = \widehat{ANH} + \widehat{HNM'} = \widehat{ANH} + \widehat{NAM};$$

donc l'angle ANM′ est droit.

2° Les deux droites AB et NM′ sont parallèles, comme étant perpendiculaires à la même droite AN ; on a donc AM′ + BN = 2R.

Ceci montre clairement que le lieu de M′ est une cardioïde, c'est-à-dire un limaçon de Pascal à un rebroussement.

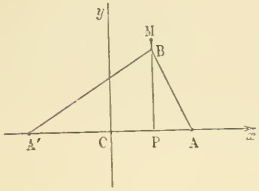
E. MERLIN (Bruxelles).

Remarque. — L'identité entre la cardioïde et l'épicycloïde à un rebroussement est un fait très connu et généralement enseigné aux élèves de Mathématiques spéciales.

A résolu la question : M. G. de Fraange (Versailles).

451. — *On donne la base et le périmètre d'un triangle variable. Trouver le lieu du point de la hauteur qui est à une distance de la base égale à l'un des autres côtés.*

Prenons pour axe de x la base fixe du triangle et pour axe des y la perpendiculaire élevée au milieu de cette base.



Soient A et A' les sommets de la base, a et $-a$ leurs abscisses, B l'autre sommet, α et β ses coordonnées ; si nous exprimons que le périmètre du triangle est constant, nous avons

$$\sqrt{(\alpha - a)^2 + \beta^2} + \sqrt{(\alpha - a)^2 + \beta^2} = k,$$

k désignant une constante ; d'autre part, les coordonnées d'un point du lieu, M, sont $x = \alpha$ et $y = \sqrt{(\alpha - a)^2 + \beta^2}$, par exemple. La première équation peut donc s'écrire $k - y = \sqrt{(\alpha + a)^2 + \beta^2}$; en élevant cette équation au carré, tenant compte de $y^2 = \alpha^2 + \beta^2 + a^2 - 2a\alpha$, puis remplaçant α par x, nous obtenons l'équation du lieu,

$$4ax + 2ky - k^2 = 0;$$

ce lieu est une droite.

Si nous avions pris le point M au-dessous de l'axe Ox, si nous avions posé $y = -\sqrt{(\alpha - a)^2 + \beta^2}$ nous aurions obtenu la droite symétrique de la précédente par rapport à Ox,

$$4ax - 2ky - k^2 = 0.$$

Enfin en prenant y égal à l'autre côté, on obtient deux nouvelles droites symétriques des précédentes par rapport à Oy. Le lieu total se compose de quatre droites.

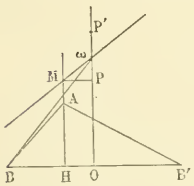
Mais ce lieu ne correspond pas tout entier au problème proposé : il y en a une portion qu'on obtient en prenant la différence arithmétique des radicaux et qui correspond à un autre problème, analogue au précédent et dans lequel on donne la base du triangle et la différence des deux autres côtés ; ces deux problèmes ne sont pas possibles en même temps à l'aide de nombres tous réels. Seulement il faut remarquer que le point B n'intervient dans la question que par la parallèle à Oy sur laquelle il est situé et qu'il peut parfaitement être imaginaire ; il suffit que la longueur choisie, AB par exemple, soit réelle. Or si l'on prend AB réel, A'B le sera aussi, soit que l'on veuille avoir $AB + A'B = k$ ou $|AB - A'B| = k$, ou seulement la seconde équation, si elle est seule possible. Le point B sera alors déterminé par l'intersection de deux cercles ayant pour centres A et A'; l'axe radical de ces deux cercles est toujours réel, c'est PB ou PM ; nous voyons donc que le point M obtenu ainsi est toujours réel. Il est facile avec cette interprétation d'expliquer l'origine de chaque point du lieu et de voir quelle équation l'a fourni. Il suffit pour cela de revenir à l'équation dont on est parti et de comparer à $\pm k$, la valeur de l'ordonnée du point M considéré.

BLAZY-LACOMBE (lycée de Toulouse).

Ont résolu la question : MM. E. N. Barisien ; J. Goujon (pensionnat de Valbenoîte).

Solution géométrique. — Soit ABB' un triangle répondant à la question; sur la hauteur HA, soit

$$HM = AB.$$



Sur la perpendiculaire Oω au milieu de BB', soient

$$OP = AB, \qquad OP' = AB'.$$

Il est évident que

$$\overline{HB}^2 - \overline{HB'}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AB'}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{OP'}^2.$$

Si ω est le milieu de PP', on a donc

$$\overline{BB'} \cdot \overline{OH} = \overline{PP'} \cdot \overline{\omega O}.$$

égalité d'où l'on déduit

$$\overline{OB} \cdot \overline{MP} = \overline{\omega P} \cdot \overline{\omega O}.$$

Les triangles MPω et ωOB sont donc semblables : le point ω étant fixe, le lieu du point M est donc la droite ωM, qui fait avec ωO un angle égal à l'angle ωBO. Alpha.

452. — *Deux paraboles égales ont leurs axes rectangulaires. L'une est fixe; l'autre, mobile; une des cordes communes passe au pied de la directrice. Trouver le lieu du sommet de la seconde parabole.*

Prenons pour axes la directrice et l'axe de la parabole fixe; l'équation de cette courbe est $y^2 - 2px + p^2 = 0$. Celle de la parabole mobile est $(x - \alpha)^2 = \pm 2p(y - \beta)$ en désignant par α et β les coordonnées du sommet. Si alors nous désignons par $\lambda y = x$ l'équation de la sécante commune qui passe à l'origine, il faudra que les deux équations qui donnent les abscisses des points de rencontre de cette droite avec les deux paraboles aient les mêmes racines; or ces équations sont

$$x^2 - 2p\lambda^2 x + p^2\lambda^2 = 0$$

et

$$x^2 - 2\left(\alpha \pm \frac{p}{\lambda}\right)x + \alpha^2 \pm 2p\beta = 0.$$

Considérons d'abord le signe $+$ devant p; nous aurons, en identifiant les deux équations,

$$\alpha + \frac{p}{\lambda} = p\lambda^2, \qquad 2p\beta = -\alpha^2 + p^2\lambda^2;$$

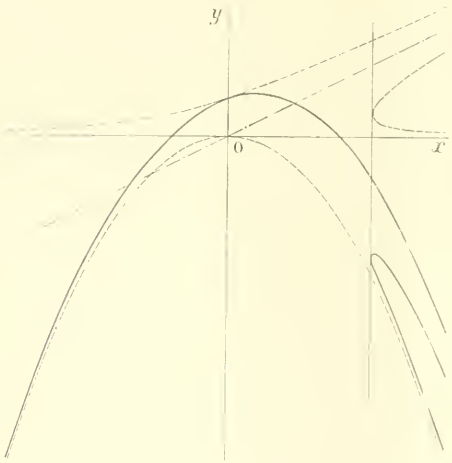
d'où nous déduisons les valeurs de α et de β,

$$(1)\quad \begin{cases} \alpha = p\left(\lambda^2 - \dfrac{1}{\lambda}\right), \\ \beta = -\dfrac{p}{2}\left(\lambda^2 - \dfrac{1}{\lambda}\right)^2 + \dfrac{p}{2}\lambda^2. \end{cases}$$

Ce sont les équations du lieu en fonction d'un paramètre λ; elles nous montrent que cette courbe est du sixième degré. L'élimination de λ entre ces deux équations est d'ailleurs très facile, et nous donne l'équation ordinaire du lieu, en remplaçant α par x et β par y,

$$(2)\quad (x^2 + 2py)(x^2 - px + 2py)^2 - p^6 = 0.$$

Si nous prenons le signe $-$ devant le paramètre p de la seconde parabole, nous obtenons le lieu symétrique du précédent par rapport à Ox, ainsi que cela est d'ailleurs évident géométriquement.



Pour construire cette courbe, nous remarquerons d'abord qu'elle admet pour direction asymptotique sextuple l'axe des y et que les branches correspondantes sont des branches paraboliques; en outre qu'elle est tout entière à l'extérieur de la parabole $x^2 + 2py = 0$; puis nous construisons la courbe auxiliaire qui a pour équations

$$(3)\quad x = p\left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}\right), \quad y = \frac{p}{2}\lambda^2;$$

ensuite il faudra retrancher de chacune des ordonnées de cette courbe, la quantité $\dfrac{x^2}{2p}$, c'est-à-dire leur ajouter les ordonnées correspondantes de la parabole $x^2 + 2py = 0$. Or en prenant la dérivée de x par rapport à λ et annulant cette dérivée, on obtient immédiatement les variations de x; celles de y sont évidentes (équations (3)), et nous pouvons facilement former le tableau suivant :

λ	x	y
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
	décroît	déc.
$-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$	min. $p\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)$	
	croît	
0	$+\infty$ / $-\infty$	min. 0
	croît	croît
1	0	$\frac{p}{2}$
	croît	croît
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Remarquons maintenant que l'asymptote qui correspond à λ, ∞ a pour équation $y = \frac{x}{2}$, que c'est une asymptote double et que la courbe auxiliaire est une cubique, nous pourrons alors la tracer sans difficulté: elle est indiquée en pointillé sur la figure; il en est de même de la parabole auxiliaire $x^2 + 2py = 0$. En retranchant alors les ordonnées de cette parabole de celles de la cubique, on obtient aisément la forme du lieu. Il a deux branches asymptotes à la parabole auxiliaire.

AUZERAM, Montpellier.

Solution différente, mais complète, sauf le tracé de la courbe : M. E. N. BARISIEN.

REMARQUES. — 1° *Le centre des moyennes distances des quatre points d'intersection des deux paraboles est sur l'axe de la parabole fixe.*

2° *Si l'une des sécantes communes aux deux paraboles passe par un point donné de l'axe de la parabole fixe, le sommet de la parabole mobile décrit une sextique.*

3° *Le pôle de cette droite, par rapport à la parabole fixe, est situé sur l'ordonnée du foyer de cette parabole.* (E. N. BARISIEN.)

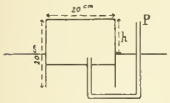
CONCOURS DE 1895 (*Suite*).

École des Mines de Saint-Étienne.

Physique et Chimie.

I. — Énoncer le principe d'Archimède, le démontrer, et montrer comment on peut le vérifier expérimentalement.

II. — **487.** Une cloche ayant un diamètre de 20^{cm}, une hauteur de 20^{cm}, a une épaisseur de paroi uniforme de 1^{mm}. Elle pèse 1^{kg}; elle est plongée verticalement dans l'eau et guidée latéralement de manière à se tenir verticale. On la met intérieurement en communication avec un récipient ayant de l'air à la pression P, au moyen d'un tube fin de volume négligeable. La pression extérieure est de 76^{cm}.



1° Quelles sont les valeurs extrêmes de P pour lesquelles la cloche serait complètement immergée ou complètement émergée ?

2° Calculer h quand $P = 79^{cm}$.

3° La communication avec le réservoir d'air étant supprimée, on demande quel poids il faudra ajouter sur la cloche pour la faire affleurer et quelle est la hauteur de l'eau dans la cloche à ce moment.

III. — Quel est le volume de chlore sec mesuré à 0° et à 76^{cm} que l'on obtient en traitant avec de l'acide chlorhydrique en excès 100^{gr} de bioxyde de manganèse pur ?

Poids atomiques : Cl = 35,50 ; Mn = 55 ; O = 16.

Le poids du litre d'air à 0° et 76^{m} est $1^{gr},43$.

(*30 juillet, de 2 h. 1/2 à 6 h.*

Mathématiques.

488. — On donne un point fixe A et une droite fixe MN ne passant pas par ce point. Deux droites AB, AC, de coefficients angulaires m et m', passant par le point A, rencontrent la droite MN aux points B et C.

1° Écrire l'équation générale des cercles S passant par les trois points A, B, C.

2° On suppose que AB et AC tournent autour de A en faisant entre elles un angle constant θ. On demande le lieu des centres des cercles S.

3° On mène des tangentes en A, B, C aux cercles S. L'angle θ restant constant, on demande le lieu des points de rencontre deux à deux de ces tangentes et on demande de discuter la forme de ce lieu lorsque θ varie de 0 à 180°.

(31 juillet, de 7 h. 1/2 à 11 h. 1/2.)

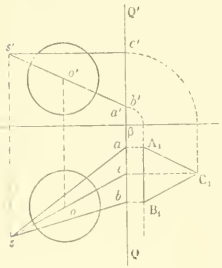
Calcul trigonométrique.

Calculer les angles et les côtés des deux triangles ayant les éléments communs suivants :

$$a = 58^m,9251, \qquad c = 32^m,0462, \qquad C = 22^\circ\ 37'\ 11'',52.$$

Calculer en outre la surface de la différence des deux triangles.

(31 juillet, de 3 h. à 1 h.)



Épure de géométrie descriptive.

Pénétration d'une sphère par une pyramide triangulaire, ayant pour base sur le plan de profil QoQ' un triangle isocèle $A_1B_1C_1$. L'arête sc en projection horizontale passe par le point o, et $s'a'$, $s'b'$ passent en projection verticale par o' ; sc, $s'c'$ est horizontale.

Construire l'intersection des trois arêtes et des trois faces de la pyramide avec la sphère. Mener les tangentes en un des points d'intersection de l'arête horizontale avec la sphère.

Représenter à part le solide commun et développer ses faces planes.

(1er août, de 8 h. 1/2 à 11 h. 1/2.)

QUESTIONS PROPOSÉES

489. — Soient Ox, Oy deux axes rectangulaires. Ox porte un segment fixe $AA' : OA = OA' = a$; Oy porte un segment variable $BB' : OB \times OB' = k^2$. On considère les coniques (C) passant par les quatre points A, A', B, B' et tangentes à une droite fixe Δ parallèle à Ox.

1° Montrer que les coniques (C) restent tangentes à une parabole (P).

2° Trouver le lieu des centres des coniques (C).

3° Soient O le centre d'une conique (C) et M le point où cette conique touche la parabole (P) : trouver le lieu du second point de rencontre de la droite OM avec la conique (C). HÉNET, à Toulouse.

490. — On considère deux droites rectangulaires Ox et Oy, un point A fixe sur Ox, un point B fixe sur Oy et un point P, quelconque, mais donné dans le plan des axes. On considère en outre les paraboles inscrites dans le triangle OAB.

1° On demande l'enveloppe des polaires du point P par rapport à ces paraboles.

2° Cette enveloppe est une conique (C), et, en supposant que le point P se déplace dans le plan et que la droite AB pivote autour de A, on demande le lieu du point P pour que la conique (C) passe au point O et que la somme des carrés des longueurs de ses axes soit constante et égale à l^2.

3° Trouver, dans ces conditions, le lieu des centres des coniques (C). AUZERAM, à Montpellier.

491. On considère toutes les hyperboles équilatères

$$H = x^2 + 2\lambda xy - y^2 - 2a\lambda x = 0.$$

1° Trouver le nombre des hyperboles H qui sont tangentes à une droite donnée.

2° Trouver la relation qui existe entre les droites D pour lesquelles l'un des points de contact est sur le cercle

$$C = x^2 + y^2 - 2\rho x = 0;$$

combien y a-t-il de ces droites parallèles à une direction donnée ou passant par un point donné ?

3° Combien y a-t-il d'hyperboles H doublement tangentes au cercle C ? Lieu du point de contact autre que l'origine, quand C varie. Construire ce lieu. E. H.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

6e Année. N° 6. Mars 1896.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LA CONSTRUCTION DE CERTAINES COURBES ALGÉBRIQUES

EN COORDONNÉES POLAIRES

par M. **H. Andoyer**,

Chargé de cours à la Faculté des sciences de Paris.

Soit $\rho = f(\omega)$, $f(\omega)$ étant une fonction rationnelle des lignes trigonométriques d'un certain nombre limité d'angles tous commensurables avec ω, l'équation en coordonnées polaires d'une courbe C, nécessairement algébrique. Je vais montrer comment on peut construire cette courbe le plus simplement possible.

Soit α le plus petit angle positif, tel que l'on ait

$$f(\omega + \alpha) = \varepsilon f(\omega),$$

ε représentant l'unité positive ou négative. Alors on a aussi, p étant un entier positif ou négatif,

$$f(\omega + p\alpha) = \varepsilon^p f(\omega),$$

et il est clair que, réciproquement, les angles $p\alpha$ sont les seuls angles θ tels que la fonction $f(\omega + \theta)$ soit égale au signe près à la fonction $f(\omega)$.

Comme la fonction $f(\omega)$, d'après sa définition, admet certainement pour période un certain multiple de 2π, on voit que l'angle α existe toujours et est de la forme $\frac{m}{n}\pi$, m et n étant deux entiers positifs, premiers entre eux : cet angle est par suite facile à déterminer dans chaque cas particulier.

Les multiples de α qui sont en même temps multiples de π sont les multiples de $n\alpha$, puisque m et n sont premiers entre eux : le premier est $n\alpha$, égal à $m\pi$.

Pour obtenir la courbe C tout entière, sans duplication, il faut faire varier ω dans un intervalle total $2h\pi$ tel que h soit le plus petit entier positif donnant la relation

$$f(\omega + 2h\pi) = f(\omega),$$

ou simplement dans l'intervalle $h\pi$, si h est impair et si l'on a

$$f(\omega + h\pi) = -f(\omega).$$

Ceci posé :

1° Si l'on a $\varepsilon = 1$, m pair et n impair, on obtient toute la courbe C en faisant varier ω dans un intervalle total de $m\pi$: la courbe se compose de n arcs égaux $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Le premier de ces arcs est obtenu en faisant varier ω depuis une valeur arbitraire ω_0 jusqu'à $\omega_0 + \alpha$; le second correspond à la variation de ω depuis $\omega_0 + \alpha$ jusqu'à $\omega_0 + 2\alpha$ et n'est autre que l'arc A_1, que l'on a fait tourner de l'angle α ; et ainsi de suite ;

2° Si l'on a $\varepsilon = -1$, m impair et n impair, on arrive exactement aux mêmes conclusions, sauf que l'arc A_2 est le symétrique par rapport à l'origine O de l'arc A_1 que l'on a fait tourner de l'angle α ; l'arc A_3 est l'arc A_1 que l'on a fait tourner de l'angle 2α ; et ainsi de suite ;

3° Si l'on a $\varepsilon = 1$, m impair, n pair ou impair, on obtient toute la courbe C en faisant varier ω

dans un intervalle total de $2m\pi$: la courbe se compose de $2n$ arcs égaux $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$. Le premier de ces arcs est obtenu en faisant varier ω depuis ω_0 jusqu'à $\omega_0 + \alpha$; le second, qui correspond à la variation de ω depuis $\omega_0 + \alpha$ jusqu'à $\omega_0 + 2\alpha$, est l'arc A_1 que l'on a fait tourner de l'angle α ; et ainsi de suite ;

4° Si l'on a $\varepsilon = -1$, m et n de parités différentes, on arrive exactement aux mêmes conclusions, sauf que l'arc A_2 est le symétrique par rapport à l'origine O de l'arc A_1 que l'on a fait tourner de l'angle α ; l'arc A_3 est l'arc A_1 que l'on a fait tourner de l'angle 2α ; et ainsi de suite.

On voit que dans tous les cas, il suffit de faire varier ω de ω_0 à $\omega_0 + \alpha$, dans un intervalle α, et de répéter l'arc ainsi obtenu un nombre convenable de fois dans des angles déterminés pour avoir toute la courbe C : en outre le point de la courbe qui correspond à une valeur donnée de ω se détermine toujours sans difficulté.

L'origine O est un centre pour la courbe C s'il existe un entier k tel que l'on ait

$$f(\omega + 2k\pi) = -f(\omega),$$

ou encore s'il existe un entier k' tel que l'on ait

$$f(\omega + (2k' + 1)\pi) = f(\omega).$$

Nous dirons que O est centre de première espèce dans le premier cas, et centre de seconde espèce dans le second cas. Alors, on voit tout de suite que la courbe C n'a pas de centre en O si l'on a $\varepsilon = 1$, m pair, n impair ou bien $\varepsilon = -1$, m impair, n impair; O est centre de première espèce pour la courbe C si l'on a $\varepsilon = -1$, m pair, n impair ; O est centre de seconde espèce pour la courbe C si l'on a $\varepsilon = 1$, m impair, n pair ou impair, ou bien $\varepsilon = -1$, m impair, n pair.

Quand la courbe C a l'origine O pour centre, et seulement dans ce cas, elle se compose de $2n$ arcs égaux $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$: les arcs $A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots, A_{2n}$ sont respectivement symétriques des arcs $A_1, A_2, \ldots, A_n$ par rapport au centre O. Donc, dans ce cas, après avoir obtenu la moitié de la courbe, en faisant varier ω de ω_0 à $\omega_0 + n\alpha$ ou $\omega_0 + m\pi$, on obtient l'autre moitié par symétrie par rapport au point O.

La construction se simplifie encore quand la courbe C possède un ou plusieurs axes de symétrie passant en O. Supposons qu'il existe un angle β tel que l'on ait

$$f(2\beta - \omega) = \varepsilon' f(\omega),$$

ε' représentant l'unité positive ou négative.

Si $\varepsilon' = 1$, la droite $\omega = \beta$ est pour la courbe C un axe de symétrie que nous qualifierons de première espèce ; si $\varepsilon' = -1$, la droite $\omega = \beta + \frac{\pi}{2}$ est pour la courbe C un axe de symétrie que nous qualifierons de seconde espèce.

Réciproquement, tout axe de symétrie de la courbe C passant par O, répond à l'une ou l'autre de ces deux définitions.

D'ailleurs, on a aussi

$$f(2\beta + p\alpha - \omega) = \varepsilon^p \varepsilon' f(\omega),$$

et il est clair que les angles $2\beta + p\alpha$ sont les seuls angles θ tels que la fonction $f(\theta - \omega)$ soit égale au signe près à la fonction $f(\omega)$. Donc les droites $\omega = \beta + p\frac{\alpha}{2}$ sont des axes de première espèce si $\varepsilon^p \varepsilon' = 1$, et les droites $\omega = \beta + p\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2}$ sont des axes de seconde espèce si $\varepsilon^p \varepsilon' = -1$. En outre, la courbe C n'a pas d'autres axes de symétrie passant par l'origine O.

Cela étant, il est facile d'énumérer les divers axes de symétrie que possède la courbe C dès qu'elle en a un.

1° Si l'on a $\varepsilon = 1$, m pair et n impair, la courbe a n axes de symétrie de première ou de

seconde espèce suivant que l'on a $\varepsilon' = 1$ ou $\varepsilon' = -1$; ces axes forment une étoile régulière à $2n$ rayons, l'angle de deux rayons consécutifs étant $\frac{\pi}{n}$.

2° Si l'on a $\varepsilon = -1$, m impair et n impair, la courbe a n axes de symétrie qui sont chacun des deux espèces : ces axes forment une étoile régulière comme ci-dessus.

3° Si l'on a $\varepsilon = 1$, m impair, n pair ou impair, la courbe a $2n$ axes de symétrie de première ou de seconde espèce suivant que l'on a $\varepsilon' = 1$ ou $\varepsilon' = -1$: ces axes forment une étoile régulière à $4n$ rayons, l'angle de deux rayons consécutifs étant $\frac{\pi}{2n}$.

4° Si l'on a $\varepsilon = -1$, m et n de parités différentes, la courbe a n axes de symétrie de chaque espèce; les n axes de chaque espèce forment une étoile régulière à $2n$ rayons; l'ensemble des $2n$ axes forme une étoile régulière à $4n$ rayons.

On peut remarquer, ainsi qu'il était évident *a priori*, que la courbe n'a de centre que si elle a un nombre pair d'axes; dans ce cas, les axes sont perpendiculaires l'un sur l'autre deux à deux; les n axes d'une étoile à $2n$ rayons ne sont perpendiculaires l'un sur l'autre deux à deux que si n est pair.

Si β est un angle tel que l'on ait

$$f(2\beta - \omega) = \varepsilon' f(\omega),$$

choisissons pour ω_0 l'angle $\beta - \frac{\alpha}{2}$. Pour obtenir l'arc A_1, il faut faire varier ω de $\beta - \frac{\alpha}{2}$ à $\beta + \frac{\alpha}{2}$; mais il suffit de faire varier ω de β à $\beta + \frac{\alpha}{2}$ et de prendre ensuite le symétrique de l'arc ainsi obtenu par rapport à la droite $\omega = \beta$ ou à la droite $\omega = \beta + \frac{\pi}{2}$ suivant que l'on a $\varepsilon' = 1$ ou $\varepsilon' = -1$. De même l'arc A_2 se composera de deux parties symétriques par rapport à l'axe $\omega = \beta + \alpha$ ou $\omega = \beta + \alpha + \frac{\pi}{2}$, suivant la valeur de ε'; et ainsi de suite.

Mais pour obtenir la courbe, il suffit de prendre les symétriques de l'arc A_1 par rapport à tous les axes de symétrie de la courbe C autres que l'axe $\omega = \beta$ ou $\omega = \beta + \frac{\pi}{2}$: en effet, l'arc A_p qui correspond à la variation de ω depuis $\beta - \frac{\alpha}{2} + (p-1)\alpha$ jusqu'à $\beta + \frac{\alpha}{2} + (p-1)\alpha$ est symétrique de l'arc A_1 par rapport à l'axe $\omega = \beta + (p-1)\frac{\alpha}{2}$ ou $\omega = \beta + (p-1)\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2}$, suivant le signe de ε'. En même temps, on voit qu'il est toujours facile de déterminer le point de la courbe qui correspond à une valeur donnée de ω.

Ainsi, quand la courbe C possède des axes, on déterminera tous ces axes connaissant l'un deux, et faisant varier ω dans un certain intervalle égal à $\frac{\alpha}{2}$, de β à $\beta + \frac{\alpha}{2}$, on aura l'arc A_1 en prenant le symétrique de l'arc ainsi obtenu par rapport à l'axe $\omega = \beta$ ou $\omega = \beta + \frac{\pi}{2}$, et toute la courbe en prenant les symétriques de l'arc A_1 par rapport à tous les autres axes.

Remarquons en terminant que tout ce qui précède s'applique encore au cas où $f(\omega)$ serait une fonction périodique quelconque, de période commensurable avec π.

Application. — Construire les courbes $\rho = \sin\frac{p\omega}{q}$, $\rho = \operatorname{tg}\frac{p\omega}{q}$, $\rho = \cos\frac{p\omega}{q} + \cos^2\frac{p\omega}{q}$, p et q étant deux entiers premiers entre eux.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

412. — *On donne une parabole* (P) *ayant pour axe* Ox, *et une droite* Δ *perpendiculaire à cet axe; une parallèle à* Ox *rencontre respectivement* Δ *et* (P) *aux points* A *et* B.

1° *Démontrer que les cercles* (C) *qui admettent* AB *pour diamètre restent tangents à un cercle fixe, lorsque* AB *se déplace parallèlement à* Ox. *Dans les mêmes conditions :*

2° *Trouver le lieu du centre du cercle* (C′) *circonscrit au triangle conjugué commun à la parabole* (P) *et au cercle* (C);

3° *Trouver l'enveloppe du cercle* (C′).

1° Soient

$$P \equiv y^2 - 2px = 0, \qquad x - a = 0$$

les équations de la parabole P et de la droite Δ, et λ l'ordonnée de la parallèle à Ox. Les coordonnées du point A sont $x = a$, $y = \lambda$, celles du point B sont $x = \frac{\lambda^2}{2p}$, $y = \lambda$; il en résulte que le cercle décrit sur AB comme diamètre a pour équations

$$(x - a)\left(x - \frac{\lambda^2}{2p}\right) + (y - \lambda)^2 = 0,$$

$$C \equiv 2p(x^2 + y^2) - (2pa + \lambda^2)x - 4p\lambda y + \lambda^2(a + 2p) = 0;$$

Nous aurons l'enveloppe de ce cercle en écrivant que cette équation a une racine double en λ; nous obtenons ainsi

$$(x - a)(x^2 + y^2 - (a + 2p)x) = 0,$$

ce qui montre que les cercles C sont tangents au cercle fixe

$$x^2 + y^2 - (a + 2p)x = 0.$$

2° Les coordonnées des sommets du triangle conjugué commun aux coniques P et C vérifient les équations

$$\frac{C'_x}{P'_x} = \frac{C'_y}{P'_y} = \frac{C'_z}{P'_z},$$

ou

$$\frac{4px - (2pa + \lambda^2)}{-p} = \frac{4py - 4p\lambda}{y} = \frac{-(2pa + \lambda^2)x - 4p\lambda y + 2\lambda^2(a + 2p)}{-px}.$$

On en déduit, en multipliant en croix ces rapports deux à deux, les équations de trois coniques circonscrites au triangle conjugué commun :

$$f_1 \equiv 4pxy + (4p^2 - 2pa - \lambda^2)y - 4p^2\lambda = 0,$$
$$f_2 \equiv 2px^2 + 2p\lambda y - \lambda^2(a + 2p) = 0,$$
$$f_3 \equiv (4p^2 - 2pa - \lambda^2)xy - 4p\lambda y^2 - 4p^2\lambda x + 2\lambda^2(a + 2p)y = 0.$$

L'équation du cercle C′ est alors

$$(4p^2 - 2pa - \lambda^2)f_1 + 8p\lambda f_2 - 4pf_3 = 0,$$

ou

$$16p^2\lambda(x^2 + y^2) + 16p^2\lambda x + y[(4p^2 - 2pa - \lambda^2)^2 - 8p\lambda^2(a + 2p)] - 4p^2\lambda(4p^2 - 2pa - \lambda^2) - 8p\lambda^2(a + 2p) = 0.$$

L'abscisse du centre de ce cercle est égale à $-\frac{p}{2}$; le lieu de ce point est donc la directrice de la parabole P.

Remarque. — On peut obtenir par un procédé différent l'équation du cercle C′; il suffit de se donner l'équation d'un cercle

$$C' \equiv x^2 + y^2 + 2lx + 2my + h = 0$$

et d'écrire qu'il existe un triangle inscrit dans le cercle C′ et conjugué par rapport à toutes les coniques du faisceau $C + \mu P = 0$. Pour cela, on forme le discriminant de la fonction $C + \mu P + \nu C'$, et on écrit que le coefficient de ν dans ce discriminant est nul pour toutes les valeurs de μ. On a ainsi trois relations qui déterminent l, m, h.

3° En transportant l'origine des coordonnées au point $x = -\frac{p}{2}$, $y = 0$, l'équation du cercle C′ devient

$$F(\lambda) \equiv 16p^2\lambda(x^2 + y^2) + y[\lambda^4 - 4\lambda^2 p(6p + a) + 4p^2(2p - a)^2] - 4p\lambda^3(3p + 2a) - 4p^3\lambda(5p - 2a) = 0,$$

et pour avoir l'équation de l'enveloppe il faut éliminer λ entre les équations $F(\lambda) = 0$, $F'(\lambda) = 0$.

On peut résoudre ces deux équations par rapport à x^2 et y; en effet, l'équation $F(\lambda) - \lambda F'(\lambda) = 0$ est du premier degré par rapport à y; en remplaçant y par la valeur obtenue dans l'équation $F(\lambda) = 0$, on en tire x^2 en fonction rationnelle de λ. Mais la discussion est fort pénible dans le cas général.

VASNIER.

---

434. — *On donne une hyperbole équilatère* (H). *On lui mène une tangente quelconque, qui rencontre les asymptotes en* A *et* B. *En ces points, on mène aux asymptotes des perpendiculaires qui rencontrent l'hyperbole en* α *et* β.

1° *Démontrer que* $\alpha\beta$ *est parallèle à* AB *et que quand* AB *varie en restant tangente à l'hyperbole* (H), $\alpha\beta$ *enveloppe une hyperbole équilatère homothétique et concentrique à l'hyperbole* (H).

2° *Par les quatre points* A, α, B, β *passe une seule parabole* (P) *en outre du couple de droites parallèles* AB *et* $\alpha\beta$; *démontrer que la seconde sécante commune* $\alpha'\beta'$ *à cette parabole et à l'hyperbole* (H) *est parallèle à* AB, *et que quand* AB *varie en restant toujours tangente à l'hyperbole* (H), $\alpha'\beta'$ *enveloppe aussi une hyperbole équilatère homothétique et concentrique à l'hyperbole* (H).

3° *Lieux des centres des sécantes communes à l'hyperbole* (H) *et à la parabole* (P), *autres que celui du couple* $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ *quand* AB *varie en restant assujettie à la même condition.*

4° *Par un point* M *du plan passent quatre paraboles telles que la parabole* (P). *Les quatre points de contact des tangentes à l'hyperbole* (H) *qui leur correspondent sont à l'intersection de l'hyperbole* (H) *et d'une certaine ellipse* (E).

Lieu des points M *tels que l'ellipse* (E) *correspondante devienne un cercle, lieu du centre et enveloppe de ce cercle.*

5° *Démontrer que le centre de gravité des quatre points d'intersection de l'ellipse* (E) *et de l'hyperbole* (H) *décrit une parallèle à une asymptote de cette dernière hyperbole, lorsque le point* M *décrit une parallèle à l'autre asymptote.*

1° Soient $x = \frac{a}{t}$, $y = at$ les coordonnées du point de contact de la tangente AB sur l'hyperbole équilatère

(H) $$xy - a^2 = 0.$$

La tangente AB a pour équation

(AB) $$t^2x + y - 2at = 0.$$

Les coordonnées du point α sont $\frac{2a}{t}$ et $\frac{at}{2}$; celles du point β, $\frac{a}{2t}$ et $2at$; par suite l'équation de la droite $\alpha\beta$ est

($\alpha\beta$) $$t^2x + y - \frac{5at}{2} = 0.$$

On voit immédiatement que cette droite est parallèle à AB et qu'elle enveloppe l'hyperbole

$$16xy - 25a^2 = 0.$$

2° Soit $t^2x + y - \mu = 0$ l'équation d'une droite parallèle à $\alpha\beta$; l'équation générale des coniques passant par les points de rencontre de l'hyperbole et de ces deux paraboles est

$$\lambda(xy - a^2) + \left(t^2x + y - \frac{5at}{2}\right)(t^2x + y + \mu) = 0.$$

Écrivons que cette équation représente une parabole, nous avons $\lambda = -4t^2$; en outre qu'elle est vérifiée par les coordonnées du point A $\left(\frac{2a}{t}, 0\right)$ et par celles du point B $(0, 2at)$, nous obtenons la même valeur pour μ, $\mu = 6at$. L'équation de la parabole P est donc

$$-4t^2(xy - a^2) + \left(t^2x + y - \frac{5at}{2}\right)(t^2x + y + 6at) = 0,$$

et celle de $\alpha'\beta'$

$$t^2x + y + 6at = 0.$$

Cette droite enveloppe l'hyperbole $xy - 9a^2 = 0$.

3° L'équation générale des coniques circonscrites au quadrilatère $\alpha\beta\alpha'\beta'$ est

$$f(x, y) \equiv \lambda(xy - a^2) + \left(t^2x + y - \frac{5at}{2}\right)(t^2x + y + 6at) = 0.$$

Les centres des couples de sécantes communes à ces coniques sont déterminés par les équations

$$f'_x \equiv \lambda y + t^2(t^2x + y + 6at) + t^2\left(t^2x + y - \frac{5at}{2}\right) = 0,$$

$$f'_y \equiv \lambda x + t^2x + y + 6at - t^2x - y - \frac{5at}{2} = 0,$$

$$f'_z = -2\lambda a^2 - \frac{5at}{2}(t^2x + y + 6at) + 6at\left(t^2x + y - \frac{5at}{2}\right) = 0.$$

On en déduit

$$f'_x - t^2f'_y \equiv \lambda(y - t^2x) = 0,$$

et comme λ ne peut être nul, on voit que les points considérés sont sur la droite $y - t^2x = 0$ qui joint les milieux de $\alpha\beta$ et de $\alpha'\beta'$. Ce résultat était à prévoir, car dans le trapèze $\alpha\beta\alpha'\beta'$ les points de concours des diagonales sont sur la droite qui joint les milieux des bases.

Dans les équations $f'_y = 0$, $f'_z = 0$ remplaçons t^2 par $\frac{y}{x}$; il vient

$$\lambda x + 4y + \frac{7at}{2} = 0,$$

$$-2\lambda a + 7ty - 30a\frac{y}{x} = 0;$$

puis éliminons λ entre ces deux équations ; nous obtenons

$$7t(xy + a^2) = 22ay;$$

élevons au carré et remplaçons t^2 par $\frac{y}{x}$; nous avons enfin

$$49(xy + a^2)^2 - 484a^2xy = 0.$$

Le premier membre de cette équation est un trinome en xy ; l'équation représente deux hyperboles équilatères ayant pour asymptotes Ox et Oy.

4° L'équation de la parabole (P) est

$$-4t^2(xy - a^2) + \left(t^2x + y - \frac{5at}{2}\right)(t^2x + y + 6at) = 0;$$

en écrivant que cette équation est vérifiée par les coordonnées du point M (x_0, y_0) on a une équation du quatrième degré,

$$(1)\qquad t^4x_0^2+\frac{7ax_0}{2}t^3-t^2(2x_0y_0+11a^2)+\frac{7ay_0}{2}t+y_0^2=0,$$

aux quatre racines de laquelle correspondent quatre points de l'hyperbole (H). Cherchons l'équation générale des coniques passant par ces quatre points. Soit une conique quelconque

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0;$$

les valeurs de t relatives aux points de rencontre de cette conique et de l'hyperbole (H) sont racines de l'équation

$$(2)\qquad Ca^2t^4+2Eat^3+(2Ba^2+F)t^2+2Dat+Aa^2=0.$$

Écrivons que les équations (1) et (2) ont mêmes racines ; nous avons

$$\frac{Ca^2}{x_0^2}=+\frac{4E}{7x_0}=-\frac{2Ba^2+F}{2x_0y_0+11a^2}=+\frac{2D}{7y_0}=\frac{Aa^2}{y_0^2}.$$

Il en résulte que l'équation générale des coniques passant par les quatre points considérés plus haut est

$$(3)\qquad \lambda\left(\frac{y_0^2}{a^2}x^2+\frac{x_0^2}{a^2}y^2+\frac{7xy_0}{2}+\frac{7yx_0}{2}-2x_0y_0-11a^2\right)+2B(xy-a^2)=0.$$

Pour que cette équation représente un cercle, il faut qu'on ait $x_0^2=y_0^2$, $B=0$. Le lieu du point M se compose des bissectrices des axes de coordonnées.

Supposons par exemple $x_0=y_0=m$; l'équation de ce cercle est

$$\frac{m^2}{a^2}(x^2+y^2)+\frac{7m}{2}(x+y)-2m^2-11a^2=0.$$

Son centre est sur la même bissectrice $(x-y=0)$ que le point M, et l'équation de son enveloppe est

$$49(x+y)^2+176(x^2+y^2-2a^2)=0;$$

elle représente une ellipse ayant son centre à l'origine et bitangente au cercle $x^2+y^2-2a^2=0$, aux points de rencontre avec la droite $x+y=0$.

5° On voit aisément que la somme des abscisses des quatre points communs aux coniques représentées par l'équation (3) est $-\frac{7a^2}{2y_0}$, la somme des ordonnées est $-\frac{7a^2}{2x_0}$; en désignant par x' et y' les coordonnées du centre de gravité des quatre points, on a

$$4x'=-\frac{7a^2}{2y_0},\qquad 4y'=-\frac{7a^2}{2x_0},$$

ce qui démontre les propositions énoncées.

E.-N. BARISIEN.

Autres solutions par MM. G. de France, à Versailles, et F. Pégorier, répétiteur au collège de Cette.
Très bonne solution de M. Vasnier.

---

435. — *On considère un triangle* ABC *et une droite* (D) ; *par un point* M, *quelconque dans le plan du triangle, il passe deux coniques circonscrites au triangle et tangentes à la droite* (D).

1° *Trouver le lieu des points* M *pour lesquels les deux coniques qui passent par chacun de ces points ont pour tangentes en* A *deux droites conjuguées harmoniques par rapport à* AB *et* AC ; *montrer qu'alors les tangentes en* M *sont aussi conjuguées harmoniques par rapport à* MB *et* MC.

2° *Si on fait jouer successivement aux trois sommets le rôle du point* A, *on obtient trois coniques pour lieux correspondants du point* M ; *montrer qu'elles sont bitangentes deux à deux et étudier la nature de chacune d'elles, d'après la position de la droite* (D).

3° *Trouver l'enveloppe des polaires d'un point* P *par rapport aux coniques circonscrites au triangle et tangentes à la droite* (D), *et montrer que cette enveloppe passe par trois points fixes, indépendants de la position de la droite* (D).

Prenons le triangle ABC pour triangle de référence ($x = 0$, l'équation du côté BC, etc.), et soient

$$(\Gamma)\quad \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{z} = 0, \qquad (D)\quad ux + vy + wz = 0$$

les équations de la conique circonscrite au triangle ABC et de la droite (D), et enfin x', y', z' les coordonnées de M.

On a les conditions

$$(1)\qquad \sqrt{\alpha u} + \sqrt{\beta v} + \sqrt{\gamma w} = 0, \qquad \frac{\alpha}{x'} + \frac{\beta}{y'} + \frac{\gamma}{z'} = 0.$$

1° La tangente en A($y = 0$, $z = 0$) à une conique Γ est

$$\frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 0.$$

Les deux valeurs de $\frac{\beta}{\gamma}$ déterminées par le système (1) doivent être égales et de signes contraires. L'élimination de α donne

$$(ux' + vy')^2 z'^2 \beta^2 + (ux' + wz')^2 y'^2 \gamma^2 + 2(ux'(ux' + vy' + wz') - vwy'z')y'z'\beta\gamma = 0.$$

Le lieu des points M est donc la conique

$$C_1 \equiv ux(ux + vy + wz) - vwyz = 0,$$

qui passe par les points B, C et les points où (D) rencontre les côtés AB, AC. L'équation de la tangente en M à Γ est

$$\frac{\alpha x}{x'^2} + \frac{\beta y}{y'^2} + \frac{\gamma z}{z'^2} = 0.$$

Elle rencontre le côté BC en A_1, et l'équation de AA_1 est

$$\frac{\beta y}{y'^2} + \frac{\gamma z}{z'^2} = 0.$$

Les deux valeurs de $\frac{\beta}{\gamma}$ étant de signes contraires, les deux droites telles que AA_1 sont conjuguées par rapport à AB, AC; et il en est de même des deux tangentes telles que MA_1 par rapport à MB, MC.

2° Par permutations circulaires, on a les deux coniques analogues à C_1 :

$$C_2 \equiv vy(ux + vy + wz) - wuzx = 0,$$
$$C_3 \equiv wz(ux + vy + wz) - uvxy = 0.$$

On voit que l'on a

$$C_1 + C_2 = (ux + vy)^2;$$

C_1 et C_2 sont donc bitangentes, de même C_1 et C_3, C_2 et C_3.

Pour étudier la nature de la conique C_1, cherchons ses points d'intersection avec la droite de l'infini

$$ax + by + cz = 0,$$

(a, b, c étant les longueurs des côtés BC, CA, AB).

L'équation quadratique des droites joignant ces points d'intersection au sommet A est :

$$bu(av - bu)y^2 + cu(aw - cu)z^2 + u(avw + bwu + cuv) - 2bcu^2)yz = 0.$$

Suivant que les racines de cette équation en $\frac{y}{z}$ sont réelles, confondues ou imaginaires, la conique C_1 est une hyperbole, une parabole ou une ellipse. Cette réalité dépend du signe de

$$\Sigma_1 \equiv 8bcu^2vw - (avw + bwu + cuv)^2.$$

$\Sigma_1 = 0$ est l'équation tangentielle d'une courbe de quatrième classe que nous allons étudier.

Par la transformation du second ordre

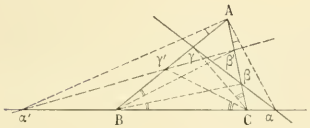
$$\text{(II)} \qquad uu' = vv' = ww',$$

elle se transforme en la conique

$$\sigma_1 \equiv 8bcv'w' - (au' + bv' + cw')^2 = 0.$$

L'interprétation géométrique des formules (II) est la suivante :

α, β, γ étant les points où la droite (u, v, w) rencontre les côtés BC, CA, AB du triangle de référence, la droite associée (u', v', w') les rencontre aux points α', β', γ' tels que l'on ait



$$\widehat{CA\alpha} = \widehat{BA\alpha'}, \qquad \widehat{CB\beta'} = \widehat{AB\beta'}, \qquad \widehat{AC\gamma} = \widehat{BC\gamma'}.$$

Cette transformation permet de construire une courbe par ses tangentes, si l'on connaît les tangentes de la transformée.

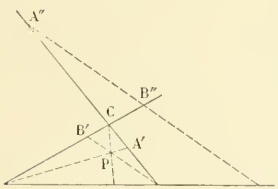
A un point correspond une conique inscrite dans le triangle de référence, et réciproquement. A une tangente AA′ passant par un sommet du triangle, correspond le côté opposé comme tangente et le point de contact sur ce côté, A″, est tel que $\widehat{CAA'} = \widehat{BAA''}$. Si le point de contact de la tangente AA′ est le sommet A, le côté opposé est tangente d'*inflexion* de la courbe transformée.

Revenons maintenant à l'étude de la courbe Σ_1 au moyen de celle de σ_1 ; $au + bv + cw = 0$ est l'équation tangentielle du centre des médianes antiparallèles du triangle (point P). La conique σ_1 est tangente en B et C aux droites PB, PC. Son équation ponctuelle,

$$\frac{x}{a}\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) - \frac{yz}{bc} = 0,$$

montre qu'en dehors des points B et C, elle rencontre les côtés AB, AC aux points C″, B″ conjugués harmoniques sur AB, AC des points C′ et B′ où CP, BP rencontrent AB, AC.

Des remarques analogues s'appliquent aux coniques σ_2, σ_3 transformées des courbes Σ_2, Σ_3 dont dépend la nature des coniques C_2, C_3.



Or le point P étant à l'intérieur du triangle et les points A″, B″, C″ étant en ligne droite, il est facile de voir que parmi les trois angles BPC, CPA, APB dans lesquels sont inscrites les coniques σ, il en est un (BPC dans le cas de la figure) pour lequel les points B″, C″ de la conique inscrite dans l'angle sont à l'intérieur de cet angle ; il en est un autre (CPA) pour lequel les points A″, C″ sont l'un à l'intérieur, l'autre à l'extérieur de l'angle ; et le troisième (APB) pour lequel les points A″, B″ sont dans l'angle opposé par le sommet. Le premier cas correspond à une ellipse σ_1 et les deux autres à des hyperboles σ_2 et σ_3. Ils donnent lieu à des tracés un peu différents des courbes Σ.

La courbe Σ_1, transformée de l'ellipse σ_1, a pour tangente double BC et pour tangentes d'inflexion AB, AC. Elle est bipartite, et a des branches infinies avec deux asymptotes réelles. La droite de l'infini

ayant pour droite associée la droite $A''B''C''$ $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=0\right)$, les asymptotes de Σ_1 sont les transformées des tangentes à σ_1 aux points B'', C'' où la droite $A''B''C''$ rencontre σ_1.

On peut le voir par le calcul :

Les coordonnées des asymptotes vérifient les équations

$$\Sigma_1(u, v, w) = 0, \qquad a\Sigma'_{1u} + b\Sigma'_{1v} + c\Sigma'_{1w} = 0$$

ou

$$\text{(III)} \qquad 8bcu^2vw = (avw + bwu + cuv)^2, \qquad 2abcuvw = (acv + abw - bcu)(avw + bwu + cuv).$$

Les coordonnées des tangentes d'inflexion et de la tangente double satisfont aussi aux équations (III). On écarte ces solutions en multipliant en croix les deux membres des équations (III), et après suppression du facteur $2bcuvw(avw + bwu + cuv)$, il reste

$$4bcu^2 + a(avw - 3bwu - 3cuv) = 0.$$

La transformée de cette conique est une conique

$$\tau_1 = 4bcvw + aw(au - 3bv - 3cw) = 0.$$

Les asymptotes de la courbe Σ_1 sont les transformées des tangentes communes aux deux coniques σ_1 et τ_1. Si l'on forme la combinaison $2\tau_1 - \sigma_1 = 0$, on a

$$(au - bv - cw)(3au - bv - cw) = 0,$$

c'est-à-dire deux points P_1, P'_1 de la droite AP. Le premier est le point de concours des droites BB', CC', et le second est le pôle de $A''B''C''$ par rapport à τ_1.

Les asymptotes réelles sont donc les transformées des tangentes à σ_1 en B', C'.

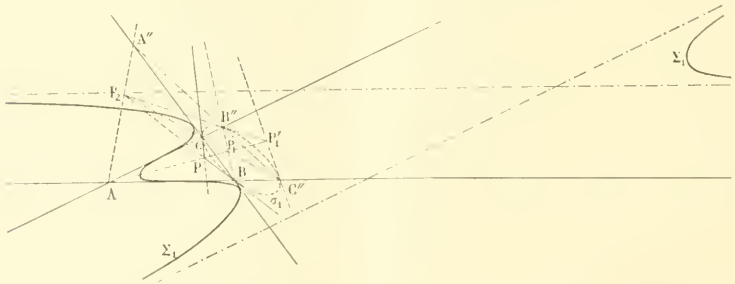
Il est facile de voir que les trois points analogues à P_1 sont intérieurs aux coniques σ qui leur correspondent. Chacune des courbes Σ n'a donc que deux asymptotes réelles. Les équations ponctuelles des coniques σ montrent qu'elles sont bitangentes deux à deux aux points A'', B'', C'' :

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2, \quad \text{etc.}$$

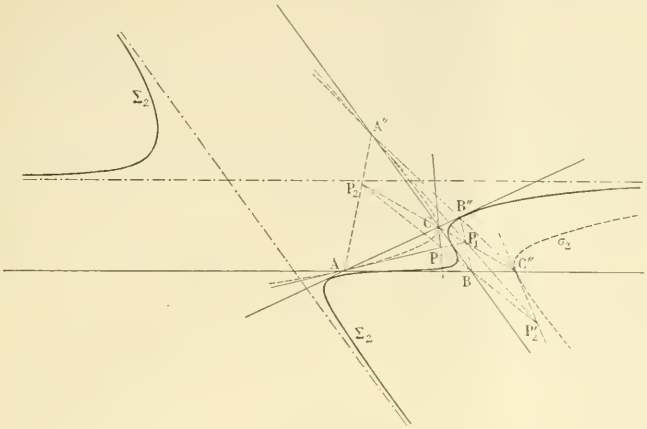
Il en résulte que Σ_1, Σ_2, Σ_3 ont deux à deux une asymptote commune.

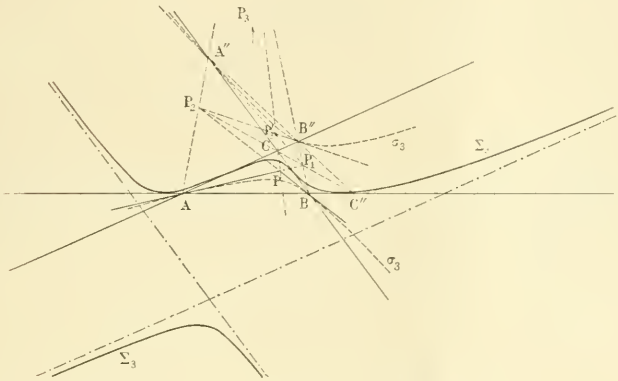
De même elles ont deux à deux un point d'inflexion commun sur un des côtés du triangle.

Les tracés des trois courbes sont les suivants :



Les asymptotes $ax + by + 2cz = 0$, etc., sont parallèles aux côtés du triangle ABC.





Les courbes Σ ayant une tangente double et deux tangentes d'inflexion sont de degré $m(m-1)-2t-3i=4$, m étant la classe. Ce sont donc des quartiques.

Nous pouvons maintenant étudier la nature des coniques C_1, C_2, C_3.

Le signe de Σ_1 dépend du nombre de points d'intersection réels de la courbe Σ_1 et de la droite (D). Or la droite de l'infini qui rencontre Σ_1 en deux points réels donne un résultat de substitution négatif dans Σ_1. On a donc les résultats suivants :

La droite (D) coupe Σ_1 en 0 ou 4 points réels : Σ_1 est > 0, C_1 est une ellipse.

La droite (D) coupe Σ_1 en 2 points réels : Σ_1 est < 0, C_1 est une hyperbole.

La droite (D) est tangente à Σ_1 : $\Sigma_1 = 0$, C_1 est une parabole.

On a exactement les mêmes résultats pour C_2 et C_3.

3° La polaire d'un point fixe (x', y', z') par rapport à une conique Γ a pour équation

$$\frac{\alpha x}{x'^2} + \frac{\beta y}{y'^2} + \frac{\gamma z}{z'^2} = 0,$$

avec la condition

$$(1) \qquad \sqrt{\alpha u} + \sqrt{\beta v} + \sqrt{\gamma w} = 0.$$

Pour avoir l'enveloppe de la polaire, il faut éliminer α, β, γ entre les équations

$$\frac{\frac{ux'^2}{x}}{\sqrt{\alpha u}} = \frac{\frac{vy'^2}{y}}{\sqrt{\beta v}} = \frac{\frac{wz'^2}{z}}{\sqrt{\gamma w}}$$

et l'équation (1), ce qui donne $\quad \dfrac{ux^2}{x} + \dfrac{vy^2}{y} + \dfrac{wz^2}{z} = 0,$

conique circonscrite au triangle ABC. VASNIER, lycée de Versailles.

M. A. L., à Alençon, nous a envoyé une bonne solution de cette question.

443. — *L'équation* $\frac{z^2}{2k^2} = \text{arc cot}\,\frac{y}{x} + \Phi(x^2+y^2)$, *dans laquelle* k^2 *est une constante et* Φ *une fonction arbitraire, représente une infinité de surfaces* Σ *rapportées à trois axes rectangulaires* OXYZ. *En chaque point* M *d'une surface* Σ *on mène la normale et la parallèle à* OZ *qui coupent le plan* XOY *aux points* P *et* Q. *Démontrer que la surface du triangle* POQ *est constante.*

L'équation d'une surface définit z comme fonction des deux variables x et y, et les équations de la normale en un point $M(x, y, z)$ de cette surface peuvent s'écrire

$$\frac{X-x}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{Z-z}{-1}.$$

Cette normale rencontre le plan XOY en un point P qui a pour coordonnées

$$x_1 = x + z\frac{\partial z}{\partial x}, \qquad y_1 = y + z\frac{\partial z}{\partial y},$$

ou, en posant $\frac{z^2}{2} = u$,

$$x_1 = x + \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad y_1 = y + \frac{\partial u}{\partial y}.$$

D'autre part, les coordonnées du point Q sont x et y; il en résulte que la surface du triangle OPQ est égale, au signe près, à

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \\ x - \frac{\partial u}{\partial x} & y + \frac{\partial u}{\partial y} & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{2}\left(x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Or, de l'équation de la surface Σ, on tire

$$\frac{1}{k^2}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2} + 2x\Phi'(x^2+y^2),$$

$$\frac{1}{k^2}\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2} + 2y\Phi'(x^2+y^2);$$

on en déduit

$$\left| x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x} \right| = k^2.$$

La surface du triangle OPQ est donc égale à $\frac{k^2}{2}$.

Remarque. — *Réciproquement*, on peut se proposer de chercher toutes les surfaces qui jouissent de la propriété indiquée.

Tout revient à trouver la fonction u des deux variables x et y, telle que l'on ait

$$\left| x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x} \right| = k^2,$$

ou

$$x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x} = \pm k^2.$$

Nous allons faire un changement de variables, et substituer aux variables x et y, les nouvelles variables r et θ définies par les relations

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

Nous avons

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial u}{\partial y}(r\cos\theta) = x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x}.$$

On a donc

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \pm k^2,$$

et, en intégrant,

$$u = \pm k^2\theta + k^2 C,$$

C désignant une quantité indépendante de θ. Comme u est une fonction de r et de θ, C sera une fonction arbitraire de r ou de $x^2 + y^2$; nous pouvons poser $C = \Phi(x^2 + y^2)$. D'autre part θ est égal à $\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$; on voit ainsi que l'équation générale des surfaces telles que le triangle OPQ ait une surface constante et égale à $\frac{k^2}{2}$ est

$$\frac{z^2}{2k^2} = \pm \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} + \Phi(x^2 + y^2).$$

La somme $\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} + \operatorname{arc\,cot} \frac{y}{x}$ étant constante, on peut écrire l'équation générale sous l'une des deux formes suivantes :

$$\frac{z^2}{2k^2} = \pm \operatorname{arc\,cot} \frac{y}{x} + \Phi(x^2 + y^2),$$

$$\frac{z^2}{2k^2} = \pm \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} + \Phi(x^2 + y^2).$$

---

444. — *L'équation* $\frac{z^3}{3k^3} = \operatorname{arc\,cot} \frac{y}{x} + \Phi(x^2 + y^2)$ *représente une infinité de surfaces* Σ *rapportées à trois axes rectangulaires* OXYZ. *En chaque point* M *d'une surface* Σ *on mène la normale et la parallèle à* OZ *qui coupent le plan* XOY *aux points* P *et* Q. *Démontrer que le volume du tétraèdre* MOPQ *est constant.*

On a vu précédemment que la surface du triangle OPQ est égale à $\frac{1}{2}\left| xz\frac{\partial z}{\partial y} - yz\frac{\partial z}{\partial x} \right|$; par conséquent le volume du tétraèdre MOPQ est égal à $\frac{1}{6}\left| xz^2\frac{\partial z}{\partial y} - yz^2\frac{\partial z}{\partial x} \right|$, ou à $\frac{1}{6}\left| x\frac{\partial v}{\partial y} - y\frac{\partial v}{\partial x} \right|$, v désignant la fonction $\frac{z^3}{3}$.

Or, de l'équation de la surface on déduit

$$\left| x\frac{\partial v}{\partial y} - y\frac{\partial v}{\partial x} \right| = k^3,$$

il en résulte que le volume du tétraèdre est égal à $\frac{k^3}{6}$.

On établirait comme plus haut que l'équation générale des surfaces jouissant de cette propriété peut se mettre sous l'une des deux formes suivantes :

$$\frac{z^3}{3k^3} = \pm \operatorname{arc\,cot} \frac{y}{x} + \Phi(x^2 + y^2),$$

$$\frac{z^3}{3k^3} = \pm \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} + \Phi(x^2 + y^2).$$

Ont résolu les questions 443 et 444 : MM. E. Barré, à Douai ; Blazy-Lacombe, lycée de Toulouse ; E. Félix ; G. de France, à Versailles.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (1895)

Mathématiques élémentaires.

492. — *On donne un triangle* T *et on considère le triangle* T′ *qui a pour sommets les projections orthogonales d'un point* M *sur les côtés du triangle* T.

1° *Démontrer que, si le point* M *décrit une droite* Δ *dans le plan du triangle* T, *les côtés du triangle* T′ *enveloppent trois paraboles* P, P_1, P_2.

Ces paraboles sont inscrites dans un même angle ; on construira leurs foyers et leurs directrices.

Quelle position doit occuper la droite Δ *pour que ces trois paraboles soient tangentes en un même point ?*

2° *Comment faut-il choisir la droite* Δ *pour que les directrices des trois paraboles* P, P_1, P_2 *concourent en un même point* H *à distance finie ?*

La droite Δ *se déplaçant de manière à satisfaire à cette condition, trouver le lieu du point* H.

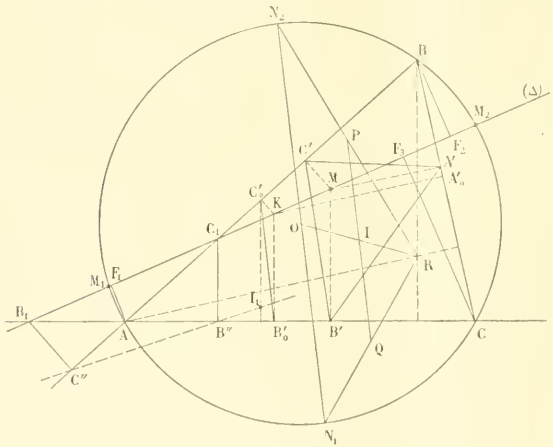
3° *Démontrer que, si l'on fait tourner la droite* Δ *autour d'un point fixe* K, *la directrice de la parabole* P *passe elle-même par un point fixe* I.

Trouver l'enveloppe de la droite KI *lorsque l'un des points* K *ou* I *décrit une droite donnée.*

4° *A un point* K *correspondent trois points* I, I_1, I_2, *relatifs aux directrices des paraboles* P, P_1, P_2.

On demande quelle position doit occuper le point K *pour que les trois points* I, I_1, I_2 *soient en ligne droite, et on propose de démontrer que si le point* K *se déplace de manière à satisfaire à cette condition, la droite* $I I_1 I_2$ *tourne autour d'un point fixe.*

1° Lorsque le point M décrit la droite Δ, les deux points B′ et C′ décrivent deux séries semblables à celles que décrit le point M, et, par suite, semblables entre elles ; donc la droite B′C′ enveloppe une parabole inscrite dans l'angle A. De même les droites A′C′ et A′B′ enveloppent deux paraboles respectivement inscrites dans les angles B et C.



Ces trois paraboles, P_1, P_2, P_3, sont tangentes aux deux droites de Simson relatives aux deux points M_1 et M_2 où la droite Δ rencontre le cercle circonscrit au triangle ABC, car, pour ces points M_1 et M_2, les trois points A′, B′, C′ sont en ligne droite.

Le cercle circonscrit au triangle AB′C′ passe constamment par le foyer de la parabole P_1 ; mais c'est le cercle décrit sur AM comme diamètre, et ce cercle passe toujours au pied de la perpendiculaire abaissée du point A sur la droite Δ qui porte le point M. Ce point F_1 est donc le foyer de la parabole P_1. De même les foyers des paraboles P_2 et P_3 sont les projections des points B et C sur Δ.

Si le point M vient en B_1 et C_1, où la droite Δ coupe les côtés AC et AB, la droite B′C′ devient B_1C'' et C_1B'' respectivement perpendiculaires sur AB et AC ; les deux points B″ et C″

sont donc sommets d'angles droits circonscrits à la parabole P_1, et la droite $B''C''$ est directrice de cette parabole. On trouverait de même les directrices des deux autres paraboles.

Pour que les trois paraboles soient tangentes en un même point, il faut que leurs deux tangentes communes coïncident, car elles ont encore deux à deux pour tangentes communes les trois côtés du triangle ABC, qui sont des droites distinctes; il faut donc que les points M_1 et M_2 coïncident, c'est-à-dire que la droite Δ soit tangente au cercle circonscrit au triangle ABC.

2° Si on considère les deux paraboles P_1 et P_2, elles sont inscrites dans un même triangle formé par les droites de Simson des deux points M_1 et M_2 et par le côté AB; leurs directrices passent donc toutes deux par le point de concours des hauteurs de ce triangle. Si donc on envisage les droites de Simson des points M_1 et M_2 et les trois triangles que forment avec elles les côtés du triangle donné, les directrices des trois paraboles se coupent deux à deux aux points de concours des hauteurs de ces triangles, H_1, H_2, H_3; pour qu'elles soient toutes trois concourantes, il faut donc que les points H_1, H_2 et H_3 soient confondus, c'est-à-dire que les deux droites de Simson soient rectangulaires, et alors les trois points sus-mentionnés coïncident avec le point de rencontre H de ces droites. Or on sait que l'angle des deux droites de Simson relatives aux points M_1 et M_2 a pour mesure la moitié de l'arc M_1M_2. Donc la droite Δ doit passer par le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Soit N_1N_2 une telle droite; les droites de Simson relatives à ces points passent par les milieux des segments qui joignent les points N_1 et N_2 au point de concours, R, des hauteurs du triangle ABC; ce sont donc deux droites rectangulaires passant par les milieux P et Q de RN_1 et RN_2; d'ailleurs ces points ont pour lieu commun le cercle homothétique du cercle circonscrit par rapport au point R et dans le rapport d'homothétie $\frac{1}{2}$. Ce cercle est le cercle des neuf points; il a pour centre le milieu de RO et ce point se trouve au milieu I de PQ; donc le point H sommet d'un angle droit dont les côtés passent en P et Q se trouve aussi sur le cercle des neuf points et décrit ce cercle.

3° Si l'on fait tourner la droite Δ autour d'un point fixe K, les trois paraboles restent respectivement tangentes aux droites telles que $B'C'$, $C'A'$ et $A'B'$ relatives au point K; chacune d'elles est donc inscrite dans un triangle, la parabole P_1, par exemple, dans le triangle formé par les droites AB, AC et $B'_0C'_0$; donc sa directrice passe par un point fixe, I_1, le point de concours des hauteurs de ce triangle.

Supposons maintenant que le point K décrive une droite fixe Δ; alors $B'_0C'_0$ enveloppe la parabole P_1 qui correspond à cette droite, et, par suite, le point I_1 est sur la directrice de cette parabole, $B''C''$; d'autre part, les deux points I_1 et K décrivent deux séries semblables à la série que décrit le point C'_0, c'est-à-dire semblables aussi; donc l'enveloppe de KI_1 est une parabole tangente aux deux droites Δ et $B''C''$; elle est d'ailleurs tangente aux deux droites C_1B'' et $B_1C''_1$ qui sont deux positions particulières de KI_1; c'est donc la parabole inscrite dans le quadrilatère $C_1B''C''B_1$.

4° Pour que les trois points I_1, I_2 et I_3 soient en ligne droite, il faut que les trois droites $B'_0C'_0$, $C'_0A'_0$, $A'_0B'_0$ coïncident. En effet, la figure $C'_0KB'_0I_1$ est un parallélogramme; de même la figure $KA'_0I_3B'_0$ est un parallélogramme; par conséquent I_1I_3 est parallèle à $A'_0C'_0$. De même I_1I_2 est parallèle à $A'_0B'_0$, et I_2I_3 est parallèle à $B'_0C'_0$. Donc si les trois points I_1, I_2, I_3 sont en ligne droite, les trois points A'_0, B'_0, C'_0 sont aussi en ligne droite. Réciproquement, si cela est, la droite $A'_0B'_0C'_0$ forme avec les côtés du triangle ABC un quadrilatère complet, et l'on sait que les quatre points de concours des hauteurs des triangles que forment ces droites sont en ligne droite. Il en résulte que pour que la condition énoncée soit remplie, il faut et il suffit que le point K soit sur le cercle circonscrit au triangle ABC, et alors la droite $I_1I_2I_3$ passe par le point de concours des hauteurs du triangle donné.

P. BOURGUIGNON.

M. Laisant m'a communiqué de la part de M. Paul Brück (Besançon) une solution complète et bien faite de la question, mais plus longue que la précédente et moins nettement géométrique.

E. H.

PHYSIQUE

Concours général de Mathématiques spéciales 1895

425. — *Un prisme est placé sur la plate-forme d'un goniomètre de Babinet, l'arête parallèle à l'axe de rotation. Dans le collimateur, on a remplacé la fente par une ouverture circulaire munie de deux fils rectangulaires A et B, le fil A étant parallèle à l'arête du prisme. L'ouverture est éclairée par une source monochromatique.*

1° Montrer d'une manière générale que, le tirage du collimateur et l'angle d'incidence étant quelconques, chacun des fils ne sera vu nettement qu'avec un tirage différent de la lunette.

2° Étant donné un tirage de collimateur et l'angle d'incidence du faisceau qui a pour sommet la croisée des fils, montrer comment devra varier le tirage de la lunette pour voir nettement A, puis B. Discuter comment variera le tirage pour le fil A, de l'incidence rasante à l'émergence rasante, en supposant successivement l'ouverture en avant et en arrière du plan focal principal du collimateur.

3° Déduire de cette discussion un ou plusieurs procédés pour placer la croisée des fils exactement dans le plan focal du collimateur.

4° Ce dernier réglage étant supposé obtenu, étudier les formes successives de l'image de l'ouverture circulaire lorsque l'incidence prend toutes les valeurs possibles.

On traitera comme un angle infiniment petit le diamètre apparent de l'ouverture vue du premier point nodal du collimateur.

1° Un faisceau lumineux étroit, issu d'un point, est transformé, comme on sait, par son passage au travers d'un prisme, en un faisceau dont les rayons s'appuient sur deux petites droites, l'une parallèle et l'autre perpendiculaire à l'arête du prisme; ce sont les deux droites focales. La distance p_1 de la première au prisme est liée à la distance p du point lumineux par la formule connue

$$p_1 = p\frac{\cos^2 r \cos^2 i'}{\cos^2 i \cos^2 r'};$$

la distance p_2 de la seconde est indépendante de l'incidence et l'on a toujours

$$p_2 = p.$$

Si les rayons proviennent d'une raie lumineuse A parallèle à l'arête du prisme, les rayons réfractés forment une image nette A′ à la distance p_1 où les droites focales des divers points s'alignent sur une même droite; ils ne donnent, au contraire, rien de net à la distance p_2 où les droites focales des divers points se juxtaposent pour former une large tache. Pour la même raison, une raie lumineuse B, perpendiculaire à la première, donne une image B′ à la distance p_2 et rien de net à la distance p_1.

Les deux fils du collimateur forment d'abord dans la lentille deux images situées dans un même plan focal et celles-ci, à leur tour, donnent dans le prisme les images A′ et B′ sur lesquelles on ne pourra mettre au point qu'avec des tirages différents de la lunette.

2° Si l'ouverture du collimateur est située entre la lentille et son foyer, son image dans la lentille et les images des fils dans le prisme sont virtuelles. L'image A′ est à l'infini sous l'incidence rasante, près du prisme sous l'émergence rasante; B′ reste à une distance fixe. Pour passer de A′ à B′, il faut allonger la lunette entre l'incidence rasante et le minimum de déviation, la raccourcir entre le minimum de déviation et l'émergence rasante.

Si l'ouverture du collimateur est plus éloignée de la lentille que le foyer, les images sont réelles. Il en résulte des conclusions inverses de celles du cas précédent.

3° Si la croisée des fils est dans le plan focal du collimateur, les fils sont au point tous deux en même temps pour toutes les positions du prisme. Se plaçant près de l'incidence rasante, on visera

l'image A′, qui est très éloignée; puis on déplacera l'ouverture du collimateur de manière à donner aux deux images le même aspect; A′ aura alors perdu un peu de sa netteté; on mettra au point de nouveau sur A′ et, peu à peu, on arrivera ainsi à avoir les deux images nettes simultanément. Cette netteté devra persister sous toutes les incidences.

4° Quand un rayon se propage en dehors de la section principale d'un prisme, le rayon incident et le rayon émergent font le même angle avec la section principale; d'autre part, un faisceau plan de petite ouverture et perpendiculaire à la section principale est transformé par la réfraction en un autre faisceau plan ayant, d'après la première proposition, la même ouverture. Il en résulte que les cordes parallèles à l'arête du prisme dans l'ouverture circulaire du collimateur sont, dans l'image objective, amplifiées simplement dans le rapport des distances focales de la lunette et du collimateur. Au contraire, une corde perpendiculaire à l'arête est, en outre, modifiée dans un rapport qui dépend de l'angle d'incidence. Par suite, l'image de l'ouverture aura la forme d'une ellipse.

Si di désigne l'angle de deux rayons incidents situés dans la section principale, di' l'angle des deux rayons réfractés correspondants, on a

$$\frac{di'}{di} = \frac{\cos i \cos r'}{\cos i' \cos r}.$$

Entre l'incidence rasante et le minimum de déviation, $\frac{di'}{di}$ est plus petit que l'unité et l'ellipse est aplatie dans le sens de la section principale; elle est allongée, au contraire, entre le minimum de déviation et l'émergence rasante.

CONCOURS DE 1894

ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES

Cours spéciaux.

Analyse et Trigonométrie.

493. — Étant donné une série de paraboles admettant l'axe des x comme axe et l'axe des y comme directrice, on demande :

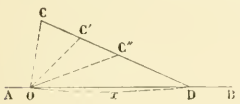
1° de déterminer l'enveloppe de ces courbes ;

2° de former l'équation différentielle de leurs trajectoires orthogonales;

3° d'intégrer cette équation.

494. — Un observateur situé en un point O d'un rivage rectiligne AB observe un navire qui occupe successivement les positions C, C′, C″, aux trois époques t, t', t''.

L'observateur mesure les angles COB, C′OB, C″OB que font les rayons visuels OC, OC′, OC″ avec la direction du rivage. D'autre part la vitesse v du navire est supposée constante et connue.



Cela posé, on demande de déterminer par la distance OD ou x le point D du rivage vers lequel se dirige le navire et l'époque T à laquelle il atteindra ce point.

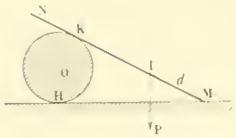
Faire le calcul dans le cas où :

$COB = 79° 28' 30''$, $C'OB = 62° 11' 13''$, $C''OB = 47° 8' 27''$;

$v = 16$ kilomètres à l'heure, $t =$ midi 20′, $t' =$ midi 40′, $t'' = 1^h$.

Mécanique.

495. — Un rouleau cylindrique O étant couché sur un sol horizontal, une planche MN est posée de manière à s'appuyer en K sur le rouleau et en M sur le sol. La planche peut glisser sur le sol : elle peut glisser et rouler



sur le cylindre, qui peut lui-même glisser et rouler sur le sol. Les différents glissements qui peuvent se produire sont d'ailleurs accompagnés de frottements et l'on admet, pour simplifier, qu'un même coefficient de frottement f est applicable à ces divers frottements : la résistance au roulement est considérée comme négligeable.

Le cylindre supposé homogène a un poids ϖ.

La planche a un poids propre qu'on néglige, mais elle porte une surcharge P appliquée en un point I défini par sa distance IM ou d à l'extrémité inférieure de la planche.

On demande :

1° Quelles sont les conditions d'équilibre du système ;

2° Quelle sera la nature du mouvement initial que prendra le système si, par suite d'un déplacement du point d'application du poids P, l'équilibre se trouve rompu.

QUESTIONS PROPOSÉES

496. — Trouver une courbe (C) passant par l'origine des coordonnées O et telle que le rayon de courbure en un point quelconque M de cette courbe ait même longueur que l'arc de courbe OM.

AUZERAM, à Montpellier.

497. — Deux prismes de verre rectangles et isocèles sont rapprochés par leurs faces hypoténuses de manière à constituer par leur réunion un prisme unique à section carrée. On a seulement interposé entre les deux prismes une lame mince d'un liquide moins réfringent que le verre. Un faisceau lumineux de lumière blanche est dirigé sur le système. Étudier la composition du faisceau transmis et celle du faisceau réfléchi par la lame liquide dans le voisinage de la réflexion totale.

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

442. — *On prend deux axes rectangulaires* Ox, Oy *et une droite* D *ayant pour équation* $x - y - mx = 0$.

1° *Trouver l'équation générale des hyperboles ayant pour asymptote* Oy *et pour directrice la droite* D.

2° *Lieu du foyer correspondant à la directrice donnée.*

3° *Pour chaque position du foyer, trouver le centre de la courbe ; en déduire le lieu du second foyer, et le lieu des sommets réels.*

4° *Pour chaque position du foyer, on mène des parallèles aux asymptotes de l'hyperbole correspondante. Ces parallèles rencontrent l'hyperbole aux points* P *et* Q. *Trouver le lieu du pôle de* PQ *lorsqu'on fait varier le foyer, et par suite l'hyperbole correspondante.*

5° *On suppose que l'on donne une position fixe du foyer, et que l'on fait varier la direction de la droite* D, *en faisant varier le coefficient* m. *Trouver alors : le lieu du second foyer ; le lieu du pôle de* PQ ; *le lieu des sommets réels.*

1° L'équation des coniques ayant pour directrice la droite D est

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - \lambda(x - y - mx)^2 = 0;$$

en écrivant que Oy est asymptote, on a $\beta = 0$, $\lambda = 1$, et l'équation générale cherchée est

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = (x - y - mx)^2,$$

ou

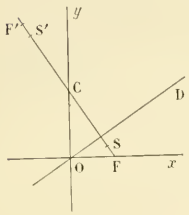
$$x^2(1 - m^2) + 2mxy - 2\alpha x + \alpha^2 = 0.$$

On voit aisément que l'excentricité de ces coniques est constante et égale à $\sqrt{m^2 + 1}$.

2° Puisque β est nul, le lieu des foyers relatifs à la directrice D est l'axe Ox.

Ce résultat était à prévoir, car on sait que la projection d'un foyer d'une hyperbole sur une asymptote est située sur la directrice correspondante.

3° Le centre C de la courbe est à l'intersection de Oy avec la perpendiculaire menée par le foyer $F(\alpha, 0)$ à la droite D; il a pour ordonnée $\frac{\alpha}{m}$. Le deuxième foyer F′ est symétrique de F par rapport au point C; ses coordonnées sont



$$x = -\alpha, \qquad y = \frac{2\alpha}{m},$$

et quand α varie, le lieu de ce point est une droite passant par l'origine et qui a pour équation $y + \frac{2x}{m} = 0$.

On a le lieu des sommets réels en éliminant α entre l'équation de la courbe et celle de l'axe réel $FF'(my + x - \alpha = 0)$; on obtient facilement

$$mx^2 - 2xy - my^2 = 0,$$

équation qui représente deux droites rectangulaires passant par l'origine.

On voit d'ailleurs géométriquement que le lieu du point F′ est la conjuguée harmonique de OF par rapport à Oy et à la parallèle à CF menée par l'origine. De plus, les rapports $\frac{CF}{CS}$ et $\frac{CF'}{CS'}$ étant égaux à l'excentricité et par suite constants, le lieu des sommets S et S′ se compose des droites OS et OS′ qui sont perpendiculaires, puisque CS et CS′ sont égaux à CO.

4° Supposons que P désigne le point de rencontre de l'hyperbole et de la parallèle à l'asymptote Oy menée par le foyer F. Le pôle de la droite PQ est l'intersection de la tangente à l'hyperbole au point P avec l'axe réel. Or les coordonnées du point P sont α et $\frac{m\alpha}{2}$, la tangente en ce point a pour équation $2y - mx = 0$; c'est l'équation du lieu puisqu'elle est indépendante de α.

5° Supposons maintenant que α soit fixe et m variable.

Le lieu du foyer F′ est la droite $x + \alpha = 0$.

Le lieu du pôle de PQ s'obtient en éliminant m entre les équations

$$2y - mx = 0, \qquad my + x - \alpha = 0,$$

ce qui donne

$$2y^2 + x^2 - \alpha x = 0,$$

équation d'une ellipse aisée à construire.

Enfin nous aurons le lieu des sommets réels en éliminant m entre l'équation de l'axe réel

$$my + x - \alpha = 0,$$

et celle de l'ensemble des droites OS, OS′

$$m(x^2 - y^2) - 2xy = 0.$$

On trouve

$$x(x^2 + y^2) - \alpha(x^2 - y^2) = 0,$$

équation qui représente une strophoïde droite ayant le point F pour sommet et pour point double le point O. Ce résultat s'aperçoit immédiatement sur la figure, car lorsque m varie, la droite FC tourne autour du point F et l'on a constamment $CS = CS' = CO$.

Mario GUESDE.

Ont résolu cette question MM. E.-N. Barisien; Joseph Goujon, pensionnat de Valbenoite, à Saint-Etienne; J. Guiraud, lycée Saint-Louis; F. Pégonier, répétiteur au collège de Cette.

---

445. — *On considère une hyperbole équilatère et deux droites conjuguées par rapport à cette hyperbole et rectangulaires entre elles. On demande de montrer :*

1° *Que l'enveloppe de l'une des droites*, D, *est une parabole quand la seconde*, D_1, *tourne autour d'un point fixe* P;

2° *Que si* P *décrit un cercle passant au centre de l'hyperbole, le foyer de la parabole décrit une droite.*

3° *Trouver l'enveloppe de cette droite quand le centre du cercle décrit l'hyperbole donnée.*

1° Soit $x^2 - y^2 - a^2 = 0$ l'équation de l'hyperbole rapportée à ses axes, et x_0, y_0 les coordonnées du point P. Une droite quelconque, D_1, passant par le point P a pour équation

$$y - y_0 = m(x - x_0) \qquad \text{ou} \qquad mx - y + y_0 - mx_0 = 0;$$

la droite D correspondante est perpendiculaire à D_1 et passe par le pôle de cette droite. Les coordonnées de ce pôle sont déterminées par les équations

$$\frac{x}{m} = \frac{-y}{-1} = \frac{-a^2}{y_0 - mx_0};$$

d'où l'on tire

$$x = -\frac{a^2 m}{y_0 - mx_0}, \qquad y = -\frac{a^2}{y_0 - mx_0};$$

la droite D a pour équation

$$y + \frac{a^2}{y_0 - mx_0} = -\frac{1}{m}\left(x + \frac{a^2 m}{y_0 - mx_0}\right),$$

ou, en ordonnant par rapport à m,

$$m^2 y x_0 + m(xx_0 - yy_0 - 2a^2) - xy_0 = 0.$$

Nous aurons l'enveloppe de cette droite en écrivant que cette équation du deuxième degré en m a une racine double; nous avons ainsi

$$(xx_0 - yy_0 - 2a^2)^2 + 4xyx_0y_0 = 0$$

ou

$$(xx_0 + yy_0)^2 - 4a^2(xx_0 - yy_0) + 4a^4 = 0.$$

C'est l'équation d'une parabole tangente aux deux axes, la corde des contacts ayant pour équation $xx_0 - yy_0 - 2a^2 = 0$.

2° La projection de l'origine sur cette droite est le foyer de la parabole, ses coordonnées sont

$$x' = \frac{2a^2 x_0}{x_0^2 + y_0^2}, \qquad y' = -\frac{2a^2 y_0}{x_0^2 + y_0^2}.$$

Si le point P décrit un cercle passant à l'origine, nous avons

$$x_0^2 + y_0^2 - 2\alpha x_0 - 2\beta y_0 = 0,$$

ou

$$1 - 2\alpha\frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2} - 2\beta\frac{y_0}{x_0^2 + y_0^2} = 0,$$

ce qu'on peut encore écrire

$$1 - \frac{\alpha x'}{a^2} + \frac{\beta y'}{a^2} = 0,$$

ou enfin

$$\alpha x' - \beta y' - a^2 = 0.$$

Le foyer de la parabole décrit donc la droite qui a pour équation $\alpha x - \beta y - a^2 = 0$.

3° Si le centre du cercle (α, β) est sur l'hyperbole donnée, la droite $\alpha x - \beta y - a^2 = 0$ est précisément la tangente à l'hyperbole au point (α, β). L'enveloppe demandée est donc l'hyperbole donnée.

MM. E. Félix et J. Guiraud (lycée Saint-Louis) ont résolu cette question.

---

450. — *On considère toutes les coniques ayant un foyer* F *donné et tangentes à deux droites fixes* a *et* b. *Montrer que les directrices relatives au foyer* F *passent toutes par un même point.*

Déduire de là la construction de la conique particulière du faisceau pour laquelle le rapport des distances du foyer fixe au centre et à la directrice est donné.

Prenons pour axes les deux droites fixes et désignons par α, β les coordonnées du point F. Une conique quelconque ayant ce point pour foyer a pour équation

$$(x-\alpha)^2+2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\theta+(y-\beta)^2-\lambda(ux+vy+w)^2=0;$$

nous allons écrire que cette conique est tangente aux deux axes. Faisons $y=0$ dans l'équation ; nous avons

$$x^2(1-\lambda u^2)-2x(\alpha+\beta\cos\theta+\lambda uw)+\alpha^2+2\alpha\beta\cos\theta+\beta^2-\lambda w^2=0.$$

Pour que cette équation ait une racine double, il faut qu'on ait

$$(\alpha+\beta\cos\theta+\lambda uw)^2-(1-\lambda u^2)(\alpha^2+2\alpha\beta\cos\theta+\beta^2-\lambda w^2)=0,$$

ou

$$\lambda[u^2(\alpha^2+2\alpha\beta\cos\theta+\beta^2)+2uw(\alpha+\beta\cos\theta)+w^2]-\beta^2\sin^2\theta=0.$$

En écrivant de même que la conique est tangente à Oy, on obtient

$$\lambda[v^2(\alpha^2+2\alpha\beta\cos\theta+\beta^2)+2vw(\beta+\alpha\cos\theta)+w^2]-\alpha^2\sin^2\theta=0.$$

Éliminons λ entre ces deux dernières équations, nous avons

$$(\alpha^2+2\alpha\beta\cos\theta+\beta^2)(\alpha^2u^2-\beta^2v^2)+2\alpha^2(\alpha+\beta\cos\theta)uw-2\beta^2(\beta+\alpha\cos\theta)vw+(\alpha^2-\beta^2)w^2=0$$

ou

$$(u\alpha+v\beta+w)[u\alpha(\alpha^2+2\alpha\beta\cos\theta+\beta^2)-v\beta(\alpha^2+2\alpha\beta\cos\theta+\beta^2)+w(\alpha^2-\beta^2)]=0.$$

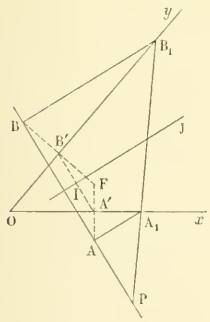
Le premier facteur $u\alpha+v\beta+w$ ne peut être nul, car la directrice ne passe pas par le foyer ; on doit donc avoir

$$u\alpha(\alpha^2+2\alpha\beta\cos\theta+\beta^2)-v\beta(\alpha^2+2\alpha\beta\cos\theta+\beta^2)+w(\alpha^2-\beta^2)=0,$$

ce qui montre que la directrice $ux+vy+w=0$ passe par le point qui a pour coordonnées

$$x=\frac{\alpha(\alpha^2+2\alpha\beta\cos\theta+\beta^2)}{\alpha^2-\beta^2},\qquad y=-\frac{\beta(\alpha^2+2\alpha\beta\cos\theta+\beta^2)}{\alpha^2-\beta^2}.$$

Remarque. — Les coniques considérées sont bitangentes d'une part à la conique formée par les droites Ox, Oy et d'autre part à la conique formée par les droites isotropes qui passent au point F. D'après un théorème connu, les cordes de contact se coupent au centre d'un des couples de sécantes communes. Or ce point est fixe, l'une des cordes de contact est la directrice relative au foyer F ; le théorème est établi.



Parmi les coniques tangentes aux deux axes et ayant pour foyer le point F il y a une seule parabole, dont la directrice passe par les points A et B symétriques de F par rapport à Ox et à Oy. De plus, les points de contact A_1 et B_1 de cette parabole et des deux axes sont situés sur les droites menées par A et B perpendiculairement à la droite AB.

Le point fixe P cherché est à l'intersection de AB et de A_1B_1.

Nous allons maintenant indiquer la construction de la conique particulière du faisceau pour laquelle le rapport des distances du point F au centre C et à la directrice est égal à k.

Soit H le pied de la perpendiculaire abaissée du point F sur la directrice de cette conique, nous avons $\dfrac{\overline{FC}}{\overline{FH}}=k$.

Le point H appartient au cercle Γ qui a pour diamètre FP, il en résulte que le centre C est situé sur un cercle Γ′ homothétique du cercle Γ, le centre d'homothétie étant le point F.

D'autre part, le lieu des centres des coniques est la perpendiculaire IJ élevée au milieu de A′B′,

A et B′ étant les projections du foyer sur les deux axes Ox, Oy, car on sait que ces deux points sont équidistants du centre.

Il en résulte que le centre de la conique cherchée est à l'intersection du cercle F′ et de la droite IJ. Le centre étant connu, la conique est déterminée.

On aura donc deux solutions réelles, imaginaires ou confondues selon la nature des points de rencontre de la droite et du cercle. Joseph LHÉRIAUD, lycée de Toulouse.

Autres solutions par MM. AUZERAM, à Montpellier ; BLAZY-LACOMBE, lycée de Toulouse ; G. de FRANCE, à Versailles.

---

454. — *On donne une droite et un cercle qui la coupe ; mener une tangente qui forme avec la droite donnée et le diamètre perpendiculaire un triangle d'aire maximum ou minimum.*

Lieu du point de contact quand la circonférence a son centre fixe et que son rayon varie.

Prenons pour axe des y la droite donnée et pour axe des x le diamètre perpendiculaire ; soit

$$(x-a)^2+y^2-R^2=0$$

l'équation du cercle.

Une tangente quelconque à ce cercle a pour équation

$$(x-a)\cos\varphi+y\sin\varphi-R=0,$$

elle forme avec les axes un triangle dont l'aire a pour mesure la valeur absolue de la quantité $\frac{(a\cos\varphi+R)^2}{\sin 2\varphi}$. En égalant à zéro la dérivée de cette fonction, nous aurons les valeurs de φ correspondantes au maximum ou au minimum de l'aire du triangle.

Nous avons ainsi l'équation

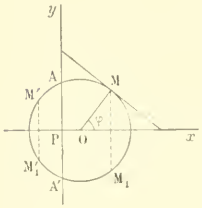
$$(a\cos\varphi+R)(a(\sin\varphi\sin 2\varphi+\cos\varphi\cos 2\varphi)+R\cos 2\varphi)=0,$$

ou encore, en supprimant le facteur $a\cos\varphi+R$ qui ne peut s'annuler, puisque R est supérieur à a,

$$a\cos\varphi+R\cos 2\varphi=0,$$

$$2R\cos^2\varphi+a\cos\varphi-R=0.$$

Cette équation admet une racine positive comprise entre 0 et 1, et une racine négative comprise entre -1 et 0. A la racine positive correspondent deux points du cercle, M et M_1, symétriques par rapport à Ox et ayant une abscisse commune positive. A la racine négative correspondent également deux points M′ et M_1' dont l'abscisse commune est négative, car on vérifie aisément que la racine négative de l'équation est comprise entre -1 et $-\frac{a}{R}$.



Nous aurons le lieu décrit par les points M, M′, M_1, M_1' en éliminant R et φ entre les équations

$$x-a=R\cos\varphi,$$

$$y=R\sin\varphi,$$

$$2R\cos^2\varphi+a\cos\varphi-R=0.$$

De la première on tire $\cos\varphi=\frac{x-a}{R}$, et en portant cette valeur dans la troisième équation, il vient

$$2(x-a)^2+a(x-a)-R^2=0,$$

et en remplaçant R^2 par $(x-a)^2+y^2$, on a

$$x^2-y^2-ax=0.$$

C'est l'équation d'une hyperbole équilatère qui a pour sommets les points P et O.

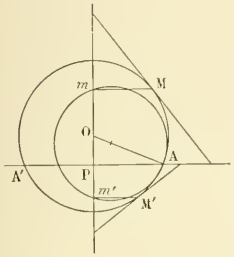
AUZERAM, à Montpellier.

Solutions analogues par MM. E. N. BARISIEN ; BLAZY-LACOMBE et Joseph LHÉRIAUD, lycée de Toulouse ; Joseph GOUJON et Antoine LANGLOIS, pensionnat de Valbenoite, Saint-Etienne.

Autre solution.

Considérons, d'une manière générale, les triangles qui admettent deux droites fixes pour côtés et dont le troisième côté enveloppe une courbe quelconque : ceux dont l'aire est maxima ou minima sont tels que le côté variable touche son enveloppe en son milieu : cette propriété résulte de ce que les triangles de même aire qui admettent deux droites fixes pour côtés, ont leurs troisièmes côtés tangents en leurs milieux à une hyperbole dont les asymptotes sont les deux droites fixes.

Dans le cas particulier de la question la tangente cherchée touche donc le cercle O en un point M, tel qu'il existe une hyperbole tangente au cercle en ce point et admettant pour asymptotes la droite donnée AA′ et le diamètre perpendiculaire OP : la droite OM est normale à cette hyperbole, et le point M est par suite sur l'hyperbole d'Apollonius correspondant au point O et aux hyperboles d'asymptotes AA′ et OP : le lieu cherché est donc cette hyperbole équilatère H de sommets O et P.



Le problème se trouve donc ramené à construire les points où un cercle de centre O coupe l'hyperbole H : soient m et m' leurs projections sur OP : ces points se correspondent évidemment dans l'involution déterminée sur OP par les points O et P d'une part, et d'autre part par les extrémités du diamètre OP ; ils se correspondent d'ailleurs aussi dans toutes les involutions que déterminent les projections sur OP des points où les coniques O et H coupent une droite quelconque, par exemple une asymptote de H : le milieu de la corde interceptée sur O par cette asymptote se projette évidemment au quart de OP à partir du point O, et cette projection doit être le milieu de mm'. On en déduit cette construction très simple : les points m et m' sont sur la circonférence passant par A dont le centre est au quart de OA à partir du point O.

ALPHA.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

ÉCOLE CENTRALE (1894)

Géométrie analytique. (M. GOUILLY.)

Géométrie analytique à deux dimensions (Suite).

113. — Lieu des milieux des cordes menées normalement à une parabole.

114. — En un point M d'une parabole, on mène la tangente et la normale ; la normale coupe l'axe de la parabole au point N. Lieu du point de rencontre de la tangente en M avec la perpendiculaire à l'axe menée par le point N.

115. — Une parabole donnée se déplace en restant tangente aux deux axes de coordonnées. Lieu de son foyer.

116. — Exprimer que l'équation générale du second degré représente une parabole dont le foyer et le paramètre sont donnés. — Lieu des points de contact des tangentes à cette courbe parallèle à Oy.

117. — Équation générale des coniques circonscrites à un parallélogramme. — Démontrer que leur centre est le point de concours des diagonales. — Chercher les asymptotes.

118. — Équation générale des paraboles ayant une corde commune et tangentes à une droite parallèle à cette corde. — Écrire l'équation de l'axe de l'une de ces paraboles. — Lieu des foyers.

119. — On donne un cercle et un point C sur ce cercle ; on mène une parallèle AB à Ox. Équation générale des coniques qui passent par les points de rencontre A et B de cette droite avec le cercle et sont tangentes au cercle au point C.

120. — On donne une ellipse et un point sur cette ellipse. Équation d'un cercle tangent en ce point à l'ellipse.

121. — Équation d'une courbe du troisième degré qui a une asymptote parallèle à l'axe des x, une parallèle à l'axe des y et une parallèle à la bissectrice de l'un des angles des axes. De plus elle passe par l'origine et y est tangente à cette même bissectrice.

122. — Exprimer qu'une équation du troisième degré représente une courbe qui a un point double isolé à l'origine, une asymptote parallèle à l'axe des x et une parallèle à la bissectrice de l'un des angles des axes.

123. — Construire les courbes $y = \frac{x^2-4}{x+1}$, $y = \frac{x^2-1}{x+3}$.

124. — Construire les courbes $y = \sqrt{(x+1)(x-2)(x-4)}$, $y = \sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}$.

125. — Construire la courbe $y = x\sqrt{x-1}$.

126. — Construire les courbes $y = \sqrt{\frac{x-1}{x^2-4}}$, $y = \sqrt{\frac{x-1}{(x+1)(x+2)}}$.

127. — Construire la courbe $y = \sqrt{\frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}}$.

128. — Construire la courbe $y = x\sqrt{\frac{x-2}{x-3}}$.

129. — Construire la courbe $(x-a)^2y^2 - x^2 + b^2 = 0$.

130. — Construire la courbe $(x-a)^2y^2 - x^2(x+b) = 0$.

131. — Construire la courbe $(x^2-a^2)y^2 + x^2(y+x) = 0$.

132. — Construire la courbe $3x^2y + 4xy^2 + 5x^2 - 4y^2 = 0$.

Déterminer les asymptotes ; les points multiples avec les tangentes en ces points.

133. — Construire la courbe $\rho = a\cos(\omega - \alpha)$.

134. — Construire la courbe $\rho = a\cos(\omega - \alpha) + b\sin(\omega - \alpha)$.

135. — Construire la courbe $\rho = a\cos 5\omega$.

136. — Construire la courbe $\rho = \cos\frac{\omega}{m}$; en particulier $\rho = \cos\frac{\omega}{2}$.

137. — Construire la courbe $\rho = \frac{1}{1-\cos\omega}$.

138. — Construire la courbe $\rho = \frac{1}{\cos^2\omega}$.

139. — Construire la courbe $\rho = a\frac{\cos^2\omega}{\cos\omega}$.

140. — Construire la courbe $\rho = a\frac{\cos^2\omega}{\sin\omega}$.

141. — Construire la courbe $\rho = \frac{\omega-1}{\omega+1}$.

142. — Construire la courbe $\rho = \frac{\omega}{\omega^2-1}$.

QUESTIONS PROPOSÉES

498. — On donne une parabole et on considère son axe, Ox, et sa tangente au sommet, Oy. La tangente en un point variable M de cette parabole rencontre ces deux droites en A et B ; la normale au même point M les rencontre en A′ et B′. On demande les lieux des centres des cercles circonscrits aux triangles OAB et OA′B′, les enveloppes de ces cercles et le lieu de leur second point de rencontre.

(G. A. Pouilliart.)

499. — Une ellipse de grandeur constante tourne autour de son centre ; trouver l'enveloppe des tangentes parallèles à la bissectrice de l'angle que fait un des axes avec une direction fixe.

E. Berthelot

500. — Une ellipse de grandeur constante tourne autour de son centre ; trouver le lieu des projections du centre sur les tangentes qui font avec une direction donnée un angle égal au tiers de celui que fait un des axes mobiles de l'ellipse avec la même direction.

(E. Berthelot.)

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

6e Année. N° 7. Avril 1896.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

NÉCROLOGIE

Nous avons le vif regret d'apprendre à nos lecteurs la mort d'un des fondateurs de la *Revue de Mathématiques spéciales*, M. TARTINVILLE, resté jusqu'à la dernière heure un collaborateur fidèle et désintéressé. Chaque année il publiait dans la *Revue* les solutions des questions posées aux examens d'admission à l'Ecole centrale, et ces solutions étaient toujours de sa part l'objet d'un soin méticuleux, d'une étude approfondie et pleine de sagacité, où les méthodes proposées aux élèves étaient en correspondance parfaite avec leurs connaissances. En dehors de ce concours effectif et précieux, les rédacteurs habituels de la *Revue* avaient en lui un ami sûr et dévoué, se réjouissant de tout ce qui pouvait assurer le succès de leur publication et prêt à les aider de ses judicieux conseils.

Mais ce serait amoindrir la personnalité de M. Tartinville que d'insister outre mesure sur cette manifestation trop particulière de sa bienfaisante activité. L'Université perd en lui l'un des professeurs les plus consciencieux, les plus dévoués aux intérêts des élèves qu'elle ait jamais eus. On peut dire qu'à bien des points de vue M. Tartinville fut le modèle du véritable professeur : conscience, loyauté, bienveillance, désintéressement, préparation scrupuleuse, toutes les qualités qui font d'un homme un guide recherché pour la jeunesse, il les possédait au plus haut degré. Nul plus que lui n'a eu le souci des grands intérêts qui lui étaient confiés, la préoccupation constante d'améliorer son enseignement ; et le travail continu qu'il s'est imposé n'est certainement pas étranger à sa mort.

Il y a un an, lorsqu'il fallut procéder à l'élection d'un représentant des agrégés de mathématiques au Conseil supérieur de l'Instruction publique, un certain nombre d'entre nous proposèrent avec enthousiasme la candidature de M. Tartinville ; elle triompha, et le corps des agrégés reconnut ainsi publiquement les mérites exceptionnels de l'ami que nous pleurons tous aujourd'hui. Avec lui, nous savions nos intérêts en bonnes mains ; nous étions sûrs qu'aucune considération personnelle ne lui ferait abandonner les justes idées qu'il nous avait soumises et qu'il s'était engagé à défendre. Hélas ! nous ne pensions guère qu'il restât si peu de temps à ce poste d'honneur ! Que ce soit du moins pour nous une consolation de lui avoir procuré avant sa mort cette haute satisfaction morale !

Dans ce journal, moins que partout ailleurs, il n'est pas permis de passer sous silence les ouvrages que l'honorable professeur a publiés dans cette même librairie. Ils portent la marque de son esprit méthodique et sagace. Ses élèves y retrouveront l'écho de cette parole dévouée et qu'à tant de titres ils aimaient ; leurs successeurs y prendront des idées justes et saines, l'habitude de la rigueur mathématique, ce scrupuleux souci de l'exactitude qui est la loi morale de l'esprit et conduit si souvent, par des chemins mystérieux, à l'observation sereine des plus hautes lois de la conscience.

Qu'il nous soit permis, en terminant, d'offrir à sa veuve et à ses chers orphelins l'hommage de notre profonde douleur et de notre vive sympathie. Ils peuvent être assurés que le souvenir de l'homme excellent, du loyal collègue et du parfait universitaire que fut M. Tartinville vivra toujours parmi nous. Plus tard, quand les pauvres enfants auront grandi et pourront se mêler à ceux d'entre nous qui seront encore là, ils comprendront les regrets que leur père laisse aujourd'hui, et cette chère mémoire leur assurera toutes les sympathies et tous les dévouements.

E. H.

PREMIÈRE PARTIE

LEÇON D'AGRÉGATION

12. — Invariant de la forme cubique. — Application à la résolution de l'équation du troisième degré (*).

Nous nous appuierons sur cette propriété bien connue que le hessien d'une forme homogène de degré quelconque et renfermant un nombre quelconque de variables est un covariant de cette forme. Nous allons d'ailleurs démontrer cette propriété.

A cet effet, désignons par $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une forme homogène à n variables de degré quelconque p, et représentons par

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{array}\right.$$

une substitution linéaire à effectuer sur les variables x_k ; les formules (1) résolues par rapport à $y_1, y_2, \ldots, y_n$ donneront les variables nouvelles en fonction des anciennes. Effectuons alors identiquement la substitution indiquée sur la forme $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de façon que l'on ait

$$(2)\qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv f_1(y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

en vertu des formules (1) ; désignons par $P_1, P_2, \ldots, P_n$ les dérivées partielles de $f_1(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ par rapport à $y_1, y_2, \ldots, y_n$, et supposons ces fonctions exprimées à l'aide des variables x_k. Nous aurons alors

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial y_1^2} = \frac{\partial P_1}{\partial x_1}a_{11} + \frac{\partial P_1}{\partial x_2}a_{21} + \cdots + \frac{\partial P_1}{\partial x_n}a_{n1},$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial y_1 \partial y_2} = \frac{\partial P_1}{\partial x_1}a_{12} + \frac{\partial P_1}{\partial x_2}a_{22} + \cdots + \frac{\partial P_1}{\partial x_n}a_{n2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial y_1 \partial y_n} = \frac{\partial P_1}{\partial x_1}a_{1n} + \frac{\partial P_1}{\partial x_2}a_{2n} + \cdots + \frac{\partial P_1}{\partial x_n}a_{nn},$$

et, de même, $n-1$ autres systèmes analogues pour chacune des $n-1$ autres lignes du hessien de la forme $f_1(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Ces formules montrent immédiatement que le nouveau hessien, $H_1(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, est le produit du déterminant

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial P_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial P_1}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial P_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial P_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial P_2}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial P_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial P_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial P_n}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial P_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

par le module de la substitution, m.

(*) J'ai reçu dans le courant du mois dernier une lettre d'un candidat à l'agrégation me demandant de publier dans la *Revue* les leçons de mathématiques spéciales portant les Nos 12, 14, 15 (voir *Annales de l'agrégation des sciences mathématiques*). Les deux dernières ne pourraient intéresser qu'un nombre trop restreint de lecteurs pour qu'il me soit possible de déférer au vœu qui m'a été adressé ; mais la première est assez aisée à suivre pour qu'un élève de Mathématiques spéciales ordinaire la lise avec intérêt et profit ; aussi je m'empresse de la publier. E. H.

D'autre part, l'identité (2) nous donne

$$P_1 = \frac{\partial f_1}{\partial y_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} a_{11} + \frac{\partial f}{\partial x_2} a_{21} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} a_{n1};$$

par suite nous avons

$$\frac{\partial P_1}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} a_{11} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} a_{21} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} a_{n1},$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} a_{11} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} a_{21} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} a_{n1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial x_n} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} a_{11} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} a_{21} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} a_{n1};$$

nous avons de même $n-1$ autres systèmes semblables pour les dérivées partielles de $P_2, P_3, \ldots, P_n$ par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ces formules montrent aussi de suite que le déterminant fonctionnel des fonctions P_k est le produit du hessien de la forme $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ par le module de la substitution. Nous obtenons donc finalement l'identité suivante, qui démontre la propriété annoncée :

$$(3) \qquad H_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) \equiv m^2 H(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Pour appliquer ce qui précède aux formes binaires cubiques, représentons par

$$x_1 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2,$$
$$x_2 = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2$$

les formules de substitution et par

$$ax_1^3 + 3bx_1^2 x_2 + 3cx_1 x_2^2 + dx_2^3,$$
$$a_1 y_1^3 + 3b_1 y_1^2 y_2 + 3c_1 y_1 y_2^2 + d_1 y_2^3$$

les deux formes cubiques identiques en vertu de ces formules; nous aurons d'abord $m = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$; puis, en divisant les deux hessiens par le facteur numérique 36,

$$H(x_1, x_2) \equiv (ac - b^2)x_1^2 + (ad - bc)x_1 x_2 + (bd - c^2)x_2^2,$$
$$H_1(y_1, y_2) \equiv (a_1 c_1 - b_1^2)y_1^2 + (a_1 d_1 - b_1 c_1)y_1 y_2 + (b_1 d_1 - c_1^2)y_2^2,$$

et, en vertu de l'identité (3),

$$H_1(y_1, y_2) \equiv m^2 H(x_1, x_2).$$

D'autre part, si l'on applique à la fonction $H(x_1, x_2)$ la substitution envisagée, on a identiquement

$$H(x_1, x_2) \equiv Ay_1^2 + By_1 y_2 + Cy_2^2,$$

et la propriété du hessien fournit l'identité nouvelle

$$4AC - B^2 \equiv m^2 [4(ac - b^2)(bd - c^2) - (ad - bc)^2];$$

ensuite on a, en vertu de ce qui précède,

$$H_1(y_1, y_2) \equiv m^2(Ay_1^2 + By_1 y_2 + Cy_2^2);$$

d'où, immédiatement,

$$4(a_1 c_1 - b_1^2)(b_1 d_1 - c_1^2) - (a_1 d_1 - b_1 c_1)^2 \equiv m^4(4AC - B^2).$$

Par conséquent, en désignant par Δ et Δ_1 les deux fonctions $4(ac - b^2)(bd - c^2) - (ad - bc)^2$ et $4(a_1 c_1 - b_1^2)(b_1 d_1 - c_1^2) - (a_1 d_1 - b_1 c_1)^2$, nous trouvons la nouvelle identité

$$(4) \qquad \Delta_1 \equiv m^6 \Delta,$$

qui montre que le discriminant de la forme cubique est un invariant. Nous allons voir bientôt que la forme cubique n'a pas d'autre invariant.

Il est bon de remarquer, avant de continuer l'étude de cette forme, qu'un calcul semblable nous permettrait d'établir pour une forme quelconque homogène que le hessien du hessien est un covariant de cette forme. Cette propriété est d'ailleurs bien connue et n'est qu'un cas particulier d'une autre beaucoup plus générale.

Si l'on envisage le hessien de la forme cubique, on voit qu'il ne peut être identiquement nul que lorsque la forme considérée est un cube parfait, car les hypothèses $ac - b^2 = 0$, $ad - bc = 0$,

$bd - c^2 = 0$ entraînent de suite cette conclusion. Donc en laissant de côté ce cas exceptionnel, immédiatement étudié, on voit qu'il n'y a que deux cas à considérer réellement : le cas où le hessien est un produit de deux facteurs linéaires distincts, c'est-à-dire le cas où le discriminant est différent de zéro; et le cas où le hessien est un carré parfait, cas qui se présente quand le discriminant est simplement nul, sans que les hypothèses envisagées plus haut soient réalisées.

Cas général. — Supposons d'abord le discriminant non nul. Nous allons montrer que la forme cubique est la somme des cubes de deux formes linéaires indépendantes et indiquer le moyen de réaliser cette décomposition.

Supposons, en effet, que nous ayons

$$f(x_1, x_2) \equiv X_1^3 + X_2^3,$$

avec

$$X_1 \equiv \alpha x_1 + \alpha' x_2, \qquad \alpha\beta' - \beta\alpha' \neq 0,$$
$$X_2 \equiv \beta x_1 + \beta' x_2;$$

nous déduisons immédiatement de cette identité

$$H(x_1, x_2) \equiv (\alpha\beta' - \beta\alpha')^2 X_1 X_2,$$

$H(x_1, x_2)$ étant, comme antérieurement, le hessien divisé par 36; par conséquent nous voyons que X_1 et X_2 sont les facteurs du hessien. Inversement, désignons maintenant par Y_1 et Y_2 les deux facteurs du hessien écrits en fixant d'une certaine façon les facteurs variables qui se trouvent dans leurs coefficients, et posons

$$Y_1 \equiv \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2,$$
$$Y_2 \equiv \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2;$$

ces formules définiront une substitution linéaire, car le déterminant $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$ n'est pas nul, les facteurs du hessien étant distincts; en vertu de cette substitution, nous aurons identiquement

$$f(x_1, x_2) \equiv a_1 Y_1^3 + 3b_1 Y_1^2 Y_2 + 3c_1 Y_1 Y_2^2 + d_1 Y_2^3,$$

et

$$H(x_1, x_2) \equiv (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 H_1(Y_1, Y_2).$$

Or $H(x_1, x_2)$ est, à une constante près, le produit $Y_1 Y_2$; donc les deux coefficients extrêmes du hessien $H_1(Y_1, Y_2)$ sont nuls, et l'on a

$$a_1 c_1 - b_1^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad a_1 . c_1 - b_1 . b_1 = 0,$$
$$b_1 d_1 - c_1^2 = 0 \qquad\qquad c_1 . c_1 - d_1 . b_1 = 0,$$

et, comme $a_1 d_1 - b_1 c_1$ n'est pas nul, puisque le hessien n'est pas identiquement nul, on en déduit $b_1 = 0$, $c_1 = 0$. La nouvelle forme se réduit donc à $a_1 Y_1^3 + d_1 Y_2^3$, et, en posant $X_1 = Y_1 \sqrt[3]{a_1}$, $X_2 = Y_2 \sqrt[3]{d_1}$, la forme cubique est ramenée à une somme de deux cubes indépendants.

Tous les calculs indiqués sont possibles algébriquement, sauf, dans certains cas, ceux qui consistent à former l'une des racines cubiques de a_1 et une des racines cubiques de d_1, qui ne sont effectuables sans l'emploi des fonctions circulaires que si a_1 et d_1 sont réels.

La résolution de l'équation cubique est alors immédiate et se ramène à celles de trois équations du premier degré à une inconnue que l'on doit envisager successivement,

$$X_1 + X_2 = 0, \qquad X_1 + \theta X_2 = 0, \qquad X_1 + \theta^2 X_2 = 0,$$

θ et θ^2 étant les deux racines cubiques imaginaires de l'unité.

Il est facile aussi de faire voir que, dans le cas général où nous nous sommes placé, il n'y a pas d'autre invariant que Δ. Supposons, en effet, qu'il y en ait un autre, une certaine fonction des coefficients de la forme cubique, $K(a, b, c, d)$; alors, en vertu de l'identité

$$f(x_1, x_2) \equiv X_1^3 + X_2^3,$$

avec

$$X_1 \equiv \alpha x_1 + \alpha' x_2, \qquad \alpha\beta' - \beta\alpha' \neq 0,$$
$$X_2 \equiv \beta x_1 + \beta' x_2,$$

nous aurons

$$K(a, b, c, d) \equiv (\alpha\beta' - \beta\alpha')^p K(1, 0, 0, 1);$$

de même

$$\Delta \equiv (\alpha\beta' - \beta\alpha')^6 \Delta(1, 0, 0, 1)$$

ou

$$\Delta \equiv -(\alpha\beta' - \beta\alpha')^6.$$

Or $K(1, 0, 0, 1)$ se réduit à une quantité numérique, absolument constante, h ; donc nous voyons que

$$K(a, b, c, d) \equiv h'\Delta^{\frac{p}{6}}, \qquad h' = h.(-1)^{\frac{p}{6}}.$$

L'invariant K n'est donc pas autre chose qu'une certaine puissance de l'invariant Δ : il ne diffère donc pas, à proprement parler, de celui-ci.

Cas particulier. — Le hessien est un carré parfait, le discriminant est nul. Alors nous allons montrer que la forme cubique se ramène à la forme $X_1^2X_2$, X_1 et X_2 étant deux fonctions linéaires indépendantes. D'abord, si cela est, on voit de suite, en raisonnant comme antérieurement, que le hessien est le carré de X_1. D'autre part, si le hessien est un carré parfait, soit

$$H(x_1, x_2) \equiv X_1^2 \equiv (\alpha x_1 + \alpha' x_2)^2;$$

adjoignons à cette fonction linéaire une autre fonction linéaire, $Y_2 \equiv \beta x_1 + \beta' x_2$, indépendante de la précédente, et effectuons la substitution définie par ces deux équations ; nous aurons

$$H(x_1, x_2) \equiv a_1X_1^3 + 3b_1X_1^2Y_2 + 3c_1X_1Y_2^2 + d_1Y_2^3;$$

si nous exprimons maintenant que le hessien de cette nouvelle forme cubique se réduit à kX_1^2, nous aurons

$$a_1d_1 - b_1c_1 = 0, \qquad b_1d_1 - c_1^2 = 0,$$

et, comme $a_1c_1 - b_1^2 \neq 0$, nous déduisons de là $d_1 = 0$, $c_1 = 0$; ceci nous montre que la forme cubique se réduit à $X_1^2(a_1X_1 + 3b_1Y_2)$ ou à $X_1^2X_2$; d'ailleurs la forme X_2 est indépendante de X_1, sans quoi la forme cubique serait un cube parfait et le hessien serait identiquement nul, cas que nous ne considérons pas. Une fois la forme cubique mise sous la forme X^2X_2, la résolution de l'équation $f(x_1, x_2) = 0$ est évidente. Les calculs indiqués dans le cas actuel ne présentent jamais d'impossibilité arithmétique.

Résolution de l'équation du troisième degré dans le cas général.

Nous allons exposer maintenant la résolution de l'équation cubique dans le cas général en mettant le premier membre sous forme d'une somme de deux cubes. Pour cela, il nous suffit de déterminer p, q, α et β de façon à satisfaire à l'identité

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d \equiv p(x + \alpha)^3 - q(x + \beta)^3;$$

nous obtenons ainsi les équations

$$p - q = a, \qquad p\alpha - q\beta = b,$$
$$p\alpha^2 - q\beta^2 = c, \qquad p\alpha^3 - q\beta^3 = d;$$

de là nous déduisons aisément les combinaisons

$$pq(\alpha - \beta)^2 = b^2 - ac,$$
$$pq(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)^2 = bc - ad,$$
$$pq\alpha\beta(\alpha - \beta)^2 = c^2 - bd;$$

d'où, par division,

$$\alpha + \beta = \frac{ad - bc}{ac - b^2},$$

$$\alpha\beta = \frac{bd - c^2}{ac - b^2}.$$

Nous voyons donc que α et β sont racines de l'équation du second degré

$$(ac - b^2)X^2 + (bc - ad)X + bd - c^2 = 0 \; ; \tag{5}$$

le discriminant de cette équation n'étant pas nul, elle fournit deux valeurs différentes pour α et β. Les deux premières équations entre p, q, α et β donnent les valeurs de p et q,

$$p = \frac{a\beta - b}{\beta - \alpha}, \qquad q = \frac{a\alpha - b}{\beta - \alpha}. \tag{6}$$

On peut prendre pour α et β les deux racines de l'équation (5) dans un ordre quelconque, car si on échange α et β, p et q s'échangent l'un dans l'autre et changent de signes, de sorte que la décomposition ne change pas. On a alors successivement

$$\alpha = \frac{ad - bc - \sqrt{-\Delta}}{2(ac - b^2)},$$

$$\beta = \frac{ad - bc + \sqrt{-\Delta}}{2(ac - b^2)},$$

$$\frac{q}{p} = \frac{2b^3 + a^2d - 3abc - a\sqrt{-\Delta}}{2b^3 + a^2d - 3abc + a\sqrt{-\Delta}} = \frac{\frac{1}{2}\frac{\partial\Delta}{\partial d} + a\sqrt{-\Delta}}{\frac{1}{2}\frac{\partial\Delta}{\partial d} - a\sqrt{-\Delta}},$$

en désignant par Δ la quantité $4(ac - b^2)(bd - c^2) - (bc - ad)^2$ et par $-\sqrt{-\Delta}$ et $\sqrt{-\Delta}$ les deux racines carrées de $-\Delta$ prises dans un ordre quelconque.

Le nombre $\frac{q}{p}$ et les nombres α et β sont donc calculables dans tous les cas à l'aide d'un certain nombre d'opérations arithmétiques. Appelons H le nombre $\frac{q}{p}$ effectué; nous sommes ramenés finalement à la résolution de l'équation

$$\left(\frac{x + \alpha}{x + \beta}\right)^3 = \mathrm{H},$$

c'est-à-dire à l'extraction de la racine cubique d'un nombre imaginaire H. Soit h l'une des racines cubiques de H, nous aurons alors les racines de l'équation proposée en résolvant les trois équations linéaires

$$\frac{x + \alpha}{x + \beta} = h \qquad \text{ou} \qquad \theta h \qquad \text{ou} \qquad \theta^2 h.$$

Il n'y a rien de plus à dire du cas le plus général.

Dans le cas où les coefficients sont réels, on peut aisément discuter l'équation proposée. On voit en effet de suite que Δ est réel, et alors :

1° Si Δ est négatif, α, β et H sont réels, il y a une racine cubique de H qui est réelle, h, une valeur de x est réelle, les deux autres sont imaginaires conjuguées ;

2° Si Δ est positif, α et β sont imaginaires conjugués l'un de l'autre, de même p et q ; par suite on aura les racines cubiques de H en associant les racines cubiques imaginaires conjuguées de p et q ; les trois valeurs de x seront donc données par des équations linéaires de la forme

$$\frac{x + \gamma + \delta i}{x + \gamma - \delta i} = \frac{l + mi}{l - mi},$$

et l'on voit de suite qu'elles sont toutes réelles. Ce cas est irréductible au point de vue purement arithmétique, car l'extraction d'une racine cubique de nombre imaginaire se ramène à la résolution d'une équation cubique à coefficients réels et dont les trois racines sont réelles.

Si Δ est nul, la méthode que nous avons suivie n'est pas applicable. E. H.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

449. — *On donne un ellipsoïde rapporté à ses axes et une droite Δ située d'une manière quelconque dans l'espace. Par la droite Δ on mène le plan P perpendiculaire au plan tangent en un point M de l'ellipsoïde.*

1° *Trouver le lieu du point de rencontre, μ, du plan P avec le diamètre de l'ellipsoïde qui aboutit au point M, quand le point M décrit l'ellipsoïde.*

2° *Ce lieu est une quadrique S passant par la droite Δ : trouver toutes ses génératrices rectilignes, et indiquer comment doit être placée la droite Δ pour qu'elle soit un paraboloïde hyperbolique.*

3° *Prouver que la quadrique S contient la cubique aux pieds des normales relative à un point quelconque de Δ, et trouver sur l'ellipsoïde le lieu du point M lorsque le point μ décrit la cubique aux pieds des normales relative à un point donné de Δ.*

4° *On considère une deuxième droite Δ_1 rencontrant Δ, et la quadrique correspondante S_1, analogue à S. Prouver que les quadriques S et S_1 ont en commun une cubique gauche et une droite D ; trouver cette droite D et en indiquer une construction géométrique simple.*

5° *Soit D_1 l'intersection du plan P et du plan tangent en M à l'ellipsoïde. Montrer que si le point M décrit l'ellipsoïde, il y a deux droites D_1 passant par un point donné, ω, de l'espace, et trouver le lieu des points ω pour lesquels les deux droites qui y passent sont confondues. Ce lieu est une surface Σ du quatrième ordre, qui admet Δ comme droite double : prouver qu'elle peut être engendrée par une conique, et donner la définition géométrique simple de cette conique.*

1° Soient $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ l'équation de l'ellipsoïde et $\frac{x-x_0}{u}=\frac{y-y_0}{v}=\frac{z-z_0}{w}$ les équations de la droite Δ. Tout plan passant par cette droite a une équation de la forme

$$(P)\qquad \lambda(x-x_0)+\mu(y-y_0)+\nu(z-z_0)=0,$$

λ, μ et ν vérifiant la relation

$$\lambda u+\mu v+\nu w=0.$$

Soient alors α, β, γ les coordonnées du point M ; le plan tangent en ce point a pour équation

$$\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+\frac{\gamma z}{c^2}-1=0,$$

et si on exprime que le plan P est perpendiculaire à ce plan, on obtient la relation nouvelle

$$\frac{\lambda\alpha}{a^2}+\frac{\mu\beta}{b^2}+\frac{\nu\gamma}{c^2}=0.$$

Les deux relations qui contiennent λ, μ et ν donnent pour ces paramètres des valeurs proportionnelles à

$$\frac{\gamma v}{c^2}-\frac{\beta w}{b^2},\qquad \frac{\alpha w}{a^2}-\frac{\gamma u}{c^2},\qquad \frac{\beta u}{b^2}-\frac{\alpha v}{a^2},$$

et, par suite, l'équation du plan P est

$$P\equiv\left(\frac{\gamma v}{c^2}-\frac{\beta w}{b^2}\right)(x-x_0)+\left(\frac{\alpha w}{a^2}-\frac{\gamma u}{c^2}\right)(y-y_0)+\left(\frac{\beta u}{b^2}-\frac{\alpha v}{a^2}\right)(z-z_0)=0.$$

D'autre part, les équations du diamètre OM sont $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$, et, en remplaçant dans l'équation $P=0$, α, β, γ par les quantités proportionnelles x, y, z, on a de suite l'équation du lieu,

$$S\equiv\left(\frac{vz}{c^2}-\frac{wy}{b^2}\right)(x-x_0)+\left(\frac{wx}{a^2}-\frac{uz}{c^2}\right)(y-y_0)+\left(\frac{uy}{b^2}-\frac{vx}{a^2}\right)(z-z_0)=0.$$

Ce lieu est une quadrique.

Il est important de remarquer que l'élimination s'est faite sans tenir compte de la relation $\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}-1=0$, qui exprime que le point M est sur l'ellipsoïde. Cela tient à ce que dans l'énoncé on peut prendre le point M où l'on veut sur un diamètre déterminé et prendre pour second plan le plan polaire du point M ; le plan P est le même pour tous ces points M, et, par suite, ils donnent tous le même point du lieu.

2° La quadrique S contient évidemment le point (x_0, y_0, z_0), c'est-à-dire un point quelconque de Δ; donc elle contient la droite Δ. Il est d'ailleurs facile de vérifier que les coordonnées $x_0+u\rho$, $y_0+v\rho$, $z_0+w\rho$ d'un autre point quelconque de la droite Δ satisfont à l'équation de la surface quel que soit ρ.

La quadrique S est donc réglée. Pour avoir ses génératrices, revenons aux équations contenant λ, μ et ν et qui déterminent le plan P; en remplaçant dans deux d'entre elles ν par $-\frac{\lambda u+\mu v}{w}$, elles deviennent

$$\lambda(w(x-x_0)-u(z-z_0))+\mu(w(y-y_0)-v(z-z_0))=0,$$

$$\lambda\left(\frac{w\alpha}{a^2}-\frac{u\gamma}{c^2}\right)+\mu\left(\frac{w\beta}{b^2}-\frac{v\gamma}{c^2}\right)=0;$$

il suffit alors d'éliminer λ et μ entre elles, et de remplacer α, β, γ par les quantités proportionnelles x, y, z pour avoir l'équation de la quadrique sous la forme

$$AB-CD=0,$$

A, B, C et D étant des fonctions linéaires de x, y, z. Les deux systèmes de génératrices ont donc pour équations

$$\begin{cases} A-kC=0, \\ kB-D=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} A-hD=0, \\ hA-B=0, \end{cases}$$

k et h étant deux paramètres variables.

Pour que la surface S soit un paraboloïde hyperbolique, il faut que l'on ait

$$uvw\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)=0,$$

c'est-à-dire $u=0$ ou $v=0$ ou $w=0$. Il faut donc que la droite donnée Δ soit parallèle à un des plans principaux de l'ellipsoïde.

3° L'équation de la surface S peut s'écrire

$$u\left[\frac{y(z-z_0)}{b^2}-\frac{z(y-y_0)}{c^2}\right]+v\left[\frac{z(x-x_0)}{c^2}-\frac{x(z-z_0)}{a^2}\right]+w\left[\frac{x(y-y_0)}{a^2}-\frac{y(x-x_0)}{b^2}\right]=0$$

ou

$$uC_1+vC_2+wC_3=0,$$

en désignant par C_1, C_2, C_3 les trois premiers membres des équations de trois cylindres hyperboliques,

$$\frac{y(z-z_0)}{b^2}-\frac{z(y-y_0)}{c^2}=0, \qquad \text{etc.}$$

Ces trois cylindres ont en commun la courbe

$$\frac{a^2(x-x_0)}{x}=\frac{b^2(y-y_0)}{y}=\frac{c^2(z-z_0)}{z},$$

c'est-à-dire la cubique aux pieds des normales issues du point (x_0, y_0, z_0) ; donc la quadrique S contient cette cubique. Elle contient de même la cubique relative à tout autre point de Δ, car le point (x_0, y_0, z_0) est un point quelconque de cette droite.

Tous les résultats que nous venons d'établir se voient facilement par la géométrie.

En effet, considérons d'abord une droite quelconque u et cherchons combien il y a de points μ sur cette droite. Soit m un point qui décrit la droite u ; le plan diamétral de om tourne alors autour

d'une droite et il engendre un faisceau de plans homographique au faisceau de rayons om; d'autre part, le rayon on perpendiculaire au plan (Δ, m) décrit un faisceau de rayons homographique au faisceau de plans (Δ, m), et celui-ci est homographique au faisceau de rayons om, puisqu'ils ont pour section commune la ponctuelle m. Le faisceau on est donc homographique au faisceau des plans diamétraux des rayons om; donc le rayon ou est situé deux fois dans le plan diamétral correspondant, et, par suite, le point mobile m sur la droite u, est deux fois un point du lieu. Le lieu du point μ est donc une surface du second ordre.

Considérons maintenant un plan quelconque P passant par la droite Δ et soit on la perpendiculaire abaissée du point o sur le plan P; les divers plans tangents qui correspondent au plan P enveloppent le cylindre circonscrit parallèlement à on, et leurs diamètres décrivent le plan diamétral de la direction on; soit Q ce plan; le lieu des points μ situés dans le plan P est donc la droite d'intersection des deux plans P et Q. En outre sur chaque plan P passant par la droite Δ, il y a ainsi un point de Δ, variable avec le plan P, qui appartient au lieu; donc la droite Δ tout entière appartient au lieu. Si on fait mouvoir le rayon $o\mu$ dans un plan quelconque passant par le point o, le plan diamétral de $o\mu$ décrit un faisceau de plans homographique au faisceau de rayons $o\mu$; le plan perpendiculaire à ce plan diamétral, mené par Δ, décrit donc aussi un faisceau de plans homographique au faisceau de rayons $o\mu$; le lieu du point μ, pour ce faisceau de rayons, est alors une conique. Cette conique dégénère en deux droites quand le rayon $o\mu$ qui rencontre Δ est dans le plan correspondant du faisceau Δ, c'est-à-dire quand le plan mené par le point o et la droite Δ est perpendiculaire au plan diamétral du rayon $o\mu$ qui rencontre Δ. Or cela a lieu pour une droite issue du point o et rencontrant Δ; cette droite est sur la surface et le lieu des points μ situé dans tout plan passant par cette droite se compose d'une droite passant au point o et d'une autre droite. Nous obtenons ainsi toutes les droites du système de Δ.

Pour que la quadrique S soit un paraboloïde hyperbolique, il faut que l'une des droites trouvées dans le plan P aille à l'infini; il faut donc que le plan diamétral du rayon on normal au plan P soit parallèle au plan P, c'est-à-dire soit un plan principal. Par conséquent il faut que la droite Δ soit dans un plan parallèle à un plan principal.

Si l'on considère maintenant tous les ellipsoïdes homothétiques et concentriques à l'ellipsoïde proposé, le lieu des pieds des normales abaissées d'un point de la droite Δ sur toutes ces surfaces est la cubique gauche aux pieds des normales issues de ce point; d'ailleurs il est visible que chacun de ces points est un point μ; car le plan (Δ, μ) est perpendiculaire au plan tangent à l'ellipsoïde qui passe en ce point et ce plan tangent est parallèle au plan polaire du point μ par rapport à l'ellipsoïde donné.

Quant au lieu de M correspondant au mouvement du point μ sur une de ces cubiques gauches, c'est l'intersection avec l'ellipsoïde du cône du second degré qui de l'origine projette la cubique considérée.

4° Les équations d'une deuxième droite passant au point (x_0, y_0, z_0) sont

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{v_1} = \frac{z - z_0}{w_1},$$

et la quadrique S_1 correspondante a pour équation

$$S_1 \equiv u_1 C_1 + v_1 C_2 + w_1 C_3 = 0;$$

elle coupe donc la première quadrique S suivant la cubique commune aux trois cylindres C_1, C_2, C_3. Ceci est évident d'ailleurs d'après ce qui précède.

Ces deux quadriques se coupent encore suivant une autre droite qu'il s'agit de déterminer. Pour cela il suffit de remarquer que pour tous les points de l'intersection de S et de S_1, autres que ceux de la cubique gauche du point (x_0, y_0, z_0), on n'a pas $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 = 0$; alors en résolvant les

deux équations $S = 0$ et $S_1 = 0$ par rapport à C_1, C_2, C_3, on en déduit

$$C_1 = \sigma(vw_1 - wv_1),$$
$$C_2 = \sigma(wu_1 - uw_1),$$
$$C_3 = \sigma(uv_1 - vu_1),$$

σ n'étant pas nul ; ou bien

$$\frac{y(z - z_0)}{b^2} - \frac{z(y - y_0)}{c^2} = \sigma u_0,$$

$$\frac{z(x - x_0)}{c^2} - \frac{x(z - z_0)}{a^2} = \sigma v_0,$$

$$\frac{x(y - y_0)}{a^2} - \frac{y(x - x_0)}{b^2} = \sigma w_0,$$

en posant $u_0 = vw_1 - wv_1$, $v_0 = wu_1 - uw_1$, $w_0 = uv_1 - vu_1$. En multipliant ces équations par $\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2}$ et ajoutant ; puis par $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ et ajoutant encore, on obtient les deux plans

$$(2) \qquad \begin{cases} u_0 \dfrac{x}{a^2} + v_0 \dfrac{y}{b^2} + w_0 \dfrac{z}{c^2} = 0, \\ u_0(x - x_0) + v_0(y - y_0) + w_0(z - z_0) = 0, \end{cases}$$

qui définissent la droite cherchée. Or si l'on remarque que u_0, v_0, w_0 sont les paramètres directeurs de la direction ON perpendiculaire au plan des deux droites Δ et Δ_1, on voit que le premier plan est le plan diamétral conjugué de cette direction, et le second, le plan (Δ, Δ_1). Ce résultat est d'ailleurs évident géométriquement, d'après ce qui a été dit plus haut sur le lieu des points μ qui sont placés dans un plan P.

Mais le calcul que nous venons de faire a une portée plus haute : en remarquant que

$$uu_0 + vv_0 + ww_0 = 0,$$

on voit de suite que les équations (2) ne contiennent qu'un seul paramètre variable, par exemple le rapport $\frac{u_0}{v_0}$, et représentent alors, sous une forme élégante, les équations générales des génératrices de S de l'autre système que Δ. Le premier plan (2) tourne autour de la droite $\frac{x}{a^2u} = \frac{y}{b^2v} = \frac{z}{c^2w}$ qui est la génératrice du même système que Δ et passant à l'origine.

5° Les équations de la droite D_1 sont

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\alpha}{a^2}(w(y - y_0) - v(z - z_0)) + \dfrac{\beta}{b^2}(u(z - z_0) - w(x - x_0)) + \dfrac{\gamma}{c^2}(v(x - x_0) - u(y - y_0)) = 0, \\ \dfrac{\alpha x}{a^2} + \dfrac{\beta y}{b^2} + \dfrac{\gamma z}{c^2} - 1 = 0. \end{cases}$$

Lorsqu'on exprime que la droite D_1 passe par un point donné (x, y, z), ces deux équations deviennent deux relations entre α, β, γ ; comme elles sont linéaires et que α, β, γ vérifient en outre l'équation du second degré

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - 1 = 0,$$

on voit qu'il y a deux solutions et que, par suite, deux droites D_1 passent au point choisi, d'ailleurs arbitrairement, (x, y, z).

On peut au surplus interpréter ces calculs d'une façon élégante : regardons α, β, γ comme étant des coordonnées courantes et x, y, z comme étant des nombres donnés ; les équations (2) repré-

sentent une droite dont il faut trouver les deux points de rencontre avec l'ellipsoïde ; les coordonnées de ces points constituent les deux solutions indiquées. On trouvera alors le lieu du point ω par où passent deux droites D_1 confondues, en exprimant que la droite que nous venons d'introduire est tangente à l'ellipsoïde ; or ceci peut se faire de plusieurs façons, en particulier, en cherchant les plans tangents conduits par cette droite et exprimant qu'ils coïncident. A cet effet, désignons par A, B, C les fonctions linéaires $w(y-y_0)-v(z-z_0)$, $u(z-z_0)-w(x-x_0)$, $v(x-x_0)-u(y-y_0)$; l'équation générale des plans passant par la droite auxiliaire est $\frac{x+t\mathrm{A}}{a^2}\alpha+\frac{y+t\mathrm{B}}{b^2}\beta+\frac{z+t\mathrm{C}}{c^2}\gamma-1=0$; la condition de contact avec l'ellipsoïde est

$$\frac{(x+t\mathrm{A})^2}{a^2}+\frac{(y+t\mathrm{B})^2}{b^2}+\frac{(z+t\mathrm{C})^2}{c^2}-1=0;$$

elle donne en général deux valeurs pour le paramètre t : ici ces deux valeurs doivent être confondues, et nous avons la condition

$$(4)\qquad \mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{A}^2}{a^2}+\frac{\mathrm{B}^2}{b^2}+\frac{\mathrm{C}^2}{c^2}\right)-\left(\frac{\mathrm{A}x}{a^2}+\frac{\mathrm{B}y}{b^2}+\frac{\mathrm{C}z}{c^2}\right)^2=0,$$

en désignant par E le premier membre de l'équation de l'ellipsoïde. Cette équation est l'équation du lieu demandé. Ce lieu est une surface du 4e degré qui admet la droite Δ comme lieu de points doubles, car les fonctions linéaires A, B, C, qui représentent les premiers membres des projections de Δ sur les plans de coordonnées, entrent dans cette équation partout au second degré.

Il résulte alors de là que tout plan passant par Δ coupe encore la surface suivant une conique ; cette surface est donc engendrée par une conique variable. Pour mettre en évidence cette conique variable, remarquons que l'on a $u\mathrm{A}+v\mathrm{B}+w\mathrm{C}\equiv 0$; déduisons de là $\mathrm{C}\equiv-\frac{u\mathrm{A}+v\mathrm{B}}{w}$, et portons cette valeur de C dans l'équation (4) ; cette équation deviendra homogène et du second degré en A et B, et alors en coupant par le plan variable $\mathrm{B}-\mathrm{A}\tau=0$, supprimant la solution $\mathrm{A}^2=0$, qui correspond à la droite double Δ, il restera une équation du second degré en x et y et aussi en τ, qui, avec l'équation $\mathrm{B}-\mathrm{A}\tau=0$, représentera le système des coniques que nous avons signalées.

Il reste à traiter géométriquement cette dernière partie. Considérons à cet effet un plan P passant par la droite Δ et cherchons le lieu des points ω situés dans ce plan. Pour qu'un point de ce plan soit point ω, il faut que par ce point passent deux plans tangents à l'ellipsoïde perpendiculaire au plan P et confondus. Or l'enveloppe des plans tangents à l'ellipsoïde et passant au point ω est le cône C_ω circonscrit à l'ellipsoïde et ayant pour sommet le point ω ; les plans tangents à ce cône et perpendiculaires au plan P s'obtiennent en menant ωn perpendiculaire au plan P et par ce rayon deux plans tangents à C_ω ; ces plans seront confondus si ωn est sur le cône C_ω, c'est-à-dire est une tangente à l'ellipsoïde. Les droites ωn sont donc les génératrices du cylindre circonscrit perpendiculaire au plan P. La trace de ce cylindre sur le plan P est le lieu des points ω de ce plan ; c'est une conique Γ_P. Le lieu total des points ω est engendré par cette conique, quand le plan P tourne autour de Δ ; il est donc visible déjà que la droite Δ fait partie du lieu. Cela posé, soit ω_1 un point de cette droite ; le plan perpendiculaire à Δ mené par ω_1 coupe l'ellipsoïde suivant une conique, à laquelle on peut mener deux tangentes du point ω_1, $\omega_1 n_1$ et $\omega_1 n_2$; le point ω_1 est donc donné deux fois, par les deux cylindres circonscrits à l'ellipsoïde et parallèles à $\omega_1 n_1$ et $\omega_1 n_2$. Chaque point de la droite Δ est donc point double et le lieu total des points ω est une surface du 4e ordre.

Il y a beaucoup d'autres remarques géométriques à faire à propos de cette question. Nous laissons au lecteur le soin de les apercevoir.

Très bonnes solutions géométriques : MM. E. Bally (collège Stanislas) ; Barthe (lycée de Bar-le-Duc) ; C. Lefierce (lycée de Douai).

Bonnes solutions géométriques : MM. E. Berthelot ; G. de France (à Versailles).

Bonnes solutions analytiques : MM. G. de France (Versailles) ; Auzeram (Montpellier).

Solution analytique et géométrique : M. E. Barré (Douai).

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

427. — *Un tore à axe vertical a son centre : 1° à 140^{mm} du bord droit de la feuille ; 2° à 180^{mm} du bord inférieur en projection horizontale, et à 310^{mm} du même bord en projection verticale. Le cercle méridien a 28^{mm} de rayon, et son centre est à 68^{mm} de distance de l'axe du tore.*

Une sphère de 24^{mm} de rayon touche l'axe du tore à 40^{mm} au-dessus du centre de celui-ci. En projection horizontale le centre de cette sphère est sur la bissectrice de l'angle de deux droites issues du centre du tore, l'une de front dirigée vers la gauche, l'autre de bout dirigée vers le haut de la feuille.

A cette sphère est circonscrit un cône dont le sommet est sur l'axe du tore, à 93^{mm} au-dessus du centre de celui-ci.

On demande de représenter par ses projections la partie du tore supposé plein qui est intérieure au cône. — La courbe d'intersection des deux surfaces sera en traits noirs pleins pour les parties vues, en points noirs ronds pour les parties cachées.

On indiquera en traits rouges la construction : 1° d'un point quelconque de la courbe et de la tangente en ce point ; 2° d'un point de la courbe choisi sur chacun des contours apparents circulaires du tore ; 3° de la sphère, ainsi que des parties du tore et du cône en dehors de l'intersection.

Ecole Polytechnique, concours de 1895.)

Soient (ω, ω') les projections de la sphère tangente au point (o, π') à l'axe vertical $(o, o'z')$ du tore. Le cône de sommet (o, s') circonscrit à la sphère a pour contour apparent vertical les deux tangentes au cercle ω' issues de s'.

Les deux surfaces admettant un plan vertical de symétrie, la trace horizontale $o\omega$ de ce plan est un axe de symétrie de la projection horizontale de l'intersection. Comme d'ailleurs une partie des génératrices du cône voisines de la génératrice verticale $(o, s'o')$ ne rencontrent pas le tore, il n'y a ici qu'une courbe d'intersection, tangente aux deux génératrices limites du cône.

Détermination d'un point quelconque de l'intersection. — Tout plan vertical mené par l'axe du tore coupe cette surface suivant deux cercles méridiens et le cône suivant deux génératrices tangentes au petit cercle de la sphère (ω, ω') situé dans ce plan. L'une de ces génératrices se confond avec l'axe du tore, avec lequel elle n'a par suite aucun point commun ; l'autre coupe l'un des deux cercles méridiens en deux points que nous allons déterminer.

Soit ok la corde déterminée par la trace horizontale du plan auxiliaire considéré dans le cercle ω. Si l'on amène ce plan vertical à être de front par une rotation autour de l'axe $(o, o'z')$, le cercle méridien est figuré verticalement par le cercle c', et le petit cercle de la sphère par le cercle $\pi'k'_0$ tangent en π' à $o'z'$ et dont le diamètre est égal à ok : la tangente à ce dernier cercle menée par (s, s') rencontre généralement le cercle (c, c') en deux points. Soit (m_0, m'_0) un de ces points ; en amenant ce point sur ok, on a en (m, m') les projections de l'un des points de l'intersection.

Tangente au point (m, m'). — Cette tangente est perpendiculaire au plan des normales menées en ce point aux deux surfaces.

La normale en (m, m') au tore perce le plan de l'équateur au point n_1, intersection de om avec le cercle o passant par c.

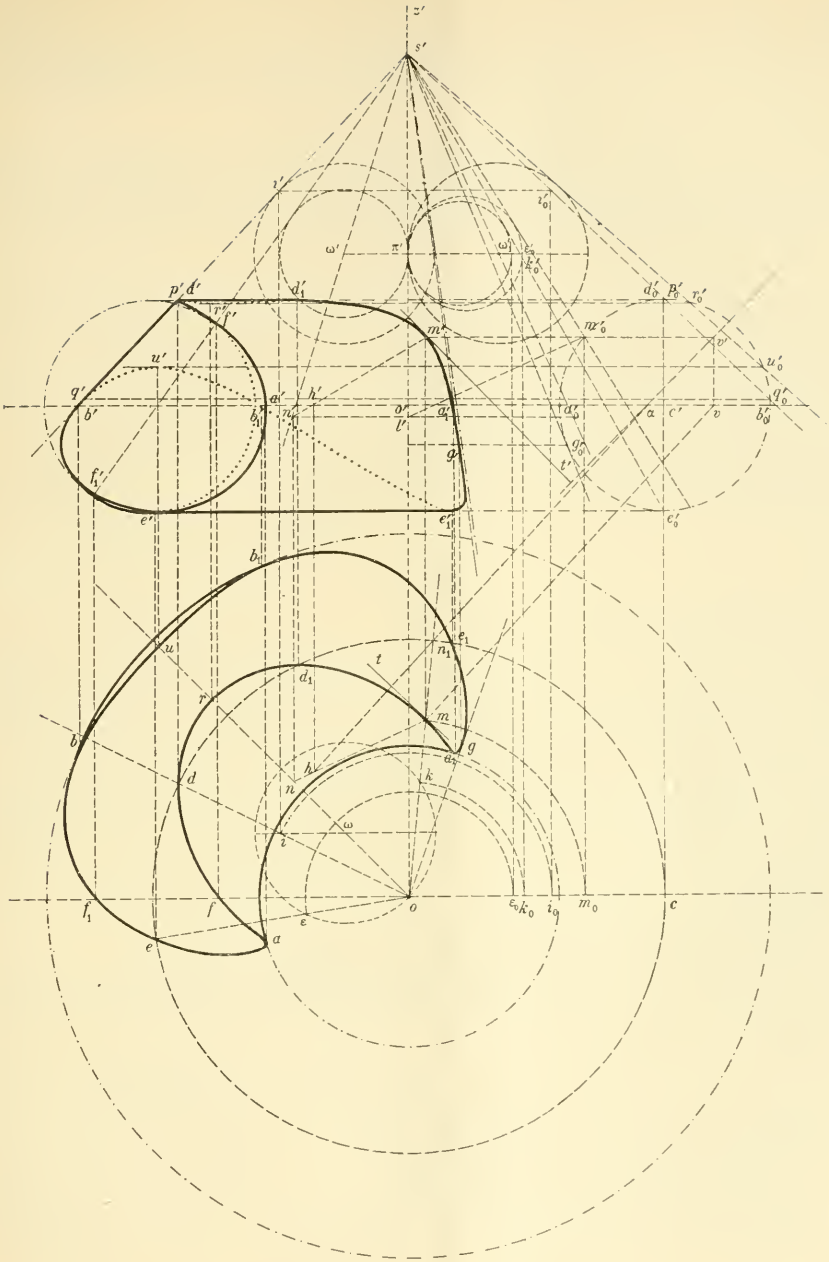
La normale en (m, m') au cône rencontre l'axe $(s\omega, s'\omega')$ de ce cône au même point (n, n') que la normale au point (o, l'), intersection de la génératrice verticale $(o, o's')$ avec le plan perpendiculaire à l'axe mené par le point (m, m'). La normale $(mn, m'n')$ a pour trace horizontale sur le plan de l'équateur le point (h, h') ; hn_1 est donc la trace sur ce plan du plan des normales, et en abaissant sur cette trace la perpendiculaire mt, cette droite est la tangente en m à la projection horizontale de l'intersection. D'ailleurs le plan des normales coupe le plan vertical défini par la ligne de terre $h'o'$ suivant la trace $\alpha x'$ sur laquelle il ne reste plus qu'à mener la perpendiculaire $m't'$, qui est tangente en m' à la projection verticale.

Points remarquables de l'intersection :

1° *Sur les contours apparents du tore.*

Ces points s'obtiennent en ramenant à leur position primitive les génératrices de front $s'a'_0$, $s'b'_0$, $s'd'_0$, $s'e'_0$; on obtient ainsi deux points tels que (a, a') et (b, b') sur le contour apparent horizontal et deux points tels que (d, d') et (e, e') sur le contour apparent vertical.

Considérons par exemple la génératrice projetée en $s'e'_0$; on trace le cercle de diamètre $\pi'\varepsilon'_0$ tangent à cette génératrice, puis on reporte $o\varepsilon_0$ en $o\varepsilon$ sur le cercle ω ; l'intersection de $o\varepsilon$ avec le cercle oc détermine e, et on en déduit e' par une ligne de rappel.


z'
s'
i'
i_0'
ω'
π'
ω
k_0'
p' d'
d_1'
d_0'
B_0'
r_0'
r'
f'
m'
m_0'
v'
v_0'
u'
q'
b'
b_1'
a'
h'
o'
l'
a_1'
d_0'
a
c'
v
b_0'
q_0'
q_1'
g_0'
t'
f_1'
e'
e_1'
c_0'
b_1
n_1
e_1
u
t
d_1
r
m
b
g
a_1
d
h
k
n
ω
i
f_1
f
o
$\varepsilon_0 k_0$
i_0
m_0
c
ε
e
a

Les points situés sur le méridien de front sont déterminés par la tangente $s'f'f'$ au cercle de front $\omega'\pi'$ de la sphère.

2° *Sur le contour apparent vertical du cône.*

La génératrice projetée suivant le contour apparent $s'i'$ touche la sphère (ω, ω') en un point (i, i') du grand cercle de front de cette sphère; en appliquant alors la construction générale à la génératrice $(si, s'i')$, on obtient deux points de l'intersection projetés verticalement en p' et q' sur $s'i'$.

En répétant la même construction sur la seconde génératrice de contour apparent, on reconnaît qu'elle n'a aucun point commun avec le tore.

3° *Sur les génératrices limites du cône.*

Ces génératrices sont celles qui sont tangentes au tore; elles correspondent évidemment à la génératrice de front $s'g'_0$ tangente au cercle c'. Ces deux génératrices sont tangentes à l'intersection; une seule $(og, s'g')$ est figurée sur l'épure.

En appliquant la construction générale à la génératrice projetée horizontalement suivant $o\omega$, on obtient les points (r, r') et (u, u') pour chacun desquels la tangente à l'intersection est horizontale.

Ponctuation. — En projection horizontale, les parties vues du solide commun sont la portion $adrd_1b_1uba$ de la surface du cône et les deux portions ara_1a et bub_1b de la surface supérieure du tore; il en résulte que toutes les lignes de contour de la projection horizontale sont vues et doivent être figurées en trait plein.

En projection verticale, les parties vues du solide commun sont la portion $p'a'e'q'$ de la surface du cône, et sur la surface du tore, la portion externe $e'f'$ et la portion interne $d'a'e'e'_1a_1d'_1d'$; les lignes de contour de ces trois portions seront donc en trait plein et les autres lignes en pointillé.

LOUIS MESSENT.

PHYSIQUE

Concours pour les Bourses de licence ès sciences physiques (1895).

472. — *Deux traits parallèles* A *et* B, *distants de* $0^{mm},1$, *sont regardés à travers un microscope composé à oculaire positif. Dans le plan vu nettement par cet oculaire peut être déplacé un fil de réticule au moyen d'une vis micrométrique. On amène successivement ce fil en coïncidence avec les images* a *et* b *des traits* A *et* B, *et on trouve qu'il faut pour passer d'une position à l'autre déplacer ce fil de* $1^{mm},9$.

Après avoir allongé de 5^{cm} *la longueur du tube du microscope, on met de nouveau au point les deux traits* A *et* B, *et l'on répète la même opération : le déplacement du fil du réticule pour passer de l'image* a *à l'image* b *est trouvé égal à* $2^{mm},4$.

La distance du plan des deux traits A *et* B *au plan* ab *du fil du réticule est dans ce dernier cas égale à* $26^{cm},35$.

On demande :

1° *Quelle est la distance focale de l'objectif ;*

2° *Quelle est la distance des deux plans principaux de cet objectif ;*

3° *Si l'oculaire employé a une puissance de* 30 *dioptries, quelle est en dioptries la puissance du microscope composé pour la dernière longueur du tube.*

Soient, d'une manière générale,

x et y les valeurs absolues des distances conjuguées par rapport à l'objectif dans la première position,

x' et y' les valeurs analogues pour la seconde position,

f la distance focale de l'objectif, en valeur absolue,

g et g' les grossissements successifs de l'objectif,

e la distance de ses deux plans principaux,

d l'allongement du tube entre la première et la seconde position,

D la distance de l'objet à son image objective dans le second cas.

Les formules générales des lentilles, appliquées à l'objectif, donnent

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{f}, \qquad \frac{1}{x'}+\frac{1}{y'}=\frac{1}{f},$$

$$\frac{y}{x}=g, \qquad \frac{y'}{x'}=g'.$$

L'image objective se fait, dans le second cas, à la même distance de l'oculaire que dans le premier, puisqu'on met au point ; l'allongement du tube représente donc le déplacement de l'image objective :

$$y'=y+d.$$

Enfin on a

$$D=x'+e+y'.$$

L'élimination de x, y, x' et y' entre les cinq premières équations donne

$$f=\frac{d}{g'-g}.$$

La dernière, quand on y remplace x' et y' par leurs valeurs, donne

$$e=D-\frac{(g'+1)^2}{g'}f.$$

Enfin, la puissance P de l'instrument est égale, comme on sait, au produit de la puissance p de l'oculaire par le grossissement de l'objectif :

$$P=pg'.$$

L'application numérique donne

$$f=1^{cm}, \qquad e=0^{cm},31, \qquad P=720.$$

A. LAUREAUX, lycée de Besançon.

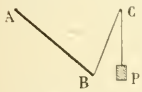
M. Caussé, à Castres, a également résolu cette question.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

Ecole normale supérieure 1895.

98. — Calculer $\sin\frac{a}{3}$ connaissant $\cos a$. — Pouvait-on voir *a priori* que l'on devait arriver à une équation du 6e degré ? — Pourquoi les valeurs de $\sin\frac{a}{2}$ données par cette équation sont-elles deux à deux égales et de signes contraires ? — Pourrait-il se faire que, pour certaines valeurs de a, cette équation ait des racines doubles ?

99. — Que représente l'équation $\alpha xy+\beta yz+\gamma zx=0$ suivant les positions du point α, β, γ dans l'espace ?



100. — Un corps peut tourner autour d'un axe fixe. Conditions d'équilibre de plusieurs forces agissant sur ce corps.

Application : on considère une tige AB mobile dans le plan vertical autour de son extrémité A ; en B est attaché un fil qui s'enroule sur une petite poulie C qui est située sur l'horizontale passant par A. Le fil est tendu par un poids P. Trouver la position d'équilibre.

101. — Un cône du second degré a son sommet à l'origine ; par un point de l'espace on peut mener deux plans tangents à ce cône. Former l'équation du système de ces plans.

102. — La série $\frac{x}{1}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^9}{3}+\ldots\frac{x^{n^2}}{n}$ est-elle divergente ou convergente ? cas où $x=1$.

103. — Construire la courbe $(x+y)(xy+1)=x^2+y^2$.

104. — On considère une famille de surfaces homofocales $\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1$, et les plans polaires d'un point fixe par rapport à ces surfaces. Combien passe-t-il de ces plans par un point donné de l'espace ? Y a-t-il des points tels que les trois plans polaires passant par ce point forment un trièdre trirectangle ?

105. — Une surface du second degré est-elle déterminée quand on se donne un cercle sur la surface et un axe de symétrie ?

106. — On considère l'équation $x^5+px^3+q=0$. Combien cette équation a-t-elle de racines réelles ?

107. — Construire la courbe $x^3y^4+(x-y)^2=0$.

108. — On coupe la surface $z = xy$ par un plan parallèle à l'axe des z. Quelle est la section obtenue ? En trouver l'axe.

109. — $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, $S = 0$ étant les équations de quatre plans, que représente l'équation $\varphi\left(\frac{P}{Q}, \frac{R}{S}\right) = 0$?

110. — Limite de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ pour $m = \infty$.

111. — Supposons que $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ représente une hyperbole. Comment obtiendra-t-on l'équation de l'hyperbole conjuguée ? — Montrer que les termes du premier et du second degré sont les mêmes dans les deux équations.

112. — Etant donnée une équation algébrique, comment reconnaît-on si elle a des racines multiples ?

113. — Une hyperbole est-elle déterminée quand on donne une asymptote, le centre et un point d'une directrice. Equation générale de ces hyperboles ; lieu des foyers.

114. — Construire la courbe $\frac{x^3}{1-x} = \frac{y^3}{1-y}$.

115. — Trouver l'équation d'un cône circonscrit à un ellipsoïde donné et ayant pour sommet un point donné. — Lieu du sommet d'un cône circonscrit à l'ellipsoïde et qui couperait un plan donné suivant une parabole.

116. — Calculer les racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$. — Comment trouve-t-on le nombre des racines réelles de l'équation du 3e degré ?

117. — Etant données deux droites non dans un même plan et leur perpendiculaire commune, soit P un plan fixe passant par cette perpendiculaire. On mène, parallèlement à P, un plan variable P′ qui coupe les deux droites données en deux points A et B. On trace sur AB comme diamètre et dans le plan P′ un cercle. Quelle est la surface engendrée par ce cercle lorsque P′ se déplace parallèlement à P ?

118. — Etant donnée l'équation $x^3 + px + q = 0$ dont les racines sont a, b, c. Je pose $y = \frac{a^3 + b^3}{ab}$. De quel degré sera l'équation en y ?

119. — Décomposer une fraction rationnelle en fractions simples.

120. — Transformer le produit $\cos a \cos\left(a + \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(a + \frac{4\pi}{3}\right)$ en une somme de lignes trigonométriques ; ne connaissez-vous pas une équation qui conduit à considérer une quantité de la même forme ?

121. — Une surface de révolution du second degré est-elle déterminée par la condition de passer par deux droites données ? Lieu de l'axe.

122. — Que représente l'équation $x^2 + y^2 + z^2 + 2\lambda yz + 2\mu xy = 0$, suivant les positions dans le plan des xy du point dont les coordonnées sont λ et μ ? — Trouver les axes de cette surface. N'y en a-t-il pas un qui est en évidence ?

123. — Ramener l'intégrale $\int f(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\,dx$ à celle d'une fraction rationnelle. — Cela serait-il possible si, sous le radical, on avait un polynome en x^3 ?

124. — Soit $\int \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)}}$. Ramener cette intégrale à celle d'une fraction rationnelle.

125. — Si on avait, sous le radical, un polynome du 3e degré, pourrait-on intégrer ?

126. — Déterminer les points d'inflexion de la courbe $y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$. — Combien y en a-t-il de réels ?

127. — On a dans l'espace deux droites qui ne se coupent pas. On considère les paraboloïdes hyperboliques passant par ces deux droites et dont les plans directeurs sont perpendiculaires. Ces conditions suffisent-elles pour déterminer ces paraboloïdes ?

128. — Résoudre les équations $y^3 - z^3 = a$, $yz = b$.

129. — Soit la cubique $x^3 + y^3 - xy = 0$. Trouver les tangentes menées à cette cubique par un point α, β du plan. — Former l'équation générale des coniques passant par les points de contact.

130. — On considère la série dont le terme général est $\frac{1}{n^p}$, p étant un nombre entier positif. Est-elle divergente ou convergente ?

131. — On considère la courbe gauche dont les coordonnées sont $x = \frac{t^3}{t^4 + 1}$, $y = \frac{t^2}{t^4 + 1}$, $z = \frac{t}{t^4 - 1}$; on la coupe par un plan parallèle au plan des xz. En combien de points ce plan rencontre-t-il la courbe ? Démontrer que ces points sont les sommets d'un parallélogramme.

Trouver la surface engendrée par les quatre côtés du parallélogramme quand le plan variable se déplace parallèlement au plan des xz. — Par deux des sommets du parallélogramme on mène des tangentes à la courbe gauche donnée. Démontrer que ces tangentes sont dans un même plan.

132. — Condition pour qu'un plan soit tangent à une quadrique donnée par son équation ponctuelle. Que devient cette condition lorsque la quadrique est un cône ou un couple de plans ? Quelles sont, dans ces cas, les équations tangentielles véritables ?

133. — On donne $\operatorname{tg} y = \alpha \operatorname{tg} x$. Démontrer que cette équation définit une fonction $y = f(x)$ continue pour toutes les valeurs de x et qui s'annule pour $x = 0$. Trouver la dérivée de cette fonction.

Application : Calculer $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a \cos^2 x + b \sin^2 x}$ où a et b sont des constantes.

134. — Construire une parabole connaissant quatre tangentes. Dans quel ordre doit-on numéroter les sommets de l'hexagone de Brianchon pour que le théorème de Brianchon soit applicable ?

QUESTIONS PROPOSÉES

501. — On considère le réseau des coniques bitangentes à une conique fixe (C) et passant par un point fixe A ; on demande :

1° Le lieu du point de rencontre de la tangente en A avec la corde des contacts ;

2° De montrer que si l'on assujettit la corde des contacts à passer par un point fixe P, les coniques passent par un second point fixe B ;

3° De trouver le lieu du point B quand le point A décrit une conique donnée. E. Berthelot.

502. — Par un point A d'une ellipse, on mène les trois normales autres que la normale en A, AP, AQ, AR ; soient P, Q, R les pieds de ces normales. On mène en outre les tangentes à l'ellipse en ces points et l'on considère les quatre cercles tangents à ces trois droites, C_1, C_2, C_3, C_4 ; soient T_1, T_2, T_3, T_4 les autres tangentes communes à l'ellipse et à ces cercles. Démontrer que le quadrilatère $T_1T_2T_3T_4$ est circonscriptible à un cercle et trouver le lieu du centre de ce cercle quand le point A décrit l'ellipse. Vasnier.

503. — Un cône de révolution de 1/2 angle au sommet 50° a son axe vertical et sa directrice dans le plan horizontal de projection est tangente à xy. Son sommet S a pour cote $7^{cm},5$.

Par S on mène la droite de profil SA dont la trace horizontale A a pour éloignement 22^{cm}.

Un second cône de révolution, dont l'axe est debout, a son sommet Σ sur SA. Son 1/2 angle au sommet est 45° et Σ a pour éloignement 12^{cm}.

Représenter le solide commun à ces deux cônes en le limitant aux deux plans de projection.

N. C.

504. — Un pendule OM, mobile autour du point O, est constitué par un fil fin de longueur l et par une petite boule M de masse m. A cette petite boule est attaché un autre fil flexible qui passe sans frottement dans un anneau très petit, A, et porte à son extrémité un corps de masse M ; l'anneau A est situé sur la verticale du point O et la distance OA est égale à $l + L$. Calculer la durée d'une petite oscillation du pendule.

505. — Les températures étant évaluées avec le thermomètre à hydrogène, le coefficient moyen de dilatation du mercure de 0° à t° est donné par la formule empirique

$$m = a + bt, \qquad a = 179 \times 10^{-6}, \qquad b = 2522 \times 10^{-11},$$

et le coefficient de dilatation du verre par la formule

$$k = \alpha + \beta t, \qquad \alpha = 26 \times 10^{-6}, \qquad \beta = 1475 \times 10^{-11}.$$

On demande quelle est, à 300° du thermomètre à hydrogène :

1° La température t' qui serait indiquée par un thermomètre fondé sur la dilatation réelle du mercure ;

2° La température t'' indiquée par un thermomètre à mercure ordinaire.

DEUXIÈME PARTIE

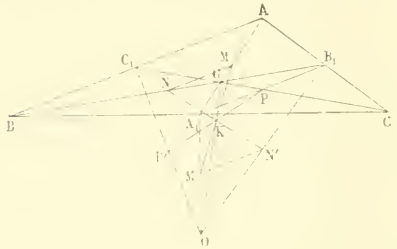
GÉOMÉTRIE ET GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

469. — *Dans un triangle quelconque* ABC, *on mène les trois médianes* AA_1, BB_1, CC_1, *et les perpendiculaires aux milieux des côtés* OA_1, OB_1, OC_1, *; puis on prend les milieux des six segments ainsi obtenus:* M, N, P, *milieux de* AA_1, BB_1, CC_1, ; M′, N′, P′, *milieux de* OA_1, OB_1, OC_1. *Démontrer que l'on a*

$$MM' = NN' = PP' = \frac{R}{2},$$

R *désignant le rayon du cercle circonscrit ; que* MM′, NN′, PP′ *concourent en un point* K *qui est leur milieu, et que par suite les six points sont sur un cercle de rayon* $\frac{R}{4}$. *Enfin montrer que le point* K *est situé sur la droite qui joint le centre du cercle circonscrit au centre de gravité* G, *entre ces deux points, et que l'on a* 4KG = OG.

La droite MM′ joignant les milieux des portions de droites A_1A et A_1O, on voit immédiatement que le segment MM′ est parallèle à AO et en est la moitié : on verrait de même que NN′ et PP′ sont les moitiés respectives de OB et OC. Les trois segments MM′, NN′, PP′ sont donc bien égaux entre eux et à la moitié du rayon du cercle circonscrit.



D'autre part, les trois droites AA_1, BB_1, CC_1 se coupent au centre de gravité G du triangle et on a, en particulier, $GA = \frac{2}{3} A_1A$, $GB = \frac{2}{3} B_1B$, et, comme MA et NB sont les moitiés de A_1A et B_1B, on en conclut que GM et GN sont les sixièmes parties de A_1A et B_1B et les quarts de GA et GB ; il en résulte que MN est parallèle à AB et égal au quart de AB ; de même M′N′ est la moitié de A_1B_1, c'est-à-dire le quart de AB ; donc la figure MNM′N′ est un parallélogramme et, par suite, les deux diagonales MM′ et NN′ se coupent en leur milieu K ; pour une raison semblable, le segment PP′ passe au milieu commun de MM′ et NN′ et admet ce point pour milieu. Les six points M, M′, N, N′, P, P′ sont donc sur un cercle ayant ce point K pour centre et pour rayon $\frac{R}{4}$. Il est en outre évident que ce cercle est le cercle des neuf points des triangles OA_1B_1, OA_1C_1, OB_1C_1.

Enfin, puisque GM, GN et GP sont les quarts de GA, GB, GC, le triangle MNP est homothétique direct du triangle ABC, le centre d'homothétie étant le point G et le rapport d'homothétie étant égal à $\frac{1}{4}$; le cercle que nous venons de trouver est donc homothétique du cercle circonscrit au triangle ABC, par rapport au point G et dans le rapport $\frac{1}{4}$; les trois points G, K et O sont donc en ligne droite et l'on a GO = 4GK, ce qu'il fallait prouver.

J. BLANDIN, à Melay.

Ont résolu la question : MM. E. N. Barisien ; J. Goujon, Malplat (pensionnat de Valbenoite, à Saint-Etienne) ; A. Langlois (pensionnat Sainte-Marie, à Saint-Etienne) ; J. Lhériaud (lycée de Toulouse ; G. de France (Versailles ; J. Mossery ; G. Sugot ; F. Pégorier répétiteur au collège de Cette ; E. Bally (collège Stanislas) ; Jorge F. d'Avillez de Reguengo ; J. Blandin à Melay).

---

470. — *On considère toutes les coniques ayant des directions asymptotiques et un foyer donnés, et on demande :*

1° L'enveloppe de la directrice correspondant à ce foyer ;

2° Le lieu du second foyer.

1° Les directrices de ces coniques étant perpendiculaires aux axes sont parallèles aux bissectrices des directions asymptotiques données.

2° Le lieu du second foyer se compose des parallèles à ces bissectrices menées par le foyer donné.

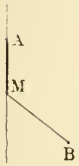
E.-N. BARISIEN.

Solutions identiques par : MM. Blazy-Lacombe, lycée de Toulouse ; Louis-Joseph Gorjon, pensionnat de Valbenoite, à Saint-Etienne ; J. Guiraud, lycée Saint-Louis ; Joseph Lhériaud, lycée de Toulouse ; Sugot, lycée Saint-Louis.

---

453. — *On donne un point* A *sur une droite et un point* B *en dehors de cette droite ; un mobile va de* B *en* A *par les segments de droite* BM *et* MA, *avec les vitesses respectives* v *et* v'. *Trouver les variations du temps employé.*

Prenons pour axe des x la droite AM et pour axe des y une perpendiculaire à cette droite menée par le point A, les directions de ces axes étant choisies de telle sorte que les coordonnées du point B, a et b, soient positives.



Nous avons à étudier les variations de la fonction

$$y = \frac{\mathrm{BM}}{v} + \frac{\mathrm{MA}}{v'}$$

quand le point M décrit l'axe des x.

1° *Supposons d'abord* $x > 0$. — Nous avons

$$y = \frac{\sqrt{(x-a)^2 + b^2}}{v} + \frac{x}{v'};$$

cette fonction est continue pour toutes les valeurs de x. Prenons la dérivée ; nous obtenons

$$y' = \frac{x-a}{v\sqrt{(x-a)^2+b^2}} + \frac{1}{v'}.$$

Si x est plus grand que a, y' est sans cesse positive, y va en croissant.

Soit maintenant $x < a$; nous pouvons écrire

$$y' = \frac{v\sqrt{(x-a)^2+b^2} + v'(x-a)}{vv'\sqrt{(x-a)^2+b^2}}$$

ou

$$y' = \frac{b^2v^2 - (v'^2 - v^2)(x-a)^2}{vv'\sqrt{(x-a)^2+b^2}\left[v\sqrt{(x-a)^2+b^2} - v'(x-a)\right]},$$

et dans notre dernière hypothèse, le dénominateur de y' est positif, par conséquent y' a le signe du numérateur.

Si $v^2 - v'^2$ est positif, le numérateur de y' est positif, y croît.

Si $v^2 - v'^2$ est négatif, le numérateur de y' peut s'écrire

$$\left[bv - \sqrt{v'^2 - v^2}(x-a)\right]\left[bv + \sqrt{v'^2 - v^2}(x-a)\right];$$

le premier facteur est positif, puisque $x - a < 0$; le second s'annule pour $x = a - \frac{bv}{\sqrt{v'^2 - v^2}}$, et cette valeur n'est à considérer que si elle est positive.

Nous pouvons résumer ce qui précède de la façon suivante :

Si l'on a en même temps

$$v < v', \qquad a > \frac{bv}{\sqrt{v'^2 - v^2}},$$

la fonction y a un minimum pour $x = a - \frac{bv}{\sqrt{v'^2 - v^2}}$: elle décroît quand x croît de 0 à $a - \frac{bv}{\sqrt{v'^2 - v^2}}$, et elle croît quand x croît de $a - \frac{bv}{\sqrt{v'^2 - v^2}}$ à $+\infty$.

Dans tous les autres cas, y va sans cesse en croissant quand x croît de 0 à $+\infty$.

2° *Supposons* $x < 0$. — La fonction à étudier est alors

$$y = \frac{\sqrt{(x-a)^2+b^2}}{v} - \frac{x}{v'},$$

x désignant toujours l'abscisse du point M, et nous avons

$$y' = \frac{x-a}{v\sqrt{(x-a)^2+b^2}} - \frac{1}{v'}.$$

Or, x étant négatif, y' est négative quel que soit x, il en résulte que la fonction y est sans cesse décroissante.

Conséquences. — Si l'on a

$$v < v', \qquad a > \frac{bv}{\sqrt{v'^2 - v^2}},$$

la variation de y est donnée par le tableau suivant

x	$-\infty$	croît	0	croît	$a - \frac{bv}{\sqrt{v'^2-v^2}}$	croît	$+\infty$
y	$+\infty$	décroît	$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{v}$	décroît	$\frac{b\sqrt{v'^2-v^2}+av}{vv'}$	croît	$-\infty$

Dans tous les autres cas, nous avons

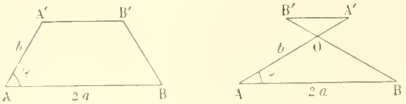
x	$-\infty$	croît	0	croît	$+\infty$
y	$+\infty$	décroît	$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{v}$	croît	$+\infty$

ALGÈBRE

476. — *On demande de déterminer un trapèze isocèle dont on connaît la base $2a$ et les côtés égaux b de manière à rendre sa surface aussi grande que possible.*

(*École des Ponts et Chaussées, Cours préparatoires, 1895.*)

Nous regarderons $2a$ et b comme étant des nombres essentiellement positifs ; il n'y a aucun intérêt à étendre la question en supposant que a et b puissent être négatifs. Nous désignerons par φ l'angle que fait AA' avec AB ; nous aurons évidemment tous les cas de figure en faisant varier φ de 0 à π.



Cela posé, dans le cas d'un trapèze ordinaire, nous aurons

$$\frac{AB'}{2} = a - b\cos\varphi,$$

et, pour hauteur du trapèze, $b\sin\varphi$; l'aire de ce trapèze est donc $b\sin\varphi\,(2a - b\cos\varphi)$. Nous aurons donc la formule

$$A = b^2 \sin\varphi\,(k - \cos\varphi),$$

en désignant par A l'aire du trapèze et par k le rapport $\frac{2a}{b}$. Pour que cette formule reste vraie dans le cas de la seconde figure, il faut désigner par A la différence entre les aires des triangles OAB et OA'B'. C'est ce que nous appellerons alors l'aire du trapèze pour conserver un sens géométrique uniforme et précis à l'égalité précédente.

Proposons-nous maintenant de trouver les maxima et minima de la fonction A ; pour cela annulons sa dérivée par rapport à φ ; nous aurons ainsi

$$A'_\varphi = b^2\,[\cos\varphi\,(k - \cos\varphi) + \sin^2\varphi] = 0,$$

ou

$$2\cos^2\varphi - k\cos\varphi - 1 = 0.$$

Cette équation du second degré en $\cos\varphi$ a ses deux racines réelles,

$$\cos\varphi_1 = \frac{k - \sqrt{k^2 + 8}}{4},$$

$$\cos\varphi_2 = \frac{k + \sqrt{k^2 + 8}}{4};$$

la première est négative et toujours comprise entre -1 et 0 : ce dernier point s'aperçoit aisément en substituant à $\cos\varphi$, -1 et 0, dans l'équation envisagée : la seconde est positive, et, pour qu'elle soit comprise entre 0 et 1, il faut qu'en faisant $\cos\varphi = 1$ dans l'équation en $\cos\varphi$, le résultat obtenu soit positif ; on trouve ainsi $1 - k > 0$ ou $k < 1$.

Prenons alors la dérivée seconde: nous aurons $A''_\varphi = \sin\varphi\,(4\cos\varphi - k)$. Pour tout angle compris entre 0 et π, le premier facteur, $\sin\varphi$ est positif : donc, pour $\varphi = \varphi_1$, la dérivée seconde est négative et cette valeur de φ, donne un maximum. Si $k < 1$, c'est-à-dire si l'angle φ_2 existe, la dérivée seconde est positive pour $\varphi = \varphi_2$ et A acquiert alors un minimum. Si $k = 1$, $\cos\varphi_2 = 1$, l'angle φ_2 est nul et le minimum de A est nul. Si $k > 1$, l'angle φ_2 n'existe pas, il n'y a pas de minimum algébrique proprement dit ; cependant lorsque φ varie de 0 à φ_1, la dérivée première est positive et la fonction croissante ; on peut donc dire encore qu'au point de vue où nous nous sommes placés, la fonction A a pour minimum 0. Quand les deux angles existent à la fois, l'angle φ_2 est aigu, l'angle φ_1 toujours obtus; le minimum a donc lieu avant le maximum, quand φ croît de 0 à π.

A. CAUSSÉ, à Castres.

Ont traité la question : MM. J. Blandin, à (Melay) ; H. Bonnard (surveillant général au lycée de Bordeaux).

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

ÉCOLE CENTRALE (1894)

Géométrie analytique. (M. Gouilly.)

Géométrie analytique à trois dimensions.

143. — a', a'', a''' désignant les projections d'une aire plane A sur les trois plans de projection supposés rectangulaires, prouver qu'on a $A^2 = a'^2 + a''^2 + a'''^2$.

144. — Qu'exprime la relation $\cos a \cos a' + \cos b \cos b' + \cos c \cos c' = 1$?

Montrer qu'elle est suffisante pour exprimer que deux droites sont parallèles.

145. — Démontrer que si une droite est perpendiculaire sur un plan, ses projections sont perpendiculaires aux traces de même nom du plan.

146. — Distance de l'origine à la droite $x = 2z + 5$, $y = 2z - 6$.

147. — Distance d'un point de l'axe Oz à la droite $y = mx + p$, $z = 0$.

148. — Équation d'un cylindre de révolution de rayon R et dont l'axe a pour équations $\frac{x-a}{\alpha} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-c}{\gamma}$.

149. — Équation d'un cône ayant pour sommet un point A donné sur Oz et pour directrice l'ellipse donnée par les équations $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, $z = 0$.

150. — Équation du cône engendré par la droite $y = 0$, $z = mx + p$, en tournant autour de Oz.

151. — On donne dans le plan des xz une circonférence dont le centre est sur Ox. Équation de la surface engendrée en tournant autour de Oz.

152. — On donne la droite représentée par les équations $x = az + p$, $y = bz + q$.

Equation de la surface engendrée par une droite qui s'appuie constamment sur la droite proposée et sur l'axe Oz, en restant parallèle au plan xOy.

153. — Relations entre les coefficients directeurs des diamètres conjugués dans l'ellipsoïde.

154. — Deux quadriques qui ont deux plans tangents communs se coupent suivant deux courbes planes.

155. — Equation générale des quadriques qui sont coupées par le plan des xy suivant la conique

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx = 0.$$

156. — On donne trois axes rectangulaires et dans le plan zOx une parabole ayant Ox pour axe et Oz pour tangente au sommet. Equation de la surface engendrée par une deuxième parabole se déplaçant parallèlement au plan xOy de manière que son axe soit parallèle à Ox et que son sommet soit constamment sur la première.

157. — Equation de la tangente à une courbe gauche. — Tangente en un point de la courbe

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \qquad lx + my + nz + p = 0.$$

Même question pour la courbe

$$x^2 + y^2 = R^2, \qquad y = \cos z.$$

Géométrie. (M. Appell.)

158. — Trouver dans le plan d'un triangle un point d'où on voie les trois côtés sous le même angle.

159. — Déduire la propriété des hauteurs d'un triangle (concourantes) de celle des bissectrices.

160. — Lieu des centres des circonférences qui coupent deux circonférences fixes en des points diamétralement opposés.

161. — On donne deux circonférences, et une troisième, tangente aux deux premières. La droite qui joint les points de contact passe par l'un des centres de similitude des deux premières.

162. — Lieu des milieux des droites qui s'appuient sur deux droites données de l'espace.

163. — Etant donnés un point et une circonférence dans l'espace, trouver la plus courte distance du point à la circonférence.

164. — Lieu du milieu d'une droite de longueur constante dont les extrémités décrivent deux droites rectangulaires dans l'espace.

165. — Condition nécessaire et suffisante pour que deux hauteurs d'un tétraèdre se rencontrent.

166. — Lieu des points équidistants de deux cercles donnés.

167. — Lieu des points dont la distance à une droite fixe est égale à leur distance à un point fixe, plus une constante.

168. — Le cercle inscrit dans le triangle formé par l'axe transverse et les deux rayons vecteurs d'un point de l'hyperbole touche le grand axe au sommet de la branche correspondante.

169. — Condition nécessaire et suffisante pour qu'un quadrilatère puisse être circonscrit à une circonférence. Montrer que le quadrilatère formé en joignant deux points d'une hyperbole aux deux foyers est circonscriptible.

170. — Construire une conique connaissant :

1° un foyer et trois points ;
2° un foyer et trois tangentes.

171. — Construire une ellipse connaissant les sommets A, B et l'excentricité égale à $\frac{1}{2}$.

172 — Construire une hyperbole connaissant un foyer, une asymptote et une tangente.

173. — Construire une parabole connaissant : 1° le foyer et deux points ; 2° deux points et la directrice ; 3° la directrice, un point et une tangente.

Géométrie descriptive. (M. Appell.)

174. — Etant donnée une pyramide triangulaire dont la base est dans le plan horizontal et le sommet dans le plan vertical, construire la section de cette pyramide par le premier plan bissecteur.

175. — On donne un tétraèdre défini par sa base dans le plan horizontal et la projection cotée de son sommet. Déterminer la plus courte distance de deux arêtes opposées. Construire le rectiligne de l'un des dièdres.

176. — Angle d'une droite définie par ses projections avec le plan bissecteur du second dièdre.

177. — On donne deux plans par leurs traces et un axe de bout. Faire tourner un des plans autour de l'axe de façon à l'amener à être perpendiculaire à l'autre plan supposé fixe.

178. — On donne trois points par leurs projections et leurs cotes. Construire le cercle passant par ces trois points.

179. — On donne deux cylindres de révolution par leurs axes et leurs rayons. Mener par un point donné une tangente commune à ces deux cylindres.

180. — Mener par un point une tangente commune à deux sphères.

181. — Par un point donné de l'espace mener à une sphère donnée une tangente faisant un angle donné avec la ligne de terre.

182. — Mener par un point une droite s'appuyant sur une droite donnée et faisant un angle donné avec le plan horizontal.

183. — Construire une droite rencontrant deux droites données et faisant des angles donnés avec les plans de projection.

184. — Plans tangents communs à deux cônes circonscrits à une même sphère.

185. — Mener les plans tangents communs à deux cônes de révolution ayant même sommet, définis par leurs axes et les angles au sommet.

186. — Mener un plan tangent commun à une sphère et à un cylindre de révolution défini par son axe et son rayon.

187. — Mener un plan tangent commun à une sphère et à un cône oblique ayant sa base dans le plan horizontal.

188. — Soit un trièdre défini par les projections de ses trois arêtes. Construire l'axe du cône de révolution passant par les trois arêtes. Ayant l'axe de ce cône, comment construira-t-on ses contours apparents?

189. — On donne les projections horizontales et les cotes de trois points A, B, C, et un plan défini par sa trace et un point M (projection horizontale et cote). Déterminer le centre de la sphère passant par les points A, B, C et tangente au plan au point M.

190. — Mener une normale commune à deux cônes de révolution ayant leurs bases, l'un dans le plan horizontal, l'autre dans le plan vertical.

191. — Mener par un point donné une normale à un cylindre de révolution défini par son axe, qui est de front, et son rayon.

192. — Mener par un point donné une normale à un cône de révolution défini par son axe et son angle au sommet.

193. — Mener par un point donné une normale à un cylindre dont la base est un cercle situé dans le plan horizontal et dont les génératrices sont de front.

194. — Mener à un cône donné une normale faisant un angle donné avec le plan horizontal et rencontrant une droite donnée.

195. — On donne dans le plan horizontal un cercle tangent à la ligne de terre. Ce cercle est la base d'un cône dont le sommet est dans le plan vertical. Construire la section par un plan parallèle au plan vertical.

196. — On considère deux cônes de révolution ayant leurs bases dans le plan horizontal et même angle au sommet. Trouver leur intersection.

197. — On trace un cercle dans le plan horizontal et on donne deux points par leurs projections horizontales et leurs cotes. Intersection des deux cônes ainsi définis.

198. — Un cylindre oblique a pour base un cercle dans le plan horizontal et ses génératrices sont de front. Trouver l'intersection de ce cylindre et d'un cône de révolution ayant même base.

199. On donne un cylindre droit ayant pour base une hyperbole dans le plan horizontal et un cône de révolution ayant pour base une circonférence concentrique à l'hyperbole. Intersection de ces deux surfaces.

200. — On donne une droite par ses projections ab, $a'b'$. Intersection des deux cônes engendrés par cette droite en tournant successivement autour des verticales (a, a') et (b, b').

201. — Intersection de deux cylindres tangents au plan horizontal et dont l'un est parallèle à la ligne de terre.

202. — On donne un cône circulaire dont la base est dans le plan horizontal. On inscrit un cercle dans le contour apparent vertical et on prend ce cercle pour base d'un cylindre dont les génératrices sont perpendiculaires au plan vertical. Trouver l'intersection des deux surfaces.

203. — Un cylindre a pour base un cercle dans le plan horizontal et ses génératrices de front. Dans le contour apparent vertical de ce cylindre on inscrit une circonférence qui est la base d'un cylindre de bout. Construire l'intersection de ces deux cylindres.

204. — Intersection d'une sphère avec un cône ayant pour sommet le point le plus haut de la sphère et pour base un cercle dans le plan horizontal.

205. — Intersection d'une sphère et d'un cylindre oblique ayant pour base un grand cercle de la sphère.

206. — Intersection d'une sphère et d'un cône de révolution ayant pour sommet un point de la sphère, pour axe une tangente à la sphère en ce point et pour angle au sommet un angle donné.

207. — Intersection d'une surface gauche de révolution à axe vertical avec une droite verticale.

208. — Mener par un point des normales à la surface gauche de révolution.

209. — Trouver sur une surface gauche de révolution à axe vertical une génératrice faisant un angle donné avec la ligne de terre.

210. — On considère une surface gauche de révolution dont l'axe est vertical; l'angle des génératrices avec l'axe est de 45°. Construire l'intersection de la surface avec le premier plan bissecteur.

211. — Étant donné une surface gauche de révolution dont l'axe est vertical, mener à cette surface des plans tangents passant par la ligne de terre.

212. — Deux surfaces gauches de révolution ayant leurs cercles de gorge dans un même plan ont une intersection qui se projette sur ce plan suivant une circonférence.

213. — On donne deux axes verticaux et une droite tournant autour de ces deux axes successivement. Intersection des deux surfaces ainsi engendrées.

214. — On donne dans le plan horizontal une courbe C et dans l'espace une droite DD'. Trouver la normale en un point m, m' de la surface engendrée par la rotation de la courbe C autour de la droite DD'.

215. — Construire le contour apparent vertical de la surface engendrée par la ligne de terre en tournant autour d'une droite de front donnée.

216. — On donne une verticale dans le plan vertical et une circonférence dans un plan de bout. Construire le contour apparent de la surface engendrée par la rotation du cercle autour de la verticale donnée.

217. — Construire le contour apparent horizontal d'un tore dont l'axe est une ligne de front.

218. — Intersection d'une surface gauche de révolution à axe vertical et d'un cône de révolution dont l'axe est de front et rencontre l'axe de la surface gauche.

219. — Intersection d'une surface gauche de révolution à axe vertical et d'une cône ayant pour base dans le plan horizontal une circonférence dont le centre est dans le plan de front de l'axe de la surface gauche, et pour sommet un point du même plan de front.

220. — Intersection de deux surfaces de révolution engendrées par la rotation d'une même droite autour de deux axes qui se rencontrent.

221. — Étant données une ellipse dans le plan horizontal et une ellipse dans le plan vertical, peuvent-elles être les projections d'une même ellipse de l'espace ?

QUESTIONS PROPOSÉES

506. — On donne un cercle de centre O, un diamètre fixe de ce cercle et un point P fixe sur ce diamètre ; par le point P on mène une sécante quelconque PMM', et on demande l'équation générale des hyperboles équilatères qui passent au point P et qui admettent pour diamètres conjugués les droites qui joignent le centre du cercle aux points de rencontre de ce cercle avec la sécante mobile ; on demande en outre le lieu des sommets et le lieu des foyers de ces hyperboles. (G. A. POUILLIART.)

507. — On considère le faisceau de coniques ayant pour foyer un point donné F et passant en deux points donnés A et B, et on demande :

1° L'enveloppe des directrices qui correspondent au foyer F ;

2° Le lieu du centre de cette conique variable ;

3° Le lieu du second foyer ;

4° D'indiquer la construction de la conique particulière du faisceau qui a une excentricité donnée.

L.-J. GOUJON (pensionnat de Valbenoite, à Saint-Etienne).

508. — On donne un cercle (C) et une droite (D), et l'on considère un cercle variable (Γ) orthogonal au cercle (C) et tangent à la droite (D).

1° Trouver le lieu du centre du cercle Γ.

2° Trouver l'enveloppe du cercle Γ et montrer qu'elle se décompose en deux parties que chaque cercle touche simultanément ; indiquer, en outre, la correspondance qui existe entre les deux points de contact du cercle Γ avec son enveloppe.

3° Trouver le lieu du point de rencontre de la normale à l'une des parties de l'enveloppe en l'un des points de contact avec la tangente à l'autre partie en l'autre point de contact. Construire ce lieu.

E. H.

509. — On donne une circonférence et deux tangentes fixes à cette courbe ; on considère deux autres tangentes variables se coupant sous un angle donné. Démontrer que le point de concours des diagonales du quadrilatère ainsi formé décrit une ligne droite. Traiter la question par le calcul.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

6e Année. N° 8. Mai 1896.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LES COORDONNÉES POLAIRES

par M. **L. Lefèvre**, Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Lille.

Qu'on nous permette de présenter ici quelques observations sur l'intéressant article de M. Andoyer, paru dans l'avant-dernier numéro de cette *Revue*, et relatif à certaines courbes algébriques en coordonnées polaires.

Il est facile d'obtenir l'équation générale des courbes quelconques, telles que le rayon vecteur ρ reprenne les mêmes valeurs quand l'angle polaire ω augmente d'un même angle donné $\alpha = \frac{m}{n}\pi$.

Soit $f(\rho, \omega) = 0$ l'équation; on devra avoir $f(\rho, \omega + \alpha) \equiv \lambda f(\rho, \omega)$. Bornons-nous au cas très général d'un multiplicateur λ égal à 1; il vient

$$(1) \qquad f(\rho, \omega + \alpha) \equiv f(\rho, \omega).$$

Or les fonctions $u = \rho$, $v = \operatorname{tg} \frac{n\omega}{m}$ satisfont à cette condition et il en sera de même pour toute fonction $F(u, v)$ *uniforme* en u et v.

Inversement, soit $f(\rho, \omega)$ une fonction satisfaisant à la relation (1); exprimons ρ et ω en u et v; il vient $f(\rho, \omega) \equiv F(u, v)$. Je dis que $F(u, v)$ est uniforme en u et v : à un système de valeurs u_0, v_0 $\left(\text{avec } v_0 = \operatorname{tg} \frac{n\theta}{m}\right)$ correspondent n points du plan $\begin{cases} \rho = u_0, \\ \omega = k.\frac{m}{n}\pi + \theta \end{cases}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, \overline{n-1})$.

Mais en l'un de ces points, on a $f(\rho, \omega) = f(\rho, \theta + k\alpha) = f(\rho, \theta)$ d'après (1); donc f ou F reprend toujours la même valeur $f(\rho, \theta)$.

Ainsi $F\left(\rho, \operatorname{tg} \frac{n\omega}{m}\right) = 0$, dans laquelle F est *uniforme* en ρ et $\operatorname{tg} \frac{n\omega}{m}$, est bien l'équation générale des courbes en question.

On verrait de même que $F\left(\rho \cos \frac{n\omega}{m}, \operatorname{tg} \frac{n\omega}{m}\right) = 0$, dans laquelle F est *uniforme* en $\rho \cos \frac{n\omega}{m}$ et $\operatorname{tg} \frac{n\omega}{m}$, est l'équation générale des courbes dans lesquelles ρ se change en $-\rho$ lorsque l'angle polaire augmente de $\alpha = \frac{m}{n}\pi$.

Pour ce qui est des diverses espèces d'axes et de centres de symétrie, de leur existence simultanée et de leur usage pour simplifier la construction d'une courbe absolument quelconque rapportée à des coordonnées polaires, nous en avions donné nous-même une étude complète il y a quelques années [1], indiquant en outre les équations générales des courbes qui présentent ces diverses symétries.

On voit ainsi, en reprenant les trois exemples cités par M. Andoyer : que la courbe $\rho = \sin \frac{p\omega}{q}$

[1] *Nouvelles annales de mathématiques*, année 1892.

rentre dans la forme $F\left(\rho, \sin \frac{p}{q} \omega\right) = 0$, où F est une fonction *uniforme* et *impaire* en ρ et $\sin \frac{p\omega}{q}$, possède p axes de chaque espèce et s'obtient en faisant varier ω dans un intervalle d'étendue $2q\pi$;

Que $\rho = \operatorname{tg} \frac{p}{q} \omega$ est de la forme $F\left(\rho, \operatorname{tg} \frac{p}{q} \omega\right)$ avec F *uniforme* et *impaire*. Elle possède p axes de 2e espèce et correspond à la variation $q\pi$ de ω, si q est pair. Elle possède $2p$ axes de 2e espèce et ω doit varier de $2q\pi$, si q est impair.

Enfin $\rho = \cos \frac{p}{q} \omega + \cos^2 \frac{p}{q} \omega$ rentre dans $F\left(\rho, \cos \frac{p}{q} \omega\right) = 0$, F *uniforme* et possède p axes de 1re espèce. ω varie de $2q\pi$.

INTERSECTION D'UNE DROITE AVEC UNE QUADRIQUE GAUCHE

par M. **C Roubaudi**, Professeur au lycée Buffon.

I. — **Hyperboloïde**. — Soit D la droite dont il faut construire les points de rencontre avec l'hyperboloïde défini par les trois directrices A, B, C. Les quatre droites A, B, C, D peuvent être combinées trois à trois de quatre manières et définissent par suite quatre hyperboloïdes distincts, lesquels peuvent être groupés deux à deux de six façons. Considérons un quelconque de ces groupes, (A, B, C) et (A, B, D) par exemple. Pour obtenir à la fois des génératrices des deux hyperboloïdes, nous faisons passer des plans auxiliaires par l'une des deux génératrices communes, A par exemple. Un plan quelconque P mené par cette droite coupe les trois autres droites B, C, D respectivement aux points b, c, d; bc est une génératrice du premier hyperboloïde, elle rencontre A au point a; bd est une génératrice du deuxième hyperboloïde, elle rencontre A au point α. Lorsque le plan P tourne autour de A, les deux points a et α décrivent sur A deux divisions homographiques, car dans l'hyperboloïde (A, B, C), les deux suites (a) et (b) sont homographiques, et, dans l'hyperboloïde (A, B, D), les deux suites (α) et (b) sont homographiques; donc les deux suites (a) et (α), homographiques à une troisième (b), sont homographiques entre elles.

Cela posé, les deux divisions (a) et (α), situées sur la même droite A, ont deux points doubles à chacun desquels correspondent deux droites bc et bd confondues, c'est-à-dire une génératrice commune aux deux hyperboloïdes. Ces droites s'appuyant sur les quatre droites A, B, C, D, sont deux génératrices de l'hyperboloïde A, B, C, et les points où elles rencontrent D sont les points d'intersection de cette dernière doite avec l'hyperboloïde donné.

Il résulte de ce qui précède que les deux hyperboloïdes (A, B, C), (A, B, D), qui ont deux génératrices communes A et B de même système, ont en outre en commun deux génératrices de l'autre système, de sorte que leur intersection se compose de quatre droites, se coupant deux à deux en quatre points en lesquels les deux hyperboloïdes sont tangents. On peut dire aussi qu'il existe deux droites s'appuyant sur quatre droites données d'une manière quelconque dans l'espace.

Pour construire les points doubles des divisions (a) et (α), on peut déterminer trois couples de points homologues au moyen de trois plans auxiliaires passant par A, puis appliquer les tracés connus. L'homographie étant projective, ces tracés se feront en projection horizontale ou en projection verticale.

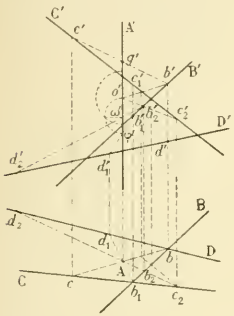
Mais il est préférable de se servir des points limites ou homologues de l'infini, qui se déterminent aisément. Pour avoir le point limite g de la division (a), il suffit de construire une droite bd parallèle à A et s'appuyant sur B et D; le plan Abd coupe la droite C en c, et la droite bc, située dans ce plan, rencontre A au point limite g. On obtient de même le point limite φ de la division (α) en menant une droite b_1c_1 parallèle à A et s'appuyant sur B et C, cherchant l'intersection d_1 du plan Ab_1c_1 avec D et menant la droite b_1d_1, qui rencontre A au point limite φ.

Prenant ensuite le milieu O du segment $g\varrho$, on cherche son homologue ω dans la division (α). Pour cela, on construit la droite ob_2c_2 qui passe par le point O et qui s'appuie sur les deux droites B et C ; le plan Ab_2c_2 coupe D en d_2, et la droite b_2d_2 rencontre A au point cherché ω.

Enfin on construit la moyenne géométrique entre les deux segments $\overline{o\varrho}$ et $\overline{o\omega}$, et on la porte de part et d'autre du point O, ce qui fournit les points doubles, d'après une propriété connue.

Les points doubles ne sont réels (et par suite on n'aura à faire la construction) que si les segments $\overline{o\varrho}$ et $\overline{o\omega}$ sont de même sens, c'est-à-dire si les points ϱ et ω sont d'un même côté du point O.

Pour faire l'épure, nous supposerons la droite A verticale, ce qui simplifiera les constructions. Remarquons tout de suite qu'on peut toujours profiter des simplifications qu'entraîne cette hypothèse, pourvu qu'une quelconque des quatre droites soit perpendiculaire à l'un des plans de projection : il suffira à cet effet de prendre un couple d'hyperboloïdes dans lequel cette droite soit une génératrice commune et de faire passer les plans auxiliaires par cette droite.



Soient donc trois droites (A.A'), (B.B'), (C.C') définissant un hyperboloïde dont il faut trouver les points de rencontre avec la droite (D.D'). Nous cherchons les points limites des divisions homographiques tracées sur (A.A') en appliquant la solution géométrique ci-dessus, et en opérant en projection verticale. La verticale $(b.b'd')$ est la parallèle à (A.A') s'appuyant sur (B.B') et (D.D' ; le plan vertical Ab — qui contient les deux droites (A.A') et $(b.b'd')$ — coupe la droite (C.C') au point $(c.c')$; la droite $b'c'$ rencontre A' au point limite g'. De la même manière le plan vertical Ab_1 fournit le deuxième point limite ϱ'. o' étant le milieu du segment $g'\varrho'$, nous cherchons l'intersection des deux plans définis par le point $(A.o')$ et respectivement par les droites (B.B') et (C.C'), en coupant par le plan de bout C', ce qui fournit la droite $(Ab_2c_2.o'b'_2c'_2)$; le plan déterminé par cette droite et par la droite (A.A') est le plan vertical Ac_2 qui coupe la droite (D.D') au point $(d_2.d'_2)$; la droite $b'_2d'_2$ rencontre A' au point ω', homologue de o'. On en déduit aisément les points doubles, et on achève sans difficulté les tracés restants.

II. — **Paraboloïde.** — Tout ce qui a été dit pour l'hyperboloïde s'applique au paraboloïde, puisque celui-ci peut être défini aussi par trois droites. Mais l'emploi des plans directeurs facilite généralement les constructions. Soit donc un paraboloïde défini par les deux directrices A et B et le plan directeur Q ; il s'agit de trouver ses points de rencontre avec une droite D.

Les trois droites A, B, D et le plan Q (qui équivaut à une droite située à l'infini) peuvent se grouper trois à trois de quatre manières donnant un hyperboloïde et trois paraboloïdes. En combinant ces quatre surfaces deux à deux, on obtient six couples dont trois renferment un hyperboloïde et un paraboloïde et les trois autres deux paraboloïdes. Considérons un groupe de deux paraboloïdes (A, D, Q) et (B, D, Q) par exemple. Menons par la génératrice commune D un plan P qui coupe A et B respectivement aux points a et b ; les plans parallèles à Q menés par les points a et b déterminent les génératrices ad et $b\delta$ des deux paraboloïdes. Lorsque le plan P tourne autour de la droite D, les points d et δ décrivent sur D deux divisions homographiques. En effet, le faisceau des plans P est coupé par les deux transversales A et B suivant deux divisions (a) et (b) qui sont homographiques ; or (a) est homographique et semblable à (d), (b) est homographique et semblable à (δ) ; donc (d) et (δ) sont homographiques. Ces divisions ont deux points doubles qui déterminent deux droites parallèles au plan Q et s'appuyant à la fois sur les droites A, B, D ; les points doubles sont donc les points de rencontre de la droite D et du paraboloïde donné.

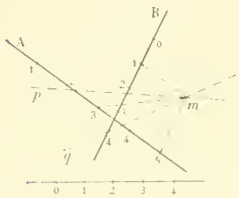
Il résulte de ce qui précède que les deux paraboloïdes (A, D, Q), (B, D, Q), qui ont en commun

une droite D et un plan directeur Q (droite commune à l'infini) se coupent en outre suivant deux autres droites.

On peut dire aussi qu'il existe deux droites parallèles à un plan donné et s'appuyant sur trois droites données.

Pour construire les points doubles des divisions (d) et (δ), on peut opérer comme pour l'hyperboloïde. Ici les points limites se déterminent plus aisément encore. Pour obtenir le point limite g de la division (d), on mène par D le plan parallèle à B qui coupe A en a_1 ; le plan parallèle à Q mené par a_1 rencontre D au point limite g. De même le plan auxiliaire mené par D parallèlement à A coupe B au point b_2 et le plan parallèle à Q mené par le point b_2 rencontre D au point limite φ de la division (δ). Le milieu o du segment $g\varphi$ étant considéré dans la division (d), on cherche son homologue dans (δ) ; à cet effet, on construit la génératrice OA_3 du paraboloïde (A, D, Q) ; le plan Doa_3 coupe B en b_3, ce qui fournit la génératrice correspondante $b_3\omega$ du paraboloïde (B, D, Q) ; ω est l'homologue de o. Prenant enfin la moyenne géométrique entre les segments $\overline{o\varphi}$ et $\overline{o\omega}$, on a les points doubles cherchés.

Pour faire l'épure, nous supposerons le paraboloïde défini par deux droites graduées A et B et un plan directeur horizontal H, et nous nous proposons de trouver les cotes des points de la surface qui sont projetés horizontalement en un point donné m. Cela revient à trouver l'intersection du paraboloïde avec la verticale M du point m. Nous employons à cet effet les deux paraboloïdes (M, A, H), (M, B, H) et nous opérons arithmétiquement. Cherchons les points limites sur la verticale M des divisions homographiques déterminées comme nous l'avons expliqué. Le plan mené par la droite M parallèlement à la droite B coupe la droite A au point a_5 (ici les indices marquent les cotes) et la droite B à l'infini ; donc m_5 est un point limite. Le plan mené par la droite M parallèlement à la droite A coupe B au point b_1 et A à l'infini ; donc le point μ_1 où le plan horizontal de b_1 coupe M est le second point limite. Le milieu du segment $m_5\mu_1$ est le point o_3 dont l'homologue s'obtient en considérant le plan vertical Ma_3 qui coupe la droite B au point $b_{2,7}$; le plan horizontal du point $b_{2,7}$ coupe la droite M en un point $\omega_{2,7}$ qui est l'homologue de o_3. Les segments $\overline{o_3\mu_1}$, $\overline{o_3\omega_{2,7}}$ sont de même sens et ont pour longueurs respectives 2^m et $0^m,3$; leur moyenne proportionnelle est égale à $0^m,77$; les points doubles ont donc pour cotes respectives $3 - 0,77 = 2^m,23$ et $3 + 0,77 = 3^m,77$. Ce sont les deux points demandés. Le plan horizontal mené par chacun de ces points coupe les deux droites A et B en deux points qui sont en ligne droite avec le premier. On obtient ainsi deux horizontales mp, mq s'appuyant sur les trois droites A, B, M.



On voit que dans ce dernier exemple, la solution proposée est d'une extrême simplicité.

Remarque. — Les tracés que nous avons indiqués peuvent servir à résoudre les trois problèmes suivants :

1° Trouver les points de rencontre d'une droite avec un hyperboloïde ou un paraboloïde ;

2° Construire une droite s'appuyant sur quatre droites données, dont l'une peut être à l'infini (c'est-à-dire s'appuyant sur trois droites et parallèle à un plan donné) ;

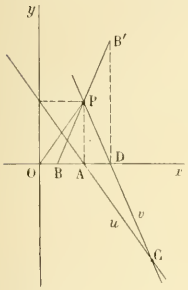
3° Construire l'intersection de deux hyperboloïdes, ou d'un hyperboloïde et d'un paraboloïde ou de deux paraboloïdes qui ont en commun deux génératrices de même système.

On peut d'ailleurs, par des moyens semblables, montrer que deux quadriques réglées gauches qui ont une génératrice commune se touchent en deux points de cette droite et construire ces points de contact.

SUR L'HYPERBOLE D'APOLLONIUS

On sait que l'hyperbole d'Apollonius d'un point P pour une conique donnée, est le lieu des pieds des normales abaissées de ce point sur toutes les coniques homothétiques et concentriques à la conique donnée ; on sait, en outre, que c'est le lieu du point de rencontre d'un diamètre mobile de la conique avec la perpendiculaire abaissée du point P sur la direction conjuguée de ce diamètre. D'ailleurs ces deux propriétés n'en forment réellement qu'une seule : au fond elles sont identiques.

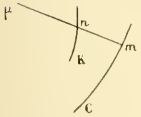
Il résulte immédiatement de là, — ce que, au surplus, l'équation de cette hyperbole met de suite en évidence, — que l'hyperbole d'Apollonius passe au centre de la conique, au point P et admet pour directions asymptotiques les axes de la conique. Il est alors facile de la construire, en s'appuyant sur une propriété bien connue de l'hyperbole générale : que si, de part et d'autre du milieu d'une corde, on porte deux longueurs égales et que par ces points on mène des parallèles aux asymptotes, la droite qui joint leur point de rencontre au milieu de la corde considérée passe au centre de l'hyperbole. En effet, soient alors Ox et Oy les axes de la conique donnée et P le point choisi ; la droite OP est une corde de l'hyperbole d'Apollonius dont les extrémités O et P sont connues ; les parallèles aux asymptotes menées par ces points se coupent au point A pied de l'ordonnée du point P ; donc la droite u qui joint ce point A au milieu de la corde OP passe au centre de l'hyperbole. En outre, la tangente en P est perpendiculaire à la direction conjuguée de OP, et, par suite, aisée à construire ; soit PB cette droite ; prenons $PB' = PB$ et menons B'D parallèle au second axe ; la droite PD ou v, pour une raison semblable à la précédente, passe aussi au centre de l'hyperbole d'Apollonius. Le centre C de cette courbe est donc déterminé ; par suite, les asymptotes sont aussi connues, et l'on est ramené à construire une hyperbole connaissant ses asymptotes et un point. E. H.



ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES

Cours spéciaux (Concours de 1895.)

456. — *Sur la normale à une courbe quelconque* C, *on porte, à partir du pied m et dans la direction du centre de courbure μ, une longueur mn égale à λρ (ρ représentant le rayon de courbure, et λ un coefficient constant qui peut recevoir des valeurs positives ou négatives). On demande :*



1° *De déterminer en fonction des éléments caractéristiques de la courbe* C *au point m la tangente à la courbe* K *lieu du point n :*

2° *D'écrire la condition analytique à laquelle la courbe* C *doit satisfaire pour que la courbe* K *se réduise à une droite : examiner ce que devient cette condition dans les cas simples où* λ *est égal à* -1 *ou à* $\pm\frac{1}{2}$.

1° Si nous appelons s l'arc de la courbe C, compté à partir d'un certain point et dans un certain sens, α l'angle que fait la direction positive de la tangente avec l'axe des x, x et y les coordonnées du point m, X et Y celles du point n, et enfin ρ le rayon de courbure affecté d'un signe, $\rho = \frac{ds}{d\alpha}$, nous pouvons écrire de suite

$$X = x - \lambda\rho \sin \alpha,$$
$$Y = y + \lambda\rho \cos \alpha;$$

nous déduisons de là, quelle que soit la variable indépendante choisie,

$$dX = dx - \lambda \sin \alpha \, d\rho - \lambda\rho \cos \alpha \, d\alpha,$$
$$dY = dy + \lambda \cos \alpha \, d\rho - \lambda\rho \sin \alpha \, d\alpha;$$

d'où, les deux combinaisons,

$$dX \cos \alpha + dY \sin \alpha = ds - \lambda\rho d\alpha = (1 - \lambda) ds,$$
$$- dX \sin \alpha + dY \cos \alpha = \lambda d\rho.$$

Or en appelant A l'angle que fait l'une des directions de la tangente en n avec Ox, nous savons que $\frac{dY}{dX} = \operatorname{tg} A$; par conséquent, en divisant la seconde équation par la première, nous avons la relation

$$(1) \qquad \operatorname{tg}(A - \alpha) = \frac{\lambda \frac{d\rho}{ds}}{1 - \lambda}.$$

Cette équation définit l'angle A à l'aide de α et de $\frac{d\rho}{ds}$; elle répond donc à la première demande de l'énoncé.

2° Regardons maintenant A comme étant fixe et prenons x pour variable indépendante, nous aurons la condition demandée pour que le lieu de x soit une droite : en appelant k la valeur fixe de $\operatorname{tg} A$, y' la valeur de $\frac{dy}{dx}$ et représentant de même par la notation de Lagrange les diverses dérivées par rapport à x, nous avons la relation

$$(2) \qquad \frac{k - y'}{1 + ky'} = \frac{\lambda\rho'}{(1 - \lambda) s'};$$

c'est la relation demandée.

Mais nous voulons l'obtenir à l'aide de x, y et des diverses dérivées de y. A cet effet, partons de $\rho = \frac{s'}{\alpha'}$, nous aurons de suite

$$\rho' = \frac{\alpha' s - s' \alpha''}{\alpha'^2},$$

puis

$$\frac{\rho'}{s'} = \frac{\alpha' s' s'' - \alpha'' s'^2}{\alpha'^2 s'^2};$$

or

$$s'^2 = 1 + y'^2, \qquad s's'' = y'y'';$$
$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} y', \qquad \alpha' = \frac{y''}{1 + y'^2};$$

et enfin

$$\alpha'' = \frac{(1 + y'^2) y''' - 2y'y''^2}{(1 + y'^2)^2};$$

la relation (2) s'écrit donc

$$\frac{3y'y''^2 - (1 + y'^2) y'''}{y''^2} = \frac{1 - \lambda}{\lambda} \frac{k - y'}{1 + ky},$$

ou enfin

$$(3) \qquad \frac{y'''}{y''} = \left[3y' + \frac{\lambda - 1}{\lambda} \cdot \frac{k - y'}{1 + ky'} \right] \frac{y''}{1 + y'^2}.$$

Cette équation est de la forme

$$\frac{y'''}{y''} = f(y') y'',$$

$f(y')$ étant une fonction rationnelle en y' : elle est donc intégrable et conduit à la relation

$$\mathrm{L} \frac{y''}{C} = \mathrm{F}(y'),$$

où C désigne une constante arbitraire.

On a donc la nouvelle équation

$$y'' = Ce^{F(y')}$$

ou

$$Cdx = g(y')dy';$$

une autre quadrature conduit à l'équation

$$Cx + C_1 = h(y'),$$

où C_1 désigne une nouvelle constante arbitraire. On déduit de là

$$y' = G(Cx + C_1),$$

ou

$$dy = G(Cx + C_1)dx;$$

par suite, une nouvelle quadrature donne l'équation finie de la courbe C ; on trouve ainsi

$$Cy + C_2 = H(Cx + C_1).$$

Cette équation contient trois constantes arbitraires C, C_1, C_2, en plus de k et λ ; mais si l'on pose $Cy + C_2 = Y$, $Cx + C_1 = X$, on obtient une courbe homothétique à la courbe précédente et dont l'équation ne dépend plus que des constantes k et λ. Donc, en regardant toutes les courbes homothétiques à une même courbe comme ne formant qu'une seule solution, la solution la plus générale de l'équation différentielle que nous avons trouvée ne dépend que des deux constantes k et λ.

Passons maintenant à l'examen des cas particuliers signalés dans l'énoncé : pour $\lambda = -1$, la relation (3) devient

$$(4) \qquad \frac{y'''}{y''} = \frac{2y''}{y' + \frac{1}{k}} + \frac{y'y''}{1 + y'^2};$$

pour $\lambda = +\frac{1}{2}$, elle devient

$$(5) \qquad \frac{y'''}{y''} = \frac{-y''}{y' + \frac{1}{k}} + \frac{4y'y''}{1 + y'^2};$$

enfin pour $\lambda = -\frac{1}{2}$, on a

$$(6) \qquad \frac{y'''}{y''} = \frac{3ky''}{1 + ky'}.$$

Occupons-nous ensuite de la relation (4) ; une première intégration la transforme en

$$L\frac{y''}{C} = 2L\left(y' + \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{2}L(1 + y'^2),$$

ou

$$y'' = C\left(y' + \frac{1}{k}\right)^2\sqrt{1 + y'^2};$$

Nous posons alors $y' + \frac{1}{k} = z$, $z = \frac{1}{u}$, nous remplaçons k par $\operatorname{tg} A$, nous posons ensuite $\frac{u}{\sin A} - \cos A = t$, et nous avons finalement

$$\frac{Cdx}{\sin^2 A} = \frac{-tdt}{\sqrt{t^2 + \sin^2 A}} - \frac{\cos A\,dt}{\sqrt{t^2 + \sin^2 A}};$$

nous déduisons de là

$$(7) \qquad Cx + C_1 = -\sin^2 A\left[\sqrt{t^2 + \sin^2 A} + \cos A\,L(t + \sqrt{t^2 + \sin^2 A})\right].$$

D'autre part on a $dy = y'dx$, et, comme

$$y' = z - \frac{1}{k} = \frac{1}{u} - \frac{1}{k} = \frac{k - u}{ku} = -\cot A + \frac{1}{\sin A(t + \cos A)},$$

on a aussi

$$Cdy = \frac{\sin A \cos A\,tdt}{\sqrt{t^2 + \sin^2 A}} - \frac{\sin^3 A\,dt}{\sqrt{t^2 + \sin^2 A}};$$

par suite

$$(8) \qquad Cy + C_2 = \sin A \cos A \sqrt{t^2 + \sin^2 A} - \sin^2 A \, L(t + \sqrt{t^2 + \sin^2 A}) \, ;$$

nous avons donc les deux équations de la courbe en fonction d'un paramètre t ; ce sont les équations (7) et (8).

Nous ne traiterons pas les deux autres cas, qui sont plus faciles que celui-ci.

Solution différente : M. Auzeram (Montpellier).

---

457. — *Calculer les côtés, les angles* B *et* C *et la surface d'un triangle* ABC *dans lequel on donne : l'angle* $A = 62^\circ\, 20'\, 35''$; *la hauteur* BH *ou* $h = 4532^m$; *la hauteur* CK *ou* $k = 1945^m$.

Formules :

$$b = \frac{k}{\sin A}, \qquad c = \frac{h}{\sin A}, \qquad S = \frac{bc \sin A}{2},$$

$$\operatorname{tg} \frac{B - C}{2} = \frac{c - b}{c + b} \operatorname{cotg} \frac{A}{2}, \qquad a = \frac{h}{\sin C}.$$

Résultats :

$a = 4535^m,53$, $b = 2195^m,89$,
$c = 5116^m,60$, $S = 4975903^{mq},4$,
$B = 25^\circ 23' 37'',3$, $C = 92^\circ 15' 47'',7$.

---

458. — *Un point* M, *de masse* m, *est attiré vers deux centres fixes* O *et* O′ *par des forces proportionnelles aux distances respectives du point mobile à ces points fixes ; déterminer la trajectoire du point* M.

Examiner en particulier ce que devient cette trajectoire dans le cas où le point M *part du repos et déterminer dans ce cas la loi complète de son mouvement.*

Soient (a, b, c), (a', b', c') les coordonnées des points O et O′ relativement à trois axes quelconques, (x, y, z) celles du point M. Posons $OM = r$, $O'M = r'$ et désignons par $m\mu r$ et $m\mu' r'$ les intensités des forces qui agissent sur le point M. Les projections de ces forces sur les trois axes sont :

$$X = m\mu r \frac{a - x}{r} = m\mu(a - x), \qquad X' = m\mu'(a' - x),$$

$$Y = m\mu r \frac{b - y}{r} = m\mu(b - y), \qquad Y' = m\mu'(b' - y),$$

$$Z = m\mu r \frac{c - z}{r} = m\mu(c - z), \qquad Z' = m\mu'(c' - z).$$

et, par suite, les équations du mouvement sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \mu(a - x) + \mu'(a' - x),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \mu(b - y) + \mu'(b' - y),$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \mu(c - z) + \mu'(c' - z).$$

En faisant correspondre aux points O et O′ les nombres μ et μ', le centre des distances proportionnelles de ces deux points a pour coordonnées

$$\alpha = \frac{\mu a + \mu' a'}{\mu + \mu'}, \qquad \beta = \frac{\mu b + \mu' b'}{\mu + \mu'}, \qquad \gamma = \frac{\mu c + \mu' c'}{\mu + \mu'},$$

et les équations du mouvement peuvent s'écrire

$$\frac{d^2x}{dt^2} = (\mu + \mu')(\alpha - x), \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = (\mu + \mu')(\beta - y), \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = (\mu + \mu')(\gamma - z).$$

On voit ainsi que le mouvement du point M est le même que si ce point était attiré vers le point (α, β, γ) par une force proportionnelle à la distance et dont l'intensité à l'unité de distance est égale à la somme des intensités des deux forces données.

Prenons alors pour origine le point (α, β, γ) et pour plan des xy le plan qui contient la vitesse initiale; le mouvement s'effectue dans ce plan, et il est déterminé par les deux équations

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -k^2y,$$

où nous avons posé $k^2 = \mu + \mu'$.

On en déduit immédiatement

$$x = A \cos kt + B \sin kt,$$
$$y = C \cos kt + D \sin kt,$$

A, B, C, D désignant des constantes que l'on calcule au moyen des données initiales.

Prenons pour axe des x la droite joignant l'origine à la position initiale, et pour axe des y une parallèle à la vitesse initiale ; nous aurons

$$x = x_0 \cos kt, \qquad y = \frac{v_0}{k} \sin kt.$$

On voit ainsi que la trajectoire est une ellipse qui a pour équation

$$\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{k^2y^2}{v_0^2} = 1.$$

Si la vitesse initiale est nulle, le mouvement est rectiligne; il est défini par la seule équation

$$x = x_0 \cos kt\,;$$

c'est un mouvement périodique dont la période est égale à $\frac{2\pi}{k}$.

BLAZY-LACOMBE, lycée de Toulouse.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

459. — *On considère le réseau de coniques ayant pour triangle polaire un triangle rectangle dont l'un des côtés de l'angle droit est double de l'autre, et parmi les coniques de ce réseau on prend d'abord le système des paraboles. On demande le lieu du point de rencontre de chacune d'elles avec celui de ses diamètres qui passe au sommet de l'angle droit. On demande aussi le lieu des foyers de ces paraboles.*

Parmi les coniques de ce réseau, on prend ensuite le système formé par les coniques semblables à une conique donnée, et l'on demande le lieu du point de contact de chacune d'elles avec une droite passant au milieu de l'hypoténuse.

Construire ce dernier lieu quand la conique variable est une hyperbole équilatère.

Soient OAB le triangle rectangle donné, $OA = a$, $OB = 2a$, et prenons OA pour demi-axe des x positif et OB pour demi-axe des y positif. Désignons par x, y, z les coordonnées homogènes d'un point, telles que $z = 0$ soit l'équation de la droite de l'infini, et par X, Y, Z les coordonnées trilinéaires correspondantes, OAB étant le triangle de référence, de telle sorte, en outre, que les formules de transformation soient

$$(1) \qquad \begin{cases} X = x, & x = X, \\ Y = y, & y = Y, \\ Z = 2x + y - 2az, & 2az = 2X + Y - Z. \end{cases}$$

L'équation générale des coniques du réseau est $\lambda X^2 + \mu Y^2 + \nu Z^2 = 0$; parmi ces coniques il faut prendre les paraboles, c'est-à-dire celles qui sont tangentes à la droite de l'infini $z = 0$ ou $2X + Y - Z = 0$; si l'on tire Z de cette dernière équation et si l'on porte dans l'équation des coniques du réseau, on obtient l'équation du second degré

$$(2) \qquad \lambda X^2 + \mu Y^2 + \nu (2X + Y)^2 = 0,$$

qui représente les deux droites joignant l'origine aux points de rencontre de la droite de l'infini avec la conique particulière envisagée. Il faut exprimer maintenant que ces deux droites sont confondues, ce qui donne la relation

$$\lambda\mu + \lambda\nu + 4\mu\nu = 0.$$

Les paraboles du réseau ont donc pour équation $\lambda X^2 + \mu Y^2 + \nu Z^2 = 0$, λ, μ et ν étant liés par la relation précédente. D'autre part, le premier membre de l'équation (2) est un carré parfait et chacune de ses dérivées, par rapport à X et Y, égalée à 0, représente la droite qui joint l'origine au point à l'infini de la parabole (λ, μ, ν), c'est-à-dire le diamètre de cette parabole qui passe à l'origine. Nous aurons donc le lieu demandé en éliminant λ, μ et ν entre l'une de ces équations, la relation trouvée et l'équation des paraboles ; mais les deux dérivées partielles de (2), égalées à 0, entraînent la relation trouvée entre λ, μ et ν ; il revient donc au même d'éliminer λ, μ et ν entre ces deux équations et celle de la parabole, c'est-à dire entre les trois équations suivantes :

$$\lambda X + 2\nu(2X + Y) = 0,$$
$$\mu Y + \nu(2X + Y) = 0,$$
$$\lambda X^2 + \mu Y^2 + \nu Z^2 = 0 ;$$

l'élimination est linéaire, immédiate, et donne le lieu suivant :

$$\begin{vmatrix} X & 0 & 2(2X+Y) \\ 0 & Y & 2X+Y \\ X^2 & Y^2 & Z^2 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(3) \qquad XY(Z^2 - (2X+Y)^2) = 0.$$

Cette équation se décompose en quatre autres : $X = 0$, $Y = 0$, $-Z + 2X + Y = 0$ et $Z + 2X + Y = 0$. La première droite représente un lieu exceptionnel et correspond à la parabole du faisceau qui se compose de deux fois l'axe des y ; la seconde représente de même un lieu exceptionnel qui correspond à la parabole impropre composée de deux fois l'axe des x ; la troisième représente la droite de l'infini, elle est le lieu du point de rencontre de la parabole à l'infini avec le diamètre considéré ; enfin la quatrième droite est le véritable lieu, c'est une parallèle à l'hypoténuse AB passant aux milieux des deux côtés de l'angle droit.

Pour avoir le lieu des foyers de ces paraboles, appelons α et β les coordonnées cartésiennes de l'un d'eux, dans le système rectangulaire Oxy ; l'équation de l'une des tangentes à la parabole correspondante issues de ce point est

$$y - \beta - i(x - \alpha) = 0,$$

ou

$$y - ix - z(\beta - i\alpha) = 0,$$

ou enfin, à l'aide des formules (1), en coordonnées trilinéaires,

$$2a(Y - iX) - (\beta - i\alpha)(2X + Y - Z) = 0.$$

Il faut exprimer maintenant que cette droite touche la parabole (λ, μ, ν) ; nous ferons ceci en tirant Z de cette équation, le portant dans l'équation de la parabole et exprimant que le premier membre de l'équation en $\frac{Y}{X}$ ainsi obtenue est un carré parfait ; nous aurons ainsi successivement :

$$(\beta - i\alpha)Z = 2X(\beta - i\alpha + ai) + Y(\beta - i\alpha - 2a),$$

puis

$$(\beta - i\alpha)^2(\lambda X^2 + \mu Y^2) + \nu[2X(\beta - i\alpha + ai) + Y(\beta - i\alpha - 2a)]^2 = 0,$$

ou enfin

$$[\lambda(\beta - i\alpha)^2 + 4\nu(\beta - i\alpha + ai)^2]X^2 + 4\nu(\beta - i\alpha + ai)(\beta - i\alpha - 2a)XY + [\mu(\beta - i\alpha)^2 + \nu(\beta - i\alpha - 2a)^2]Y^2 = 0,$$

puis, en dernier lieu, en exprimant que ce trinome, homogène en X, Y, est un carré parfait,

$$[\lambda(\beta - i\alpha)^2 + 4\nu(\beta - i\alpha + ai)^2][\mu(\beta - i\alpha)^2 + \nu(\beta - i\alpha - 2a)^2] - 4\nu^2(\beta - i\alpha + ai)^2(\beta - i\alpha - 2a)^2 = 0 ;$$

cette condition se simplifie, et devient, après division par $(\beta - i\alpha)^2$, qui a déjà été supposé différent de 0,

$$\lambda\mu(\beta - i\alpha)^2 + \lambda\nu(\beta - i\alpha - 2a)^2 + 4\mu\nu(\beta - i\alpha + ai)^2 = 0,$$

ou $$(\lambda\mu + \lambda\nu + 4\mu\nu)(\beta - i\alpha)^2 + 4(\beta - i\alpha)(2\mu\nu a i - a\lambda\nu) + 4a^2(\lambda\nu - \mu\nu) = 0.$$

Mais pour toutes les paraboles du réseau on a

$$\lambda\mu + \lambda\nu + 4\mu\nu = 0;$$

donc la condition finale est

$$(\beta - i\alpha)(2\mu i - \lambda) + a(\lambda - \mu) = 0,$$

ou $$2\mu\alpha - \lambda\beta + a(\lambda - \mu) + i(2\mu\beta + \lambda\alpha) = 0.$$

Cette relation est encore vérifiée si on y change i en $-i$, car il y a une deuxième tangente isotrope issue du foyer ; elle se décompose donc en deux :

$$2\mu\alpha - \lambda\beta + a(\lambda - \mu) = 0,$$
$$2\mu\beta + \lambda\alpha = 0.$$

Nous aurons le lieu des foyers en éliminant λ et μ entre ces deux équations, c'est-à-dire en remplaçant dans la première μ par α, λ par -2β ; nous obtenons ainsi

(4) $$2\alpha^2 + 2\beta^2 - a(\alpha + 2\beta) = 0.$$

Le lieu est le cercle des neuf points du triangle rectangle OAB.

Proposons-nous maintenant de trouver la relation qui doit exister entre λ, μ et ν pour que la conique

$$\lambda X^2 + \mu Y^2 + \nu Z^2 = 0$$

soit semblable à une conique donnée. Il suffit pour cela de se rappeler que, si

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

est l'équation d'une conique en coordonnées cartésiennes rectangulaires, l'équation qui donne les deux excentricités de cette conique est

$$(AC - B^2)e^4 + [(A - C)^2 + 4B^2]e^2 - [(A - C)^2 + 4B^2] = 0;$$

il en résulte que si e^2 est donné, nous avons entre les coefficients A, B, C la relation

$$(A - C)^2 + 4B^2 = K(AC - B^2),$$

K étant une constante donnée. Or, si l'on remonte aux formules (I), on voit de suite que l'équation de la conique

$$\lambda X^2 + \mu Y^2 + \nu Z^2 = 0$$

devient, en revenant aux coordonnées cartésiennes,

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu(2x + y - 2a)^2 = 0;$$

par conséquent la relation demandée est

(5) $$(\lambda - \mu + 3\nu)^2 - K(\lambda\mu + \lambda\nu + 4\mu\nu) = 0.$$

Dans le cas où la conique est une parabole, nous devons prendre K infini et la relation se réduit à

$$\lambda\mu + \lambda\nu + 4\mu\nu = 0,$$

condition déjà trouvée autrement ; dans le cas où la conique est une hyperbole équilatère, nous avons $e^2 = 2$, par suite $K = -4$, et la relation devient

$$(\lambda + \mu + 5\nu)^2 = 0,$$

ou

(6) $$\lambda + \mu + 5\nu = 0,$$

relation qu'il est facile d'avoir directement. Cela posé, le milieu de l'hypoténuse a pour coordonnées trilinéaires $X = x = \frac{a}{2}$, $Y = y = a$, $Z = 0$, ou a, $2a$, 0 ; la polaire de ce point a donc pour équation

$$\lambda X + 2\mu Y = 0,$$

et nous aurons le lieu demandé en éliminant λ, μ et ν entre cette équation, celle de la conique et la

relation (5). Celle que nous venons de trouver, combinée avec l'équation de la conique (λ, μ, ν), donne de suite

$$\frac{\lambda}{2Y} = \frac{\mu}{-X} = \frac{\nu}{\dfrac{XY^2 - 2X^2Y}{Z^2}}.$$

Il n'y a plus qu'à porter ces valeurs proportionnelles à λ, μ et ν, dans l'équation (5), pour avoir le lieu demandé; nous trouvons ainsi

$$(7) \qquad Z^2(2Y + X) + 3XY(Y - 2X)^2 - K(-2XYZ^2 + XY(Y - 2X)(2Y - 4X)Z^2 = 0.$$

Cette équation représente une courbe du 6me degré.

Dans le cas des paraboles, elle se réduit au second degré, si on enlève les lieux exceptionnels $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$. Dans le cas des hyperboles équilatères, il n'y a qu'à porter les valeurs, mises à la place de λ, μ et ν, dans la relation (6) et l'on a de suite l'équation du troisième degré

$$(8) \qquad Z^2(2Y - X) + 3XY(Y - 2X) = 0.$$

Pour construire cette courbe, nous reviendrons aux coordonnées cartésiennes ; l'équation (8) se changera en

$$(9) \qquad 3xy(y - 2x) + (2y - x)(2x + y - 2a)^2 = 0.$$

Sous cette forme, nous voyons de suite que les quatre droites $x = 0$, $y = 0$, $y - 2x = 0$, $2y - x = 0$ partagent le plan en huit régions et que dans les quatre régions hachurées il n'y a pas de points de la courbe ; nous remarquerons en outre que les trois droites $x = 0$, $y = 0$, $y - 2x = 0$ touchent la courbe aux points où elles sont coupées par l'hypoténuse $2x + y - 2a = 0$, enfin que la courbe passe à l'origine et y admet pour tangente d'inflexion la droite $2y - x = 0$. Cherchons maintenant les asymptotes : nous avons d'abord pour directions asymptotiques les directions données par l'équation

$$y^3 + 6xy^2 - 3x^2y - 2x^3 = 0;$$

cette équation en $\frac{y}{x}$ a une racine positive, comprise entre $\frac{1}{2}$ et 1, et deux racines négatives, comprises entre $-\infty$ et -1, et -1 et 0 ; la cubique a donc trois asymptotes simples. Soit t_1 la valeur de $\frac{y}{x}$ comprise entre $\frac{1}{2}$ et 1 ; l'asymptote correspondante a pour équation

$$y - t_1x - \frac{2a}{3}\frac{(2t_1 - 1)(t_1 + 2)}{t_1^2 + 4t_1 - 1} = 0;$$

il est facile de vérifier que cette asymptote passe au point dont les coordonnées sont $\frac{a}{3}$ et $\frac{2a}{3}$, c'est-à-dire au centre de gravité du triangle OAB ; les deux autres asymptotes passent aussi en ce point. En outre l'équation aux coefficients angulaires des asymptotes est identique à celle qui donne les trois valeurs de $\operatorname{tg}\frac{a}{3}$ en fonction de $\operatorname{tg} a$, quand on prend pour valeur de $\operatorname{tg} a$ le nombre -2. Il n'y a donc plus rien à dire sur ce sujet.

Posons maintenant $y = tx$ et discutons l'équation entre x et t,

$$(t^3 + 6t^2 - 3t - 2)x^2 - 4a(t + 2)\left(t - \frac{1}{2}\right)x + 4a^2\left(t - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

La condition de réalité des racines de l'équation en x nous donne à nouveau la séparation en régions déjà obtenue ; appelons alors t_1, $-t_2$, $-t_3$, les trois racines du coefficient de x^2, c'est-à-dire les coefficients angulaires des directions asymptotiques, l'équation s'écrira

$$(t + t_2)(t + t_3)(t - t_1)x^2 - 4a(t + 2)\left(t - \frac{1}{2}\right)x + 4a^2\left(t - \frac{1}{2}\right) = 0;$$

elle nous montre immédiatement que dans l'intervalle $\left(\frac{1}{2}, t_1\right)$, par exemple, x a une valeur

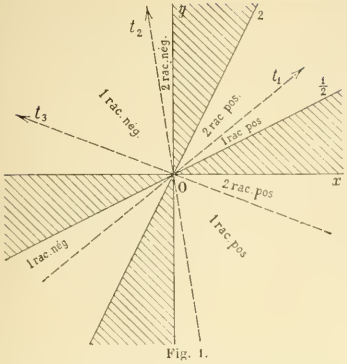


Fig. 1.

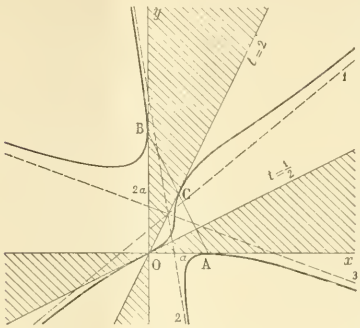
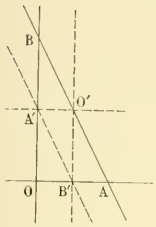


Fig. 2.

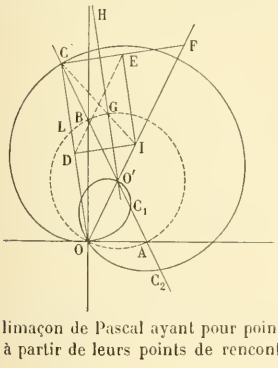
positive et une négative ; que, dans l'intervalle $(t_1, 2)$, x a deux valeurs positives; etc. Les résultats de cette discussion très facile sont consignés sur la petite figure ci-contre (*fig.* 1). Il suffit alors de se rappeler que la courbe est une cubique, et de rapprocher de ceci tout ce qui a été dit antérieurement pour pouvoir tracer la courbe (*fig.* 2).

Bonnes solutions : MM. Lhériaud et Blazy-Lacombe (lycée de Toulouse).
Solutions satisfaisantes : MM. A. Laureaux (lycée de Besançon) et J. Marchal.
M. Sugot a envoyé une solution qui serait excellente, sans une erreur dans le lieu des foyers.

Solution géométrique. — Les paraboles du réseau sont évidemment inscrites dans le triangle O'A'B' ayant pour sommets les milieux des côtés du triangle OAB. Le point de rencontre de la parabole considérée à un instant donné avec le diamètre qui passe en O est le point de contact avec A'B' ; le lieu de ce point est donc la droite A'B'. Le lieu du foyer est évidemment le cercle circonscrit au triangle O'A'B'.



Les hyperboles équilatères du réseau forment un faisceau linéaire ; elles tracent donc sur une droite quelconque une involution, et deux d'entre elles touchent cette droite aux points double de l'involution ; il y a donc deux points du dernier lieu, autres que O', sur une droite quelconque issue du point O' ; d'ailleurs une seule de ces hyperboles passe en O' ; le point du lieu ne vient donc qu'une fois en O' sur la tangente à cette hyperbole, et le lieu est une cubique tangente en O' à cette dernière droite. Or cette tangente en O' est la polaire de O' par rapport à l'hyperbole ; donc elle passe en O. D'autre part, il y a trois hyperboles impropres dans le faisceau, les couples de bissectrices des angles A, B, O ; le lieu passe donc aux trois points A, B et O. Pour avoir la tangente en A, il faut trouver un point de la courbe infiniment voisin de A ; ce point est sur la polaire d'un point infiniment voisin de B par rapport au couple de bissectrices de l'angle A ; à la limite cette polaire coïncide avec la droite OA, polaire de B ; donc la tangente en A est OA. De même la tangente en B est OB. Pour la même raison, la tangente en O est la polaire du point O' par rapport au couple de bissectrices de l'angle O ; c'est donc la perpendiculaire à l'hypoténuse abaissée du point O.



Cherchons maintenant les directions asymptotiques. Soit O'H l'une d'elles ; cette droite est asymptote à une des hyperboles équilatères du réseau ; la polaire de O' par rapport à cette hyperbole passe au point O et est parallèle à O'H ; soient OC cette droite et C son point de rencontre avec AB ; la polaire du point C est la droite OO'. Menons alors CF perpendiculaire à CO ; les deux droites CO et CF sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole envisagée et, par suite, les milieux D et E des portions CO et CF, comprises entre le point C et sa polaire, sont situés sur l'hyperbole ; le diamètre qui passe au point C est donc la droite CGI qui joint le point C au milieu de DE ; ce diamètre coupe O'H au point G, qui est le centre de l'hyperbole ; d'autre part, ce centre est sur le cercle circonscrit au triangle OAB. Les deux triangles COI et LOO' étant isocèles, O'L est parallèle à GC et la figure CGO'L est un parallélogramme ; donc LC = O'G = rayon du cercle décrit sur AB comme diamètre. Le point C est donc aussi sur un limaçon de Pascal ayant pour point double le point O et obtenu en portant sur les cordes issues de ce point, à partir de leurs points de rencontre avec le cercle, des longueurs égales au rayon ; ce limaçon rencontre la

droite AB en trois points C, C_1, C_2 et au point O', qui ne joue pas le même rôle que les autres points ; il y a donc trois directions asymptotiques réelles OC, OC_1, OC_2. La cubique est alors bien déterminée.

J. LHÉRIAUD (lycée de Toulouse).

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

503. — *Un cône de révolution de 1/2 angle au sommet 50° a son axe vertical et sa directrice dans le plan horizontal de projection ; sa projection est tangente à xy. Son sommet S a pour éloignement 7cm,5.*

Par S on mène la droite de profil SA dont la trace horizontale A a pour éloignement 22cm.

Un second cône de révolution, dont l'axe est de bout, a son sommet Σ sur SA. Son 1/2 angle au sommet est 45° et Σ a pour éloignement 12cm.

Représenter le solide commun à ces deux cônes en le limitant aux deux plans de projection.

Le plan de profil mené par la droite SA étant un plan de symétrie par rapport aux deux cônes et aux plans de projection, les projections du solide commun sont symétriques par rapport à la droite ss'.

Ce plan de profil coupe les deux cônes suivant quatre génératrices dont on a facilement le rabattement sur le plan horizontal de projection ; le contour apparent du solide commun limité aux deux plans de projection se rabat ainsi suivant les deux quadrilatères $s_1b_1a'cs$ et $s_1d_1e_1f_1$. Les points (b, b') et (d, d'), communs à deux génératrices, appartiennent à l'intersection ; le point c est le sommet de l'hyperbole équilatère, trace du cône Σ sur le plan horizontal, et qui a pour asymptotes le contour apparent horizontal de ce cône ; de même, le point f' est le sommet de l'hyperbole, trace du cône S sur le plan vertical, et qui a pour asymptotes le contour apparent vertical de ce cône. Les portions utiles de ces hyperboles sont limitées par les cercles de base s et σ' des deux cônes.

Détermination d'un point quelconque de l'intersection. — Pour obtenir des points de l'intersection, il suffit de couper les deux cônes par des plans dont les traces passent par les traces de même nom a et v' de la droite SΣ ; chacun de ces plans détermine en général quatre génératrices, dont les quatre points de rencontre appartiennent à l'intersection.

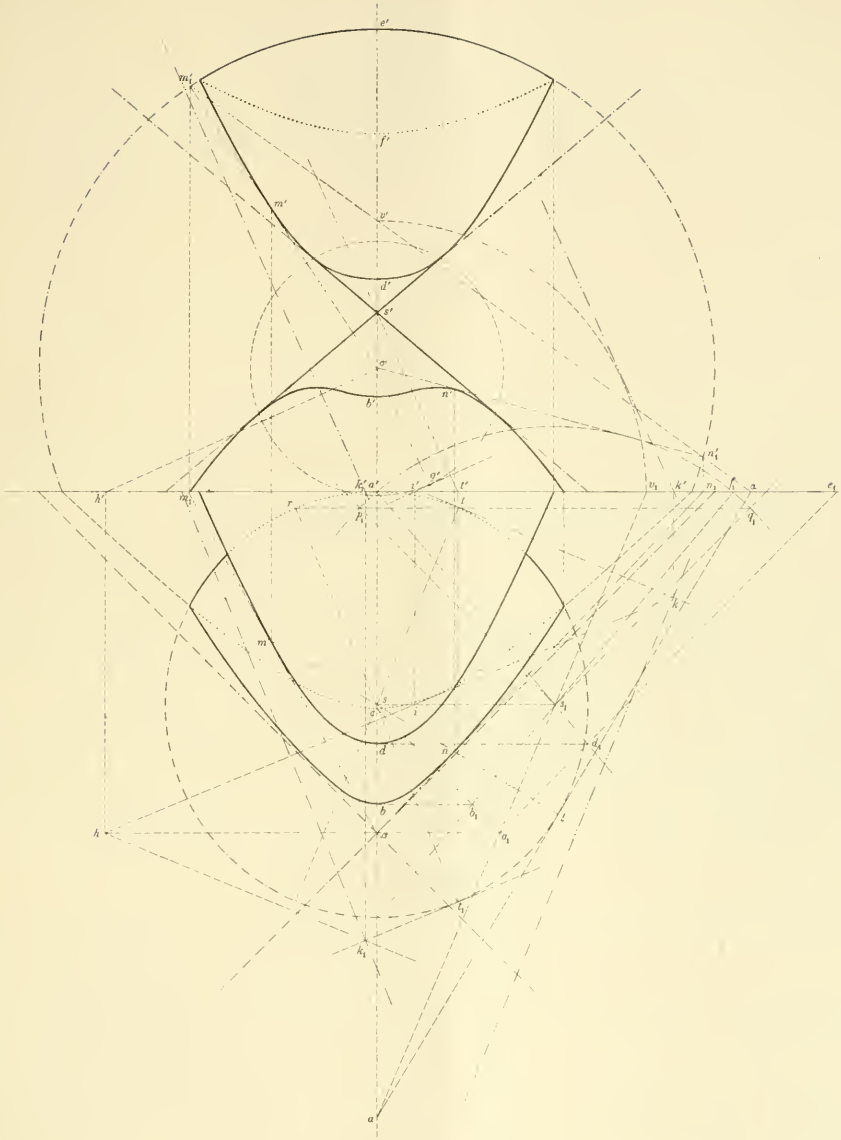
Appliquons en particulier cette construction au plan axe', tangent au cône S suivant la génératrice projetée horizontalement en st ; ce plan coupe le cône Σ suivant deux génératrices limites $(\tau m_1, \sigma' m_1')$ et $(\tau n_1, \sigma' n_1')$, tangentes à l'intersection en deux points (m, m') et (n, n'), situés dans le plan projetant vertical de st.

Points de l'intersection situés sur les contours apparents des cônes. — Pour le cône S, ces points s'obtiennent en coupant le cône Σ par un plan de front passant par S ; la section est un cercle projeté en $\sigma'y'$ sur le plan vertical ; ce cercle détermine sur le contour apparent vertical du cône S quatre points de l'intersection.

En coupant de même le cône S par un plan horizontal passant par Σ, on obtiendrait un cercle qui, comme on le voit aisément, n'a aucun point commun avec le contour apparent horizontal de Σ. Donc les branches de l'intersection sont entièrement situées dans l'une des deux moitiés inférieure ou supérieure du cône Σ. Outre les deux branches indiquées sur l'épure, il existe une troisième branche entièrement située dans la moitié inférieure de la seconde nappe du cône Σ ; cette branche extérieure à la partie commune des deux cônes n'a pas été figurée afin de ne pas allonger inutilement le bas de l'épure.

Détermination des asymptotes de l'intersection. — Les directions asymptotiques sont fournies par les génératrices communes au cône S et au cône de même sommet ayant ses génératrices parallèles à celles du cône Σ. Pour obtenir ces génératrices, prenons comme plan vertical de projection le plan de profil contenant la droite SA, et coupons les deux cônes par une sphère de centre (s, s_1) et de rayon s_1a' ; cette sphère rencontre le cône S suivant le cercle de base et le cône Σ suivant un cercle de front projeté verticalement en p_1q_1 sur le nouveau plan de projection ; les points de rencontre t, r de pq avec le cercle s sont les traces horizontales de deux génératrices communes. En considérant, le cercle symétrique de p_1q_1 par rapport à s, déterminé par la sphère sur la seconde nappe du cône Σ, on aurait en t_1 et r_1 les traces horizontales de deux autres génératrices communes. Il peut donc y avoir quatre asymptotes ; nous allons chercher les traces horizontales de deux de ces asymptotes, les deux autres s'en déduisant par symétrie.

La trace de l'asymptote parallèle à la génératrice commune $(st, s't')$ est à l'intersection des traces horizontales des plans tangents au cône le long des deux génératrices parallèles projetées en $s't'$ et $\sigma'y'$; la première trace est la tangente en t au cercle s et la seconde trace est la droite hi, qui joint les traces horizontales de deux



droites de front situées dans le plan tangent au cône suivant $\tau'y'$. Comme vérification, cette seconde trace doit toucher l'hyperbole, trace horizontale du cône Σ. On obtient ainsi en (h, h') la trace horizontale de l'asymptote parallèle à $(st, s't')$.

On obtient la trace (h_1, h'_1) de l'asymptote parallèle à la génératrice commune (st_1, st') en prenant le point de rencontre de la tangente en t_1 au cercle s avec la droite symétrique de hi par rapport à $h\sigma$, cette droite étant la trace du plan tangent le long de $s't'$ à la seconde nappe du cône Σ.

Les seules parties cachées de la projection du solide commun sont : horizontalement, une partie de la base du cône S et toute la trace horizontale du cône Σ ; verticalement, toute la trace verticale du cône S.

(Louis MESSENT.)

Solutions justes : MM. de Trégomain, collège Stanislas ; Lannes, à Auch.

QUESTIONS PROPOSÉES

510. — On considère les paraboles P qui, rapportées à des axes rectangulaires, ont pour équation générale

$$(y - \lambda x)^2 - 2p\lambda^3 y = 0,$$

où p est une quantité donnée et λ un paramètre variable.

1° Démontrer que par un point quelconque du plan, il passe trois axes des paraboles P. Lieu des points ω pour lesquels deux de ces axes sont rectangulaires.

2° Ce lieu est un cercle Γ. A chaque point ω de ce cercle correspondent trois paraboles P dont les axes passent par ω. Les directrices de ces trois paraboles forment un certain triangle ABC. Lieu des sommets de ce triangle.

3° Lieu des milieux des côtés du triangle ABC ; lieu de son centre de gravité.

4° Lieu du centre du cercle circonscrit au triangle ABC ; enveloppe de ce cercle.

5° Lieu du centre du cercle des neuf points du triangle ABC ; enveloppe de ce cercle.

G. Lapointe.

511. — Enveloppe des paraboles tangentes aux deux axes d'une conique fixe, ainsi qu'à la tangente et à la normale à cette conique en un même point, quand ce point décrit la conique.

E. Duporcq.

512. — En chaque point d'une parabole on mène la tangente et la normale : enveloppe de la parabole tangente à ces deux droites et admettant pour tangente au sommet l'axe de la parabole donnée.

(id.)

513. — Lieu des centres des coniques osculatrices à un cercle fixe en un point donné, et ayant leurs axes parallèles à des directions rectangulaires données.

(id.)

514. — Lieu des centres des coniques osculatrices à un cercle fixe en un point donné, et dont l'un des axes passe par un point fixe de la tangente au point d'osculation.

(id.)

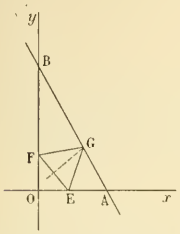
DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

477. — *Lieu du point de concours des hauteurs d'un triangle équilatéral de grandeur variable, inscrit dans un triangle rectangle donné* OAB.

(École des Ponts et Chaussées, Cours préparatoires, 1895.)

Prenons pour axes les deux côtés de l'angle droit dirigés respectivement vers les deux autres sommets, et désignons par a et b les longueurs de ces deux côtés. Soient EFG une position du triangle équilatéral inscrit, α l'abscisse du point E et β l'ordonnée du point F ; le milieu de EF a pour coordonnées $\frac{\alpha}{2}$ et $\frac{\beta}{2}$; les deux droites AB et EF ont pour équations respectives



$$(AB) \qquad bx + ay - ab = 0,$$
$$(EF) \qquad \beta x + \alpha y - \alpha\beta = 0;$$

et, par suite, la perpendiculaire au milieu de EF a pour équation

$$\alpha\left(x - \frac{\alpha}{2}\right) - \beta\left(y - \frac{\beta}{2}\right) = 0.$$

Les coordonnées du point G sont donc données par

$$\frac{x - \frac{\alpha}{2}}{\beta} = \frac{y - \frac{\beta}{2}}{\alpha} = \lambda,$$

pour une certaine valeur de λ. Cette valeur de λ s'obtient en exprimant que les coordonnées du point G vérifient l'équation de la droite AB ; on trouve ainsi

$$b\frac{\alpha}{2} + a\frac{\beta}{2} - ab + \lambda(a\alpha + b\beta) = 0.$$

D'autre part, on doit avoir $\overline{EG}^2 = \overline{EF}^2$, c'est-à-dire

$$\left(\lambda\beta - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\lambda\alpha + \frac{\beta}{2}\right)^2 = \alpha^2 + \beta^2,$$

ou

$$\lambda^2 = \frac{3}{4};$$

on a donc $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$, le radical ayant le double signe ; par suite la relation précédente devient

$$b(\alpha + \beta\sqrt{3}) + a(\beta + \alpha\sqrt{3}) - 2ab = 0.$$

Si l'on remarque maintenant que le point de concours des hauteurs coïncide avec le centre de gravité, dans le cas actuel, on a de suite

$$x = \frac{3\alpha + \beta\sqrt{3}}{6} = \frac{\beta + \alpha\sqrt{3}}{2\sqrt{3}},$$

$$y = \frac{3\beta + \alpha\sqrt{3}}{6} = \frac{\alpha + \beta\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}.$$

L'élimination des paramètres α et β est maintenant immédiate et donne pour lieu l'ensemble des deux droites

$$by + ax \mp \frac{ab}{\sqrt{3}} = 0.$$

Ce sont deux droites parallèles à la symétrique de AB par rapport à la première bissectrice.

A. CAUSSÉ, à Castres.

---

483. — *On considère un cercle fixe et une tangente à ce cercle en un point fixe* O ; *un point* M *quelconque du cercle est le sommet d'un triangle isocèle* OMP *ayant sa base* OP *sur la tangente fixe. On demande, quand le point* M *décrit le cercle donné :*

1° *Le lieu du point de concours des hauteurs du triangle* OMP ;

2° *Le lieu du centre du cercle circonscrit à ce triangle ;*

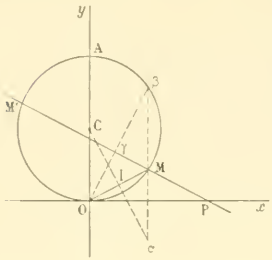
3° *Le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée de* O *sur* MP ;

4° *L'enveloppe de* PM.

Prenons pour axes la tangente au point O et le diamètre perpendiculaire ; nous aurons pour équation du cercle

$$x^2 + y^2 - 2ry = 0.$$

Cela posé, si nous désignons par α et β les coordonnées du point M, nous aurons $OP = 2\alpha$, et, par suite, pour équation de PM,



$$y = -\frac{\beta}{\alpha}(x - 2\alpha),$$

ou
$$\beta x + \alpha y - 2\alpha\beta = 0.$$

1° La hauteur abaissée du point M a pour équation $x - \alpha = 0$; celle abaissée du point O, $\alpha x - \beta y = 0$. On aura donc le lieu du point β où se coupent les hauteurs du triangle, en éliminant α et β entre ces deux équations et la relation

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2r\beta = 0,$$

qui exprime que le point M est sur le cercle; les deux premières donnent de suite $\alpha = x$, $\beta = \frac{x^2}{y}$, et, en portant ces valeurs dans la dernière équation, on obtient l'équation du lieu

(1) $$x^2(x^2 + y^2 - 2ry) = 0.$$

Cette équation se décompose en deux : $x^2 = 0$, qui représente deux fois l'axe des y, et

$$x^2 + y^2 - 2ry = 0,$$

qui représente le cercle proposé; le premier lieu est un lieu étranger introduit par la manière de mettre le problème en équations et qui tient à ce que, lorsque le point M vient en O, les deux droites Oβ et Mβ coïncident avec l'axe des y et, par suite, se coupent en tous les points de Oy.

2° Le point de rencontre des perpendiculaires élevées aux milieux des côtés s'obtient en prenant, d'une part, la droite Mβ perpendiculaire au milieu de OP, d'autre part, la perpendiculaire abaissée du centre C sur la corde OM; on aura donc le lieu de ce point α en éliminant α et β entre les équations de ces droites et la relation que ces nombres vérifient, c'est-à-dire entre les trois équations

$$x - \alpha = 0, \qquad \beta y - r^2 + \alpha x = 0,$$

et

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\beta r = 0.$$

La première donne $\alpha = x$, la seconde, $\beta = \frac{x^2}{r - y}$, et, en portant dans la troisième, on obtient

$$x^2 + \frac{x^4}{(r - y)^2} - 2r\frac{x^2}{r - y} = 0,$$

ou

(2) $$x^2(x^2 + y^2 - r^2)^2 = 0.$$

Le premier lieu, $x^2 = 0$, est encore un lieu étranger dont la provenance s'explique comme antérieurement. Le vrai lieu est le cercle

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

3° La droite PM a pour coefficient angulaire $-\frac{\beta}{\alpha}$ et passe au point P dont les coordonnées sont 2α et 0; elle a donc pour équation

$$y = -\frac{\beta}{\alpha}(x - 2\alpha),$$

ou
$$\beta x + \alpha y - 2\alpha\beta = 0;$$

la perpendiculaire abaissée de l'origine sur cette droite a pour équation $\alpha x - \beta y = 0$.

Tout revient donc à éliminer α et β entre les trois équations

$$\alpha x - \beta y = 0,$$
$$\beta x + \alpha y - 2\alpha\beta = 0$$

et
$$\alpha^2 + \beta^2 - 2r\beta = 0;$$

or la première donne $\frac{\alpha}{y} = \frac{\beta}{x} = \lambda$; d'où $\alpha = \lambda y$, $\beta = \lambda x$, et, en portant dans les deux dernières,

on a

$$2\lambda xy - x^2 - y^2 = 0,$$
$$\lambda(x^2 + y^2) - 2rx = 0;$$

l'élimination de λ entre ces deux équations donne de suite l'équation du lieu,

$$(3) \qquad (x^2 + y^2)^2 - 2rx^2y = 0.$$

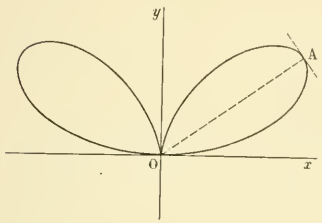
Pour construire cette courbe, nous prendrons O pour pôle, Ox pour demi-axe polaire positif, et nous remplacerons x par $\rho \cos \omega$, y par $\rho \sin \omega$; nous obtenons de suite

$$\rho = 2r \sin \omega \cos^2 \omega.$$

Nous aurons toute la courbe en faisant varier ω de 0 à 2π; d'ailleurs si on change ω en $\omega + \pi$, ρ change simplement de signe; les deux valeurs ω et $\omega + \pi$ donnent donc le même point, et l'on aura la courbe tout entière en faisant varier ω de 0 à π. D'autre part, si on change ω en $\pi - \omega$, ρ ne change pas; la courbe est donc symétrique par rapport à Oy, et pour obtenir une moitié de cette courbe, il suffit de faire varier ω de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Or la dérivée de ρ est $\rho' = 2r \cos \omega(\cos^2 \omega - 2 \sin^2 \omega)$; dans l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ le premier facteur est toujours positif, le second change de signe pour $\operatorname{tg} \omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ce qui donne un arc α compris entre 0 et $\frac{\pi}{4}$; de 0 à α, ρ' est positive, de α à $\frac{\pi}{2}$, elle est négative; donc ρ croît d'abord depuis 0 jusqu'à $\frac{2r}{3\sqrt{3}}$, puis décroît de $\frac{2r}{3\sqrt{3}}$ jusqu'à 0. La première tangente est Ox, la dernière est Oy. On peut donc construire immédiatement la courbe tout entière, en tenant compte de la symétrie par rapport à Oy.

4° Pour obtenir l'enveloppe de PM, nous remarquerons que la relation entre α et β peut s'écrire

$$\alpha^2 + (\beta - r)^2 = r^2;$$



on en déduit $\alpha = r \cos \varphi$, $\beta = r(1 + \sin \varphi)$, et, par suite, l'équation de PM s'écrit

$$(1 + \sin \varphi)x + \cos \varphi . y - 2r \cos \varphi(1 + \sin \varphi) = 0.$$

Prenons maintenant la dérivée de cette équation par rapport à φ, et résolvons les deux équations du premier degré que nous avons ainsi, par rapport à x et à y, nous obtenons aisément les équations de l'enveloppe, en fonction d'un paramètre φ,

$$(4) \qquad \begin{cases} x = 2r \cos \varphi(1 - \sin \varphi), \\ y = 2r \sin \varphi(1 + \sin \varphi). \end{cases}$$

En éliminant $\sin \varphi$ entre la seconde équation et celle qu'on obtient en divisant x par y, on obtient aisément l'équation cartésienne ordinaire de cette courbe; mais cela est sans intérêt pour nous : il vaut mieux, pour avoir la forme de la courbe, se servir des équations (4).

Ces deux fonctions de φ ont toutes deux pour période 2π; par conséquent en faisant varier φ dans un intervalle continu égal à 2π, nous aurons toute la courbe. D'autre part, si on change φ en $\pi - \varphi$, y ne change pas, x change de signe simplement; donc la courbe est symétrique par rapport à Oy; il suffit alors de faire varier φ de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, car, dans ces conditions, $\pi - \varphi$ varie de $\frac{3\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, et les deux angles φ et $\pi - \varphi$ décrivent à eux deux un intervalle d'étendue égale à 2π; les branches qui correspondent à ces deux angles sont symétriques l'une de l'autre par rapport à Oy et il suffit de construire l'une d'elles. Etudions donc les variations des fonctions x et y de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$. La dérivée de x est

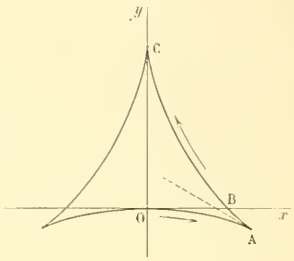
$$x' \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{d\varphi} = -2r(1 - \sin \varphi)(1 + 2 \sin \varphi);$$

celle de y,

$$y' \qquad \text{ou} \qquad \frac{dy}{d\varphi} = 2r\cos\varphi(1 + 2\sin\varphi);$$

ces deux dérivées ne changent de signe que pour $\sin\varphi = -\frac{1}{2}$ ou $\varphi = -\frac{\pi}{6}$; de $-\frac{\pi}{2}$ à $-\frac{\pi}{6}$, la première est positive, la seconde est négative, de $-\frac{\pi}{6}$ à $+\frac{\pi}{2}$, elles ont des signes contraires; pour $\varphi = 0$, $x = 0$, $y = 0$; pour $\varphi = -\frac{\pi}{6}$, $x = \frac{3\sqrt{3}}{2}r$, $y = -\frac{r}{2}$, pour $\varphi = 0$, $x = 2r$, $y = 0$; pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$, $y = 4r$. Enfin le coefficient angulaire de la tangente, μ, a pour valeur $\mu = \frac{y'}{x'} = -\frac{\cos\varphi}{1 - \sin\varphi}$, et l'on a aisément ses principales valeurs.

φ	x'	x	y'	y	μ
$-\frac{\pi}{2}$		0		0	0
	$+$	croît	$-$	décroît	
$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{3r\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{r}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
		décroît		croît	
			$+$		
0		$2r$		0	-1
	$-$	décroît	$+$	croît	
$\frac{\pi}{2}$		0		$4r$	∞



Nous avons réuni tous ces résultats dans le tableau ci-contre. Quant à la forme de la courbe, elle se déduit immédiatement de cette étude.

Solution géométrique (voir *fig.* 1.) — 1° L'angle βOP est le complément de l'angle P ou de l'angle égal MOP; donc l'arc qu'il laisse sur la demi-circonférence OMA est égal à l'arc OM, et, par suite, $O\beta$ rencontre le cercle donné sur la parallèle à Oy menée par le point M; par conséquent le point de concours des hauteurs décrit le cercle proposé.

2° La perpendiculaire élevée au milieu de OM passe au centre C; les deux triangles $IM\alpha$ et IOC sont égaux; donc $M\alpha = CO$; le lieu du point α s'obtient en faisant subir au cercle proposé une translation égale à R dans le sens YO; c'est donc un cercle égal au premier et de centre O.

4° L'angle CMO est le double de l'angle MOP; donc l'arc OM′ est le double de OM. Nous avons démontré que dans ces conditions la droite PM ou MM′ enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements (Voir le n° 1 de la 6e année, octobre 1895.)

3° Le lieu du point γ est la podaire de cette hypocycloïde par rapport au point O.

Très bonnes solutions analytiques et géométriques de MM. J. Badard (École des Mines de Saint-Étienne) et G. Soubirous (Toulouse).
Bonnes solutions : MM. J. Blandin ; E.-N. Barisien ; E. Barbre (à Douai) ; H. M. (collège Stanislas).
Bonne solution géométrique : M. J. Liébaud (lycée de Toulouse).
Solutions satisfaisantes : MM. Auzeram (Montpellier) ; F. Pegoriea (Toulouse) : Martaud (lycée Hoche).

---

490. — *On considère deux droites rectangulaires Ox et Oy, un point A fixe sur Ox, un point B fixe sur Oy et un point P, quelconque, mais donné dans le plan des axes. On considère en outre les paraboles inscrites dans le triangle OAB.*

1° *On demande l'enveloppe des polaires du point P par rapport à ces paraboles.*

2° *Cette enveloppe est une conique (C), et, en supposant que le point P se déplace dans le plan et que*

la droite AB *pivote autour de* A, *on demande le lieu du point* P *pour que la conique* (C) *passe au point* O *et que la somme des carrés des longueurs de ses axes soit constante est égale à* l^2.

3° *Trouver, dans ces conditions, le lieu des centres des coniques* (C).

Prenons pour axes OA et OB, les demi-axes positifs ayant pour directions OA et OB ; désignons OA par a, OB par b ; l'équation de la droite AB sera alors $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0$. D'autre part, nous savons que l'équation générale des coniques tangentes aux deux axes est

$$(ux+vy+w)^2+2\lambda xy=0,$$

λ étant un paramètre arbitraire ; cette conique est une parabole si $AC-B^2=0$, c'est-à-dire pour $\lambda=-2uv$; nous aurons donc l'équation générale des paraboles envisagées en exprimant que la conique

$$(ux+vy+w)^2-4uvxy=0$$

est tangente à la droite $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0$. Or si on élimine la variable d'homogénéité entre ces deux équations, on obtient l'équation

$$\left[ux+vy+w\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\right]^2-4uvxy=0,$$

qui représente les deux rayons joignant l'origine aux points de rencontre de la conique avec la droite AB ; il n'y a plus qu'à exprimer que ces deux rayons sont confondus, ce qui donne

$$\left[\left(u+\frac{w}{a}\right)\left(v+\frac{w}{b}\right)-2uv\right]^2-\left(u+\frac{w}{a}\right)^2\left(v+\frac{w}{b}\right)^2=0,$$

et finalement $u=0$ ou $v=0$ ou

$$au+bv+w=0.$$

Les deux premières conditions $u=0$ et $v=0$ donnent des paraboles impropres, composées chacune de deux droites confondues ; bien qu'analytiquement elles satisfassent aux conditions imposées, ce ne sont évidemment pas celles que l'on cherche ; la véritable condition est donc troisième : elle exprime que la corde des contacts avec les axes passe au point dont les coordonnées sont a et b ; nous expliquerons ce fait dans la solution géométrique de la question. Remplaçons w par $-au-bv$, dans l'équation de la parabole, nous aurons l'équation générale cherchée.

(1) $$[u(x-a)+v(y-b)]^2-4uvxy=0.$$

1° Soient α et β les coordonnées du point P ; l'équation de la polaire de ce point par rapport à la conique (1) est $[(\alpha-a)u+(\beta-b)v][(x-a)u+(y-b)v]-2uv(\alpha y+\beta x)=0$.
Nous aurons l'enveloppe de cette droite en exprimant que ce trinome homogène en u et v est un carré parfait ; nous avons ainsi

(2) $$[(\alpha-a)(y-b)+(\beta-b)(x-a)-2(\alpha y+\beta x)]^2-4(\alpha-a)(\beta-b)(x-a)(y-b)=0.$$

Cette équation nous montre que l'enveloppe est une conique tangente aux droites $x-a=0$ et $y-b=0$ et aussi à la droite $\alpha y+\beta x=0$. Ces résultats seront expliqués dans la solution géométrique et nous indiquerons encore à ce moment d'autres tangentes à cette conique.

2° Nous exprimerons que la conique passe à l'origine en annulant le terme constant ; puis que la somme des carrés des longueurs des axes est constante en exprimant que le centre est à une distance constante d'un sommet d'angle droit circonscrit à la conique, à une distance constante du point (a, b). La première condition s'obtient immédiatement ; elle se réduit à

(3) $$b\alpha-a\beta=0.$$

Pour former la seconde, il faut d'abord chercher le centre ; or les équations du centre sont ici

$$(b+\beta)H+2(\alpha-a)(\beta-b)(y-b)=0,$$
$$(a+\alpha)H+2(\alpha-a)(\beta-b)(x-a)=0,$$

en désignant par H la fonction linéaire

$$(\alpha-a)(y-b)+(\beta-b)(x-a)-2(\alpha y+\beta x);$$

de ces deux équations on déduit $$\frac{x-a}{\alpha+a}=\frac{y-b}{\beta+b}=\lambda\,;$$

appelons λ la valeur commune des deux rapports et exprimons que le point correspondant vérifie l'une des deux équations du centre, nous trouverons $\lambda=-\frac{1}{2}$; les coordonnées du centre sont donc $$x=\frac{a-\alpha}{2},\qquad y=\frac{b-\beta}{2}.$$

En écrivant que le carré de la distance de ce point au point (a, b) est égal à la constante l^2, nous aurons la seconde condition

$$(4)\qquad (a+\alpha)^2+(b+\beta)^2=4l^2.$$

Nous avons de suite le lieu du point P, en tirant la valeur de b de l'équation (3), $b=\frac{a\beta}{\alpha}$, et en portant cette valeur dans l'équation (4). Ce lieu a pour équation

$$(5)\qquad (\alpha^2+\beta^2)(\alpha+a)^2=4l^2\alpha^2.$$

On reconnaît là l'équation d'une conchoïde de droite, de la droite $x+a=0$, par rapport à l'origine, pour la longueur constante $2l$.

3° Les relations qui existent entre les coordonnées du point P et celles du centre sont $2x=a-\alpha$, $2y=b-\beta$; d'autre part, $b=\frac{a\beta}{\alpha}$; on a donc de suite

$$\alpha=a-2x,\qquad 2y=\beta\frac{a-\alpha}{\alpha}=\frac{2\beta x}{a-2x},\qquad \text{d'où}\quad \beta=\frac{y}{x}(a-2x).$$

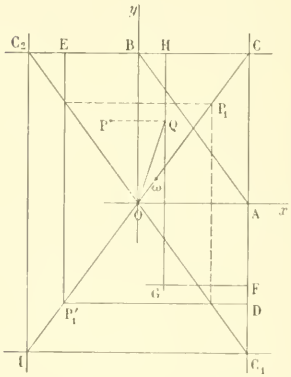
En portant ces valeurs de α et de β dans l'équation (5), nous aurons l'équation du lieu du centre; cette équation est

$$(6)\qquad (x^2+y^2)(x-a)^2=l^2x^2.$$

Elle représente encore une conchoïde de droite.

Bonne solution par les coordonnées tangentielles : M. B. Lacombe (Toulouse).

Solution géométrique. — Les paraboles inscrites dans le triangle OAB sont inscrites dans le quadrilatère formé par la droite de l'infini et les trois côtés de ce triangle; elles ont pour triangle autopolaire commun le triangle diagonal de ce quadrilatère, le triangle CC_1C_2 dont les côtés sont parallèles à ceux du triangle OAB. La polaire de C étant OC_1, la polaire du point O doit passer constamment au point C, ce qui explique pourquoi la corde des contacts de la parabole avec les axes passe au point (a, b).



On sait que l'enveloppe des polaires d'un point par rapport aux coniques d'un faisceau tangentiel est une conique tangente aux trois côtés du triangle autopolaire commun. L'enveloppe des polaires du point P par rapport aux paraboles du faisceau est donc une conique tangente aux côtés du triangle CC_1C_2. D'autre part, il y a une parabole dont la corde des contacts avec les axes passe au point P; la polaire du point P par rapport à cette parabole est la même que par rapport au couple (Ox, Oy); c'est la droite OQ symétrique de OP par rapport aux axes; cette droite est la seconde tangente à la conique issue du point O. Il y a aussi une parabole du faisceau dont le diamètre passe en P et au point de contact avec Oy; la polaire du point P par rapport à cette parabole est la droite HQ parallèle à Oy et contenant le symétrique de P par rapport à cet axe; cette droite est tangente à la conique. De même, la parallèle à Ox qui contient le symétrique de P par rapport à cet axe. La conique (C) est donc inscrite dans le rectangle CFGH.

Pour que la conique (C) passe à l'origine, il faut que les deux tangentes issues de ce point, OQ et OC_1, coïncident, c'est-à-dire que le point P soit quelque part, en P_1, sur la droite OC, symétrique de OC_1 par rapport aux axes. Alors le rectangle CFGH devient CDP'_1E, P'_1 étant le symétrique de P_1 par rapport au point O. Le centre de la conique est le point ω milieu de CP'_1 et la deuxième condition imposée est $\omega C=\text{const}$. Comme

$IP_1 = P_1C = 2\omega C$, le lieu du point P_1 est une conchoïde de la droite fixe IC_2. De même $C\omega$ est constant, et le lieu point ω est une conchoïde de la droite fixe CC_1. A. CAUSSE, à Castres.

Remarque. — Ce sera un exercice utile pour les lecteurs de la première partie de traiter cette question par l'emploi des coordonnées tangentielles.

---

491. — *On considère toutes les hyperboles équilatères*

$$H \equiv x^2 + 2\lambda xy - y^2 - 2a\lambda x = 0.$$

1° *Trouver le nombre des hyperboles* H *qui sont tangentes à une droite donnée.*

2° *Trouver la relation qui existe entre les droites* D *pour lesquelles l'un des points de contact est sur le cercle*

$$C \equiv x^2 + y^2 - 2\rho x = 0;$$

combien y a-t-il de ces droites parallèles à une direction donnée ou passant par un point donné?

3° *Combien y a-t-il d'hyperboles* H *doublement tangentes au cercle* C? *Lieu du point de contact autre que l'origine, quand* C *varie. Construire ce lieu.*

1° Soit $ux + vy + w = 0$ l'équation de la droite considérée D; formons l'équation qui donne les rayons allant de l'origine aux points de rencontre de cette droite avec l'hyperbole H; pour cela éliminons la variable d'homogénéité, z, entre les deux équations; nous aurons

$$w(x^2 + 2\lambda xy - y^2) + 2a\lambda x(ux + vy) = 0,$$

ou

$$(2a\lambda u + w)x^2 + 2\lambda(av + w)xy - wy^2 = 0.$$

Nous exprimerons qu'il y a contact en écrivant que le premier membre de cette équation est un carré parfait, ce qui donne

$$(1) \qquad \lambda^2(av + w)^2 + 2auw\lambda + w^2 = 0.$$

Cette équation donne deux valeurs pour λ; il y a donc deux hyperboles du faisceau tangentes à la droite D; ces hyperboles sont réelles si on a

$$a^2u^2w^2 - w^2(av + w)^2 > 0,$$

ou

$$(au + av + w)(-au + av + w) < 0.$$

Pour interpréter cette inégalité, considérons les deux points (a, a), $(-a, a)$, communs à toutes les hyperboles du faisceau, et situés sur les bissectrices des axes; l'inégalité précédente exprime que ces deux points sont de part et d'autre de la droite D; si donc la droite D passe entre ces deux points, les deux hyperboles tangentes à cette droite sont réelles; si la droite D laisse ces deux points d'un même côté, les deux hyperboles en question sont imaginaires; si elle passe en l'un d'eux, les deux hyperboles sont confondues.

2° Revenons à l'équation $(2a\lambda u + w)x^2 + 2\lambda(av + w)xy - wy^2 = 0$; si nous annulons les deux dérivées partielles par rapport à x et à y, nous aurons deux relations entre le λ de l'une des hyperboles tangentes à la droite D et les coordonnées d'un point quelconque du rayon qui va de l'origine au point de contact; en éliminant x et y entre elles, nous retomberons sur l'équation (1); en éliminant λ, nous aurons l'équation des deux rayons de contact

$$(av + w)x^2 + 2auxy + (av + w)y^2 = 0.$$

D'autre part, l'équation des rayons qui joignent l'origine au point de rencontre du cercle C et de la droite D, est $(2\rho u + w)x^2 + 2\rho vxy + wy^2 = 0$; nous aurons donc la condition que doit vérifier la droite D, en exprimant que ces deux équations ont une solution commune; nous obtenons ainsi

$$(2) \qquad \rho^2(u^2 + v^2)(av + w)^2 - 2\rho auv(\rho u + w)(av + w) + a^2u^2w(2\rho u + w) = 0.$$

Cette relation montre de suite que, si ρ est donné, il y a quatre droites D passant par un point donné, et deux droites D parallèles à une direction donnée. Si, au contraire, u, v, w sont donnés, elle détermine les distances à l'origine des deux points de contact de la droite correspondante avec les hyperboles du faisceau, et l'on peut vérifier aisément que la condition de réalité des valeurs de ρ est la même que celle obtenue dans le premier paragraphe pour les valeurs de λ.

3° L'hyperbole H touche le cercle C au point O; les rayons qui joignent l'origine aux deux autres points de rencontre sont fournis par l'équation

$$(\rho - a\lambda)x^2 + 2\lambda\rho xy - (\rho + a\lambda)y^2 = 0;$$

le premier membre doit être un carré parfait, c'est-à-dire que les deux dérivées partielles par rapport à x et à y doivent être nulles en même temps pour les coordonnées d'un point quelconque du rayon de contact et les valeurs de λ et de ρ qu'il faut associer pour que H et C aient un double contact. On aura donc le lieu du point de contact, autre que l'origine, en éliminant λ et ρ entre les trois équations

$$(\rho - a\lambda)x + \lambda\rho y = 0,$$
$$\lambda\rho x - (\rho + a\lambda)y = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 2\rho x = 0;$$

pour faire cette élimination, on élimine λ entre les deux premières, ce qui donne

$$\rho(x^2 + y^2) - 2a\lambda y = 0;$$

puis, ρ entre cette équation-ci et la dernière; on obtient ainsi pour équation du lieu

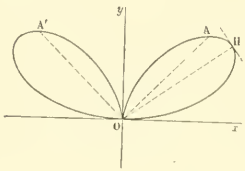
$$(3) \qquad (x^2 + y^2)^2 - 4ax^2y = 0.$$

Cette équation représente une quartique dépourvue de branches infinies, symétrique par rapport à Oy, ayant un point triple à l'origine et pour tangentes en ce point, une fois l'axe des x, deux fois l'axe des y.

Pour construire cette courbe, passons aux coordonnées polaires; nous aurons

$$\rho = 4a \cos^2 \omega \sin \omega.$$

Cette équation montre de suite qu'on aura toute la courbe en faisant varier ω dans un intervalle d'étendue totale égale à 2π, par exemple de $-\pi$ à $+\pi$; en outre, que si l'on change ω en $-\omega$, ρ change simplement de signe et que, par suite, la courbe est symétrique par rapport à Oy; en se bornant à construire une moitié de cette courbe, il suffira donc de faire varier ω de 0 à π. D'autre part, le changement de ω en $\pi - \omega$, laisse ρ invariable; on retrouve donc encore ainsi la symétrie par rapport à Oy, et il suffit finalement de faire varier ω de 0 à $\frac{\pi}{2}$. La dérivée de ρ est $4a \cos \omega(\cos^2 \omega - 2 \sin^2 \omega)$; elle s'annule pour $\alpha = \text{arc tg} \frac{1}{\sqrt{2}}$, arc compris entre $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{4}$; de 0 à α, elle est positive; de α à $\frac{\pi}{2}$, elle est négative. On a donc de suite les variations de ρ : de 0 à α, ρ croît depuis 0 jusqu'à $\frac{8a}{3\sqrt{3}}$; de α à $\frac{\pi}{2}$, ρ décroît depuis $\frac{8a}{3\sqrt{3}}$ jusqu'à 0. Rien n'est plus aisé alors que de construire la courbe. L'équation (3) montre d'ailleurs qu'elle passe aux deux points (a, a), $(-a, a)$ que nous avons déjà introduits dans la solution actuelle.



O. MOULLOT (collège Stanislas).

Bonne solution : M. B. LACOMBE (lycée de Toulouse).

QUESTIONS PROPOSÉES

515. — On donne deux droites D et D' perpendiculaires à une troisième droite Δ également donnée. Deux cercles variables C et C' sont tangents, le premier aux droites D et Δ, le deuxième aux droites D' et Δ; ces deux cercles sont en outre tangents entre eux. On demande le lieu du point de contact.

516. — Lieu des sommets des paraboles dont on donne une tangente, le point où cette tangente rencontre l'axe et un point de la directrice.

517. — Si une ellipse circonscrite à un triangle a pour centre le centre de gravité du triangle, les tangentes menées par les sommets du triangle sont parallèles aux côtés opposés. (*Concours général de Belgique, Rhétorique C, 1894.*)

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

6e Année. N° 9. Juin 1896.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

Résolution algébrique de l'équation binome $x^p - 1 = 0$ dans le cas où p est un nombre premier. Application à l'inscription des polygones réguliers de p côtés

par M. **H. Vogt**, Professeur-adjoint à la Faculté des Sciences de Nancy.

1. L'équation binome $x^p - 1 = 0$, dont nous supposons le degré premier, a une racine égale à l'unité ; les $p - 1$ autres satisfont à l'équation

$$(1) \qquad f(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1 = 0$$

et sont toutes primitives ; elles sont égales à

$$\omega, \omega^2, \omega^3, \ldots, \omega^{p-1},$$

ω désignant l'une quelconque d'entre elles.

Nous allons montrer que la résolution de l'équation binome ou, ce qui revient au même, de l'équation (1), se ramène à celle d'équations binomes de degrés égaux ou inférieurs à $p - 1$, et à l'extraction de radicaux d'indices au plus égaux à $p - 1$.

Nous nous appuierons sur la propriété des nombres que l'on appelle racines primitives pour le module p ; considérons un nombre g premier avec p et la suite de ses puissances

$$g, g^2, g^3, \ldots, g^{p-2}, g^{p-1}, \ldots ;$$

d'après le théorème de Fermat, le reste de la division de g^{p-1} par p est égal à l'unité ; si g^{p-1} est le premier nombre de la suite précédente jouissant de cette propriété, on dit que g est une racine primitive pour le module p ; nous admettrons comme démontré qu'il existe au moins une telle racine pour chaque nombre premier.

Désormais g sera choisi de cette façon ; les restes de la division par p des nombres

$$g^0, g^1, g^2, \ldots, g^{p-2}$$

sont alors distincts et égaux, dans un certain ordre, aux $p - 1$ premiers nombres. Comme l'addition d'un multiple de p à l'exposant d'une racine ω^h ne change pas la valeur de cette racine, on peut représenter les $p - 1$ racines de l'équation (1) par

$$(2) \qquad \omega, \omega^g, \omega^{g^2}, \ldots, \omega^{g^{p-2}}.$$

On voit que chacun des nombres de cette suite est la même fonction du précédent, sa puissance d'exposant g, et que l'élévation du dernier à cette même puissance donne pour résultat le premier ; l'équation (1) rentre donc dans la catégorie des équations appelées *abéliennes*, et l'on démontre que ces dernières sont résolubles par radicaux, si l'on suppose connues les racines des équations binomes de degrés égaux ou inférieurs à $p - 1$.

Nous nous servirons des méthodes de résolution des équations abéliennes ; pour plus de clarté, nous les rappellerons en les appliquant au cas actuel.

2. Soit $p - 1 = m_1 n_1$ une décomposition de $p - 1$ en deux facteurs quelconques, le cas où le second est égal à l'unité n'étant pas exclu ; prenons une racine primitive α_1 de l'équation binome

$x^{m_1} - 1 = 0$ et formons la somme

$$\psi_1 = \omega + \alpha_1\omega^g + \alpha_1^2\omega^{g^2} + \cdots + \alpha_1^{p-2}\omega^{g^{p-2}}; \tag{3}$$

en réduisant les exposants de α_1 supérieurs à $m_1 - 1$ à être égaux ou inférieurs à ce nombre, on peut écrire cette somme sous la forme

$$\psi_1 = \chi_1 + \alpha_1\chi_2 + \alpha_1^2\chi_3 + \cdots + \alpha_1^{m_1-1}\chi_{m_1},$$

$\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{m_1}$ désignant les sommes

$$\left\{\begin{aligned}
\chi_1 &= \omega + \omega^{g^{m_1}} + \omega^{g^{2m_1}} + \cdots + \omega^{g^{(n_1-1)m_1}},\\
\chi_2 &= \omega^g + \omega^{g^{m_1+1}} + \omega^{g^{2m_1+1}} + \cdots + \omega^{g^{(n_1-1)m_1+1}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\chi_{m_1} &= \omega^{g^{m_1-1}} + \omega^{g^{2m_1-1}} + \omega^{g^{3m_1-1}} + \cdots + \omega^{g^{n_1m_1-1}}.
\end{aligned}\right. \tag{4}$$

ψ_1 est une fonction entière de ω ; désignons-la un instant par $\psi_1(\omega)$; si on y remplace ω par ω^g, la nouvelle valeur qu'elle prend se déduit de (3) en remplaçant chacun des nombres de la suite (2) qu'elle renferme par le suivant et le dernier par le premier ; par ce changement, chacune des sommes (4) est remplacée par la suivante et la dernière par la première, de sorte que l'on obtient la valeur

$$\psi_1(\omega^g) = \omega^g + \alpha_1\omega^{g^2} + \alpha_1^2\omega^{g^3} + \cdots + \alpha_1^{p-2}\omega = \chi_2 + \alpha_1\chi_3 + \alpha_1^2\chi_4 + \cdots + \alpha_1^{m_1-1}\chi_1,$$

et elle est égale à $\alpha_1^{-1}\psi_1(\omega)$.

On en conclut que la puissance d'exposant m_1 de la fonction $\psi_1(\omega)$ ne change pas de valeur lorsque l'on remplace ω par ω^g et, en répétant cette opération, par l'un quelconque des nombres de la suite (2) ; on peut donc écrire

$$\overline{\psi_1(\omega)}^{m_1} = \overline{\psi_1(\omega^g)}^{m_1} = \overline{\psi_1(\omega^{g^2})}^{m_1} = \cdots = \overline{\psi_1(\omega^{g^{p-2}})}^{m_1} = \frac{1}{p-1}\left[\overline{\psi_1(\omega)}^{m_1} + \overline{\psi_1(\omega^g)}^{m_1} + \overline{\psi_1(\omega^{g^2})}^{m_1} + \cdots + \overline{\psi_1(\omega^{g^{p-2}})}^{m_1}\right];$$

Comme le dernier membre est une fonction symétrique entière des racines de l'équation (1), il s'exprime rationnellement au moyen des coefficients de cette équation, par conséquent $\psi_1^{m_1}$ est une fonction entière de α_1 à coefficients rationnels ; nous la désignerons par T_1 (*) ; nous aurons alors $\psi_1 = \sqrt[m_1]{T_1}$.

3. Considérons maintenant les fonctions analogues à ψ_1, obtenues en y remplaçant α_1 par ses puissances successives

$$\psi_2 = \chi_1 + \alpha_1^2\chi_2 + \alpha_1^4\chi_3 + \cdots + \alpha_1^{2(m_1-1)}\chi_{m_1},$$
$$\psi_3 = \chi_1 + \alpha_1^3\chi_2 + \alpha_1^6\chi_3 + \cdots + \alpha_1^{3(m_1-1)}\chi_{m_1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\psi_{m_1-1} = \chi_1 + \alpha_1^{m_1-1}\chi_2 + \alpha_1^{2(m_1-1)}\chi_3 + \cdots + \alpha_1^{(m_1-1)^2}\chi_{m_1};$$

chacune d'elles est, comme ψ_1, la racine d'indice m_1 d'une fonction entière de α_1, mais tous les radicaux ainsi obtenus ne sont pas indépendants et s'expriment tous au moyen de $\sqrt[m_1]{T_1}$. Pour s'en convaincre, il suffit de répéter le raisonnement que l'on a fait pour ψ_1 ; soit ψ_h ou $\psi_h(\omega)$ une des fonctions précédentes ; le changement de ω en ω^g lui donne la valeur

$$\psi_h(\omega^g) = \chi_2 + \alpha_1^h\chi_3 + \alpha_1^{2h}\chi_4 + \cdots + \alpha_1^{(m_1-1)h}\chi_1 = \alpha_1^{-h}\psi_h(\omega);$$

(*) Cette fonction n'est pas identiquement nulle, car sinon $\psi_1(\omega)$ le serait ; en réduisant dans cette fonction chaque exposant de ω à être $\leq p-1$, on aurait une égalité de la forme

$$\psi_1(\omega) = \omega[1 + \alpha_1^h\omega + \alpha_1^k\omega^3 + \ldots + \alpha_1^l\omega^{p-2}] = 0;$$

l'équation

$$1 + \alpha_1^h x + \alpha_1^k x^2 + \ldots + \alpha_1^l x^{p-2} = 0,$$

serait satisfaite par ω et, d'après ce qui précède, par les $p-1$ racines de l'équation (1), mais cela est impossible puisqu'elle est de degré $p-2$ et que ses coefficients ne sont pas tous nuls.

La fonction T_1 est une fonction entière de α_1 ; on peut ajouter que ses coefficients sont des nombres entiers ; la fonction $\psi_1(\omega)^{m_1}$ est en effet une fonction entière à coefficients entiers de ω et de α_1, et elle garde la même valeur numérique lorsqu'on remplace ω par une quelconque des autres racines de l'équation (1) ; elle s'exprime alors en fonction entière, à coefficients entiers, au moyen des coefficients de cette équation et de ceux de $\psi_1(\omega)^{m_1}$ (Comparer l'article de M. Tannery inséré dans le Numéro du mois d'Août 1895 de cette Revue).

par suite le produit $\psi_h(\omega)\psi_1(\omega)^{m_1-h}$ acquiert par ce changement la valeur

$$\psi_h(\omega^g)\psi_1(\omega^g)^{m_1-h} = \alpha_1^{-h}\psi_h(\omega)\alpha_1^{-(m_1-h)}\psi_1(\omega)^{m_1-h} = \psi_h(\omega)\psi_1(\omega)^{m_1-h},$$

identique à la première; c'est donc, comme $\psi_1^{m_1}$, une fonction qui reste invariable lorsqu'on remplace ω par les autres racines de l'équation (1), et qui est dès lors une fonction entière de α_1, à coefficients rationnels; nous la désignerons par T_h, de sorte que l'on a

$$\psi_h = T_h(\sqrt[m_1]{T_1})^{h-m_1} = \frac{T_h}{T_1}(\sqrt[m_1]{T_1})^h.$$

Ecrivons les valeurs ainsi obtenues pour les fonctions $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{m_1-1}$ et ajoutons-y la somme des racines de l'équation (1); nous avons les équations

$$\begin{aligned}
&\chi_1 + \chi_2 + \cdots + \chi_{m_1} = -1,\\
&\psi_1 = \chi_1 + \alpha_1\chi_2 + \cdots + \alpha_1^{m_1-1}\chi_{m_1} = \sqrt[m_1]{T_1},\\
&\psi_2 = \chi_1 + \alpha_1^2\chi_2 + \cdots + \alpha_1^{2(m_1-1)}\chi_{m_1} = \frac{T_2}{T_1}(\sqrt[m_1]{T_1})^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\psi_{m_1-1} = \chi_1 + \alpha_1^{(m_1-1)}\chi_2 + \cdots + \alpha_1^{(m_1-1)^2}\chi_{m_1} = \frac{T_{m_1-1}}{T_1}(\sqrt[m_1]{T_1})^{m_1-1};
\end{aligned}$$

si nous les ajoutons membre à membre, les coefficients de $\chi_2, \chi_3, \ldots, \chi_{m_1}$ dans la somme sont des sommes de puissances semblables des racines

$$1, \alpha_1, \alpha_1^2, \ldots, \alpha_1^{m_1-1}$$

de l'équation $x^{m_1} - 1 = 0$ et sont nuls, celui de χ_1 est égal à m_1; si nous ajoutons de même les équations précédentes membre à membre, après les avoir multipliées respectivement par $1, \alpha_1^{-k}, \alpha_1^{-2k}, \ldots, \alpha_1^{-(m_1-1)k}$, il ne reste au premier membre que le terme $m_1\chi_{k+1}$; nous obtiendrons de cette façon les valeurs de $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{m_1}$ par les égalités

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
&m_1\chi_1 = -1 + \sqrt[m_1]{T_1} + \frac{T_2}{T_1}(\sqrt[m_1]{T_1})^2 + \cdots + \frac{T_{m_1-1}}{T_1}(\sqrt[m_1]{T_1})^{m_1-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&m_1\chi_{k+1} = -1 + \alpha_1^{-k}\sqrt[m_1]{T_1} + \alpha_1^{-2k}\frac{T_2}{T_1}(\sqrt[m_1]{T_1})^2 + \cdots + \alpha_1^{(m_1-1)k}\frac{T_{m_1-1}}{T_1}(\sqrt[m_1]{T_1})^{m_1-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

La détermination des sommes $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{m_1}$ se ramène ainsi à la résolution de l'équation binome $x^{m_1} - 1 = 0$ et à l'extraction d'une racine d'indice m_1; on peut remarquer que la même formule, par exemple celle qui donne ψ_1, peut servir à représenter les m_1 sommes inconnues, en y donnant au radical $\sqrt[m_1]{T_1}$ toutes les déterminations dont il est susceptible, et qui sont égales à

$$\sqrt[m_1]{T_1},\quad \alpha_1^{-1}\sqrt[m_1]{T_1},\quad \alpha_1^{-2}\sqrt[m_1]{T_1},\quad \ldots,\quad \alpha_1^{-(m_1-1)}\sqrt[m_1]{T_1}.$$

Si $m_1 = p - 1$, l'équation (1) se trouve résolue, car les quantités $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{m_1}$ se réduisent dans ce cas aux racines elles-mêmes, et les formules (5) donnent leurs valeurs; il y a cependant avantage, pour le calcul de ces racines, à supposer m_1 inférieur à $p - 1$; alors, si n_1 est supérieur à l'unité, le problème est ramené à la recherche des nombres qui composent chacune des sommes (4). Ces sommes sont les racines d'une équation de degré m_1 à coefficients entiers, car le polynome

$$\varphi_1(x) = (x - \chi_1)(x - \chi_2)\ldots(x - \chi_{m_1})$$

a pour coefficients des fonctions entières de ω restant invariables par le changement de ω en ω^g et ils sont, d'après un raisonnement déjà fait, des fonctions entières des coefficients de l'équation (1); l'équation $\varphi_1(x) = 0$ est une équation résolvante dont les racines sont fournies par les égalités (5).

4. Nous allons maintenant former les m_1 équations de degré n_1 dont les racines sont les quantités comprises dans chacune des lignes du tableau

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} \omega,\ \omega^{g^{m_1}},\ \omega^{g^{2m_1}},\ \ldots,\ \omega^{g^{(n_1-1)m_1}}, \\ \omega^{g},\ \omega^{g^{m_1+1}},\ \omega^{g^{2m_1-1}},\ \ldots,\ \omega^{g^{(n_1-1)m_1+1}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \omega^{g^{m_1-1}},\ \omega^{g^{2m_1-1}},\ \omega^{g^{3m_1-1}},\ \ldots,\ \omega^{g^{n_1m_1-1}}; \end{array}\right.$$

Soit $S(\omega)$ une fonction symétrique entière quelconque des racines comprises dans la première ligne ; c'est une fonction entière de ω : si on y change ω en $\omega^g, \omega^{g^2}, \ldots$ on forme les fonctions $S(\omega^g)$, $S(\omega^{g^2})$, ..., qui sont analogues à la première, et composées au moyen des quantités qui entrent dans la deuxième ligne, dans la troisième, etc. ; formons alors, d'après la méthode de Lagrange, le polynome

$$F(x) = \frac{S(\omega)\varphi_1(x)}{\varphi_1'(\chi_1)(x-\chi_1)} + \frac{S(\omega^g)\varphi_1(x)}{\varphi_1'(\chi_2)(x-\chi_2)} + \cdots + \frac{S(\omega^{g^{m_1-1}})\varphi_1(x)}{\varphi_1'(\chi_{m_1})(x-\chi_{m_1})};$$

il est de degré $m_1 - 1$ et ses coefficients, qui sont des fonctions rationnelles de ω, ne changent pas lorsqu'on remplace ω par ω^g ; ce sont donc des fonctions rationnelles des coefficients de l'équation (1), c'est-à-dire des nombres rationnels ; si l'on substitue à x l'une des racines de $\varphi_1(x) = 0$, le résultat est égal, comme on le sait, à la fonction S correspondante, de sorte que l'on a

$$S(\omega) = F(\chi_1),\quad S(\omega^g) = F(\chi_2),\quad \ldots,\quad S(\omega^{g^{m_1-1}}) = F(\chi_{m_1}).$$

Il est possible, d'après cela, de former l'équation de degré n_1

$$f_1(x, \chi_1) = 0$$

dont les racines sont les quantités comprises dans la première ligne du tableau (6) ; ses coefficients sont des fonctions entières de χ_1 à coefficients rationnels ; les équations satisfaites par les quantités comprises dans les autres lignes du tableau se déduisent simplement de la précédente en remplaçant χ_1 par chacune des autres racines de l'équation résolvante $\varphi_1(x) = 0$; ce sont

$$f_1(x, \chi_2) = 0,\quad f_1(x, \chi_3) = 0,\quad \ldots,\quad f_1(x, \chi_{m_1}) = 0.$$

5. Considérons l'une d'elles, par exemple la première $f_1(x, \chi_1) = 0$, dont les racines sont

$$\omega,\ \omega^{g^{m_1}},\ \omega^{g^{2m_1}},\ \ldots,\ \omega^{g^{(n_1-1)m_1}};$$

elle jouit d'une propriété analogue à celle de l'équation (1), car chacune de ces racines est la même fonction entière de la précédente, sa puissance d'exposant g^{m_1}, et l'élévation de la dernière à cette même puissance donne pour résultat la première ; on lui appliquera dès lors la même méthode de résolution.

Si l'on décompose n_1 en un produit de deux facteurs $n_1 = m_2n_2$, et si l'on désigne par α_2 une racine primitive de l'équation $x^{m_2} - 1 = 0$, on forme les sommes

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} \rho_1 = \omega + \omega^{g^{m_1m_2}} + \cdots + \omega^{g^{m_1(n_2-1)m_2}} \\ \rho_2 = \omega^{g^{m_1}} + \omega^{g^{m_1(m_2+1)}} + \cdots + \omega^{g^{m_1(n_2-1)m_2+m_1}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \rho_{m_2} = \omega^{g^{m_1(m_2-1)}} + \omega^{g^{m_1(2m_2-1)}} + \cdots + \omega^{g^{m_1(n_2m_2-1)}}, \end{array}\right.$$

et les fonctions

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} \rho_1 + \alpha_2\rho_2 + \alpha_2^2\rho_3 + \cdots + \alpha_2^{m_2-1}\rho_{m_2}, \\ \rho_1 + \alpha_2^2\rho_2 + \alpha_2^4\rho_3 + \cdots + \alpha_2^{2(m_2-1)}\rho_{m_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \rho_1 + \alpha_2^{m_2-1}\rho_2 + \alpha_2^{2(m_2-1)}\rho_3 + \cdots + \alpha_2^{(m_2-1)^2}\rho_{m_2}; \end{array}\right.$$

$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{m_2}$ sont les racines d'une équation résolvante

$$\varphi_2(x, \chi_1) = 0$$

de degré m_2, dont les coefficients sont des fonctions entières de χ_1 avec des coefficients rationnels, car le polynome

$$\varphi_2(x) = (x - \rho_1)(x - \rho_2)\ldots(x - \rho_{m_2})$$

a pour coefficients des fonctions restant invariables lorsqu'on remplace ω par $\omega^{g^{m_1}}, \omega^{g^{2m_1}}, \ldots$ et ces fonctions, comme $S(\omega)$, s'expriment sous forme entière au moyen de χ_i; les fonctions (8) dont les puissances d'exposant m_2 s'expriment aussi rationnellement au moyen de χ_1, permettent, comme les fonctions $\psi_1, \psi_2, \ldots$, de déterminer les valeurs de $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{m_2}$ par des formules analogues à (5)

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l} m_2\rho_1 = -1 + \sqrt[m_2]{T'_1} + \dfrac{T'_2}{T'_1}\left(\sqrt[m_2]{T'_1}\right)^2 + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_2\rho_{k+1} = -1 + \alpha_2^k \sqrt[m_2]{T'_1} + \alpha_2^{-2k}\dfrac{T'_2}{T'_1}\left(\sqrt[m_2]{T'_1}\right)^2 + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

où $T'_1, T'_2, \ldots$ sont des fonctions entières de χ_1 à coefficients rationnels.

On traitera de la même façon les équations

$$f_1(x, \chi_2) = 0, \quad f_1(x, \chi_3) = 0, \quad \ldots, \quad f_1(x, \chi_{m_1}) = 0;$$

elles fourniront chacune m_2 fonctions analogues à ρ_1, et les m_1m_2 quantités ainsi formées sont les racines de m_1 équations résolvantes de degré m_2 analogues à $\varphi_2(x, \chi_1) = 0$.

A l'aide de l'une de ces fonctions, par exemple de ρ_1, on formera une équation de degré n_3

$$f_2(x, \rho_1) = 0,$$

dont les coefficients sont des fonctions entières de ρ_1 et les racines sont les quantités $\omega, \omega^{g^{m_1m_2}}, \ldots$ dont ρ_1 est la somme, on lui appliquera, ainsi qu'aux autres équations analogues, la même méthode de résolution jusqu'à ce qu'on parvienne aux racines $\omega, \omega^g, \ldots$ elles-mêmes; l'équation proposée se trouvera ainsi résolue. Les résultats que nous venons d'obtenir peuvent être énoncés de la manière suivante :

Si l'on décompose $p - 1$ en un produit de plusieurs facteurs et si l'on a

$$p - 1 = m_1m_2m_3 \ldots m_q,$$

on détermine les racines primitives de l'équation binome $x^p - 1 = 0$ en résolvant successivement

1° une équation $\varphi_1(x) = 0$ de degré m_1 à coefficients rationnels;

2° m_1 équations $\varphi_2(x) = 0, \varphi'_2(x) = 0, \ldots$ de degré m_2 dont les coefficients sont respectivement des fonctions entières de chacune des racines de la précédente ;

3° m_1m_2 équations $\varphi_3(x) = 0, \varphi'_3(x) = 0, \ldots$ de degré m_3 dont les coefficients s'expriment d'une manière rationnelle au moyen des racines des précédentes, et ainsi de suite;

enfin 4° $m_1m_2 \ldots m_{q-1}$ équations $\varphi_q(x) = 0, \varphi'_q(x) = 0, \ldots$ de degré m_q dont les coefficients sont aussi formés d'une manière rationnelle au moyen des racines des équations précédentes.

Pour résoudre une de ces équations, telle que $\varphi_h(x) = 0$ de degré m_h, il suffit de connaître une racine primitive α_h de l'équation binome $x^{m_h} - 1 = 0$ et d'extraire un radical d'indice m_h portant sur une fonction entière de α_h et des coefficients de l'équation considérée ; les racines s'expriment par des formules analogues aux formules (5). De cette façon la résolution de l'équation binome $x^p - 1 = 0$ se ramène à celle d'équations analogues de degrés $m_1, m_2, \ldots, m_q$ et à l'extraction de radicaux successifs d'indices $m_1, m_2, \ldots, m_q$.

Ordinairement on prend pour valeurs de ces nombres $m_1, m_2, \ldots, m_q$ les facteurs premiers égaux ou inégaux de $p - 1$; les degrés des équations binomes auxiliaires et les indices des radicaux sont des nombres premiers.

6. Remarque. — Il suffit de connaître une seule racine ω de l'équation (1) pour déterminer toutes les autres; il suffit alors de calculer une seule racine χ_1 de $\varphi_1(x) = 0$, une seule racine ρ_1 de l'équation correspondante $\varphi_2(x, \chi_1) = 0$, et ainsi de suite; cependant, si l'on forme l'expression de ω au moyen des radicaux successifs $\sqrt[m_1]{T_1}, \sqrt[m_2]{T_1}, \ldots$, la formule qui la donne peut représenter les $p - 1$ racines de (1) lorsqu'on donne aux radicaux successifs toutes les déterminations dont ils sont susceptibles; nous avons vu en effet, à propos des formules (5), que la valeur de χ_1 représente les m_1 racines

de $\varphi_1(x)$ lorsqu'on remplace $\sqrt[m_1]{T_1}$ par toutes ses déterminations ; les m_1 équations

$$f_1(x, \chi_1) = 0, \quad f_1(x, \chi_2) = 0, \quad \ldots, \quad f_1(x, \chi_{m_1}) = 0$$

ne diffèrent dès lors l'une de l'autre que par la valeur attribuée à ce radical ; on peut répéter le même raisonnement sur les valeurs $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_{m_2}$ fournies par les formules (9) et continuer de proche en proche jusqu'aux valeurs des racines elles-mêmes.

Il est évident que si l'on se donne à l'avance la racine que l'on représente par ω, il faut choisir d'une manière unique la détermination des radicaux successifs; nous n'insisterons pas sur ce point.

Le cas le plus important est celui où les nombres $m_1, m_2, \ldots, m_q$ sont tous égaux à 2, alors on a $p = 2^q + 1$; les racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ sont toutes égales à -1, et les indices des radicaux sont égaux à 2; l'équation $x^p - 1 = 0$ est alors résoluble à l'aide de q extractions de racines carrées successives.

7. Je mentionnerai deux cas particuliers de la décomposition en facteurs du nombre $p - 1$.

Le premier est celui où l'on pose $p - 1 = m_1 n_1$, avec $m_1 = 2$; il n'est pas indispensable pour la suite, mais le résultat auquel il conduit est assez intéressant pour mériter d'être signalé.

Dans le cas actuel, on a $\alpha_1 = -1$ et

$$\psi_1 = \chi_1 - \chi_2,$$

avec

$$\chi_1 = \omega + \omega^{g^2} + \omega^{g^4} + \cdots + \omega^{g^{p-3}},$$
$$\chi_2 = \omega^g + \omega^{g^3} + \omega^{g^5} + \cdots + \omega^{g^{p-2}};$$

on sait que ψ_1 est une fonction entière des coefficients de $f(x)$; nous nous proposons de l'évaluer: on a

$$\begin{aligned}\psi_1^2 = (\chi_1 - \chi_2)^2 &= (\omega - \omega^g + \omega^{g^2} - \omega^{g^3} + \cdots)^2 \\ &= (\omega - \omega^g + \omega^{g^2} - \cdots)\omega \\ &\quad + (\omega^g - \omega^{g^2} + \omega^{g^3} - \cdots)\omega^g \\ &\quad + (\omega^{g^2} - \omega^{g^3} + \omega^{g^4} - \cdots)\omega^{g^2} \\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots;\end{aligned}$$

nous avons fait commencer le multiplicande de chaque produit partiel par la racine égale au multiplicateur correspondant, et nous supposons que dans chaque multiplicande les exposants de g vont en croissant constamment, quand même ils deviendraient supérieurs à $p - 2$, ce qui ne change pas le résultat. Les produits effectués fournissent le tableau suivant :

$$\begin{aligned}&\omega^2 - \omega^{g+1} + \omega^{g^2+1} - \cdots \\ &+ (\omega^2)^g - \omega^{(g+1)g} + \omega^{(g^2+1)g} - \cdots \\ &+ (\omega^2)^{g^2} - \omega^{(g+1)g^2} + \omega^{(g^2+1)g^2} - \cdots;\end{aligned}$$

chaque nombre de la première ligne est racine primitive, sauf celui qui a pour exposant $g^{\frac{p-1}{2}} + 1$, car ce dernier exposant est divisible par p, et jouit seul de cette propriété (*); si l'on désigne pour un instant par ω_1 l'un quelconque des autres nombres de cette ligne, la somme de ceux qui sont situés dans la même colonne verticale est égale à

$$\omega_1 + \omega_1^g + \omega_1^{g^2} + \cdots + \omega_1^{g^{p-2}} = -1;$$

au contraire les nombres de la colonne verticale qui renferme comme premier élément $\omega^{g^{\frac{p-1}{2}}+1}$ sont tous égaux à l'unité, et sont affectés du coefficient $(-1)^{\frac{p-1}{2}}$; on déduit de là, en effectuant la somme des différentes colonnes verticales du tableau, que la somme totale des éléments est égale à $(-1)^{\frac{p-1}{2}} p$.

Connaissant cette valeur de $(\chi_1 - \chi_2)^2$ et celle de la somme $\chi_1 + \chi_2 = -1$, on déduit les deux fonctions χ_1, χ_2 qui sont égales à

$$\frac{1}{2}\left[-1 \pm \sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}\right];$$

(*) Il n'existe en effet qu'un seul exposant h tel que $g^h = \text{mult. } p - 1$, et l'on voit, en élevant les deux membres au carré, que l'on doit avoir $g^{2h} = \text{mult. } p + 1$, par conséquent $2h = p - 1$.

elles servent à former les deux équations de degré $\frac{p-1}{2}$ dont dépendent les racines de $f(x) = 0$; elles conduisent à une propriété curieuse du polynome $f(x)$ dans le détail de laquelle nous n'entrerons pas.

8. L'autre cas est celui où, dans la décomposition de $p - 1$ en un produit

$$p - 1 = m_1 m_2 \ldots m_{q-1} m_q,$$

le dernier facteur m_q est égal à 2 ; je dis que les équations résolvantes de degrés $m_1, m_2, \ldots, m_{q-1}$

$$\varphi_1(x) = 0, \qquad \varphi_2(x) = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_{q-1}(x) = 0, \qquad \ldots$$

ont toutes leurs racines réelles.

Posons en effet $\mu = m_1 m_2 \ldots m_{q-1} = \frac{p-1}{2}$ et considérons les μ racines des équations de degré m_{q-1}

$$\varphi_{q-1}(x) = 0, \quad \varphi'_{q-1}(x) = 0, \quad \ldots ;$$

elles sont égales à la somme de deux racines ω et ont pour valeurs

$$(10) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = \omega + \omega^{g^\mu}, \\ \sigma_2 = \omega^g + \omega^{g^{\mu+1}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sigma_\mu = \omega^{g^{\mu-1}} + \omega^{g^{2\mu-1}} ; \end{array} \right.$$

comme $g^{\frac{p-1}{2}} + 1$ est divisible par p, on a $\omega^{g^\mu} = \omega^{-1}$, $\omega^{g^{\mu+1}} = \omega^{-g}$, $\ldots$, $\omega^{g^{2\mu-1}} = \omega^{-g^{\mu-1}}$, de sorte que les racines qui composent les sommes précédentes sont respectivement imaginaires conjuguées, et leurs sommes sont réelles. D'autre part, les racines $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{m_1}, \rho_1, \ldots$ des équations résolvantes successives de degrés $m_1, m_2, \ldots, m_{q-2}$ sont constituées par des sommes de quantités $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\mu$; elles sont donc également réelles.

En opérant de cette façon la décomposition de $p - 1$, c'est-à-dire en réservant un facteur 2 pour le dernier, on voit que la résolution de l'équation (1) se ramène à celle d'une suite d'équations résolubles par radicaux dont les racines, ainsi que les coefficients sont réels, et à celle de $\frac{p-1}{2}$ équations du second degré à coefficients réels et à racines imaginaires conjuguées

$$(11) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x^2 - \sigma_1 x + 1 = 0, \\ x^2 - \sigma_2 x + 1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ x^2 - \sigma_\mu x + 1 = 0. \end{array} \right.$$

9. Les quantités (10) sont précisément les racines de l'équation dont dépend $2 \cos \frac{2\pi}{p}$; supposons en effet, pour fixer les idées, que l'on ait pris pour ω la racine dont la valeur trigonométrique est

$$\cos \frac{2\pi}{p} + i \sin \frac{2\pi}{p},$$

on a alors

$$(12) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = 2 \cos \frac{2\pi}{p}, \\ \sigma_2 = 2 \cos \frac{2g\pi}{p}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sigma_\mu = 2 \cos \frac{2g^{\mu-1}\pi}{p} ; \end{array} \right.$$

ce sont précisément les racines de l'équation de degré $\frac{p-1}{2}$ à laquelle satisfait $2 \cos \frac{2\pi}{p}$; ce qui

précède montre que cette équation est abélienne et résoluble par radicaux ; elle se ramène à des équations résolvantes dont les degrés $m_1, m_2, \ldots, m_{q-1}$ sont les facteurs premiers de $\frac{p-1}{2}$, et dont toutes les racines sont réelles.

10. Les mêmes sommes (10) vont nous servir à calculer les côtés des polygones réguliers de p côtés inscrits dans la circonférence de rayon un ; ces côtés, en nombre $\frac{p-1}{2}$, sont précisément égaux à

$$C_p^1 = 2 \sin \frac{\pi}{p} = \sqrt{2 - 2 \cos \frac{2\pi}{p}},$$

$$C_p^2 = 2 \sin \frac{2\pi}{p} = \sqrt{2 - 2 \cos \frac{4\pi}{p}},$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

$$C_p^\mu = 2 \sin \frac{\mu\pi}{p} = \sqrt{2 - 2 \cos \frac{2\mu\pi}{p}};$$

les cosinus qui entrent dans leurs expressions sont tous distincts et sont égaux à ceux qui entrent dans les formules (12), par conséquent les côtés $C_p^1, C_p^2, \ldots$ sont, dans un certain ordre, représentés par les expressions

$$(13) \qquad \sqrt{2 - \sigma_1}, \quad \sqrt{2 - \sigma_2}, \quad \ldots, \quad \sqrt{2 - \sigma_\mu};$$

on en conclut ce résultat : Pour construire les côtés des polygones réguliers de p côtés inscrits dans la circonférence de rayon un, on a à construire $\frac{p-1}{2}$ lignes $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\mu$ dont les valeurs sont réelles et dépendent de l'extraction de radicaux successifs d'indices $m_1, m_2, \ldots, m_{q-1}$, puis $\frac{p-1}{2}$ lignes dont les valeurs sont représentées par les expressions (13).

On voit que le problème de la résolution de l'équation binome de degré p et celui de l'inscription des polygones réguliers de p côtés sont liés intimement l'un à l'autre et exigent l'extraction d'un même nombre de radicaux, ayant les mêmes indices : tandis que le premier dépend, après la détermination de $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\mu$, de la résolution des équations (11), le second dépend du calcul des expressions (13).

Dans le cas où les facteurs m sont tous égaux à 2, tous les radicaux sont des radicaux carrés, et sont réels, on peut construire les lignes successives qui servent à déterminer les polygones avec la règle et le compas, d'où ce résultat important, donné par Gauss pour la première fois :

On peut inscrire dans une circonférence, à l'aide de la règle et du compas, les polygones réguliers d'un nombre premier p de côtés, lorsque p est de la forme $2^\nu + 1$.

11. Remarque. — La construction des côtés des polygones réguliers de $2p$ côtés est plus simple que celle des polygones de p côtés et exige un radical de moins ; elle dépend en effet simplement de la détermination des quantités $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\mu$. Cela résulte de ce que l'on a

$$2 \cos \frac{2\pi}{p} = 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{p}\right) = 2 \sin \frac{(p-4)\pi}{2p},$$

$$2 \cos \frac{4\pi}{p} = 2 \sin \frac{(p-8)\pi}{2p},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2 \cos \frac{(p-1)\pi}{p} = 2 \sin \frac{(p-2)(p-1)\pi}{2p};$$

un raisonnement simple montre que les valeurs absolues des seconds membres sont égales aux côtés des polygones réguliers de $2p$ côtés ; ces derniers sont donc égaux aux valeurs absolues de $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\mu$;

l'inscription des pentagones et des décagones réguliers est un exemple bien connu de ce qui précède.

On trouve dans l'*Algèbre supérieure* de Serret et dans les *Leçons de Géométrie élémentaire* de M. Klein, rédigées par M. Griess, la construction des polygones réguliers de 34 côtés en partant de l'équation dont dépend $2\cos\frac{2\pi}{17}$; dans mon livre sur la *Résolution algébrique des Équations* on trouve le calcul des racines de l'équation binome $x^{17} - 1 = 0$; les remarques qui précèdent permettent d'en déduire immédiatement les côtés des polygones réguliers de 17 et de 34 côtés; on a à construire des couples successifs de lignes dont on connaît la somme ou la différence, et le produit.

ALGÈBRE

461. — *On considère un carré contenant n^2 cases. Trouver combien il y a de manières de mettre n objets identiques dans n cases de ce carré, de façon qu'il n'y ait pas deux objets dans la même colonne, plusieurs d'entre eux pouvant être dans la même ligne. Etudier aussi le cas où tous les objets sont différents.*

Il y a évidemment n façons de placer l'un des objets dans la première colonne, puis n façons de placer l'un des autres objets dans la seconde colonne, et ainsi de suite. Il y a donc en tout n^n façons de placer les n objets. Ce nombre est égal au nombre des arrangements complets de n lettres n à n. Cela est d'ailleurs facile à voir directement; écrivons en effet sur une ligne horizontale n numéros correspondants aux objets placés dans les colonnes de rangs $1, 2, 3, \ldots, n$, et égaux aux indices des lignes dans lesquelles se trouvent tous ces objets, nous obtiendrons un arrangement complet des n premiers nombres entiers; ainsi à toute manière de placer les n objets correspond un arrangement complet déterminé des n premiers nombres; réciproquement tout arrangement complet de ce genre, tel que 1 1 2 3 1 4 ..., indique une manière bien déterminée de placer les n objets. Les deux nombres sont donc bien égaux.

Si les n objets sont différents, chacune des dispositions précédentes donne naissance à $n!$ groupes distincts; il y a donc alors $n^n n!$ façons différentes de placer les n objets.

MALPLAT (pensionnat de Saint-Etienne-Valbenoite).

Bonnes solutions : MM. A. Langlois et J. Goujon (pensionnat de Valbenoite, à Saint-Etienne); E. Bally (collège Stanislas).
Solutions satisfaisantes : MM. R. Delacroix et A. Laureaux (lycée de Besançon).

473. — *On considère l'expression*

$$\frac{y(x+1)^m - x(y+1)^m + x - y}{xy(x-y)};$$

1° *Montrer que le numérateur est divisible par le dénominateur;*

2° *Trouver la limite du quotient pour $x = y = 0$;*

3° *Plus généralement, trouver le polynome en x qui représente ce quotient quand on fait $y = x$.*

Le numérateur peut s'écrire, en développant,

$$y(x^m + C_m^1 x^{m-1} + C_m^2 x^{m-2} + \cdots + C_m^{m-2} x^2 + C_m^{m-1} x + C_m^m)$$
$$- x(y^m + C_m^1 y^{m-1} + C_m^2 y^{m-2} + \cdots + C_m^{m-2} y^2 + C_m^{m-1} y + C_m^m) + x - y,$$

ou

$$xy(x^{m-1} - y^{m-1}) + C_m^1 xy(x^{m-2} - y^{m-2}) + \cdots + C_m^{m-2} xy(x - y).$$

On voit sous cette forme que ce polynome est divisible par le dénominateur $xy(x-y)$.

L'expression considérée devient alors

$$\frac{x^{m-1} - y^{m-1}}{x - y} + C_m^1 \frac{x^{m-2} - y^{m-2}}{x - y} + \cdots + C_m^{m-3} \frac{x^2 - y^2}{x - y} + C_m^{m-2}.$$

Or pour $y = x$ le rapport $\frac{x^k - y^k}{x - y}$ se réduit à kx^{k-1}; il en résulte que le polynome en x, qui représente le quotient donné quand on fait $y = x$, est

$$(m-1)x^{m-2} + C_m^1(m-2)x^{m-3} + C_m^2(m-3)x^{m-4} + \cdots + C_m^{m-3}.2x + C_m^{m-2}.$$

Pour $x = 0$, ce polynome prend la valeur $C_m^{m-2} = C_m^2 = \frac{m(m-1)}{2}$.

BLAZY-LACOMBE, lycée de Toulouse.

Ont résolu la même question : MM. E. Barré (lycée de Douai); H. Bonnard (surveillant général au lycée de Bordeaux); L.-J. Goujon et A. Langlois (pensionnat de Valbenoîte, à Saint-Etienne); A. Laureaux (lycée de Besançon); J. Lhériaud (lycée de Toulouse); G. A. Pouilliard, à Joigny (Yonne); G. Sugot (lycée Saint-Louis); N. Trandafirescu, (à Bucarest); Malplat et C. Verchère (pensionnat de Valbenoîte, à Saint-Etienne).

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

471. — I. *On considère, dans le plan, la droite* (U) *définie par l'équation*

$$(1) \qquad u^3(x-a) + 3ux - 2y = 0,$$

où a est une quantité fixe, et u un paramètre variable.

Cette droite, quand u varie, enveloppe une courbe (C) *dont on formera l'équation. La droite* (U) *touche la courbe* (C) *en un point* A *et la coupe en un point* B; *on calculera les coordonnées de ces points en fonction de u, et l'on montrera que les coordonnées de* B *se déduisent des coordonnées de* A *en y changeant u en* $-\frac{u}{2}$.

II. *Parmi les droites* (U), *on considère la droite particulière* (V) *dont on obtient l'équation en supposant* $u = 1$ *dans l'équation* (1). *Par chaque point* P *de* (V), *on peut mener deux tangentes à la courbe* (C), *autres que* (V) : *soient* Q, Q′ *les deux points de contact; on demande, connaissant l'abscisse du point* P, *de former l'équation de la droite* QQ′, *de déterminer la courbe* (E) *enveloppée par cette droite quand le point* P *décrit la droite* (V), *enfin de limiter la portion de* (E) *que touchent les droites* QQ′ *qui joignent des points réels* Q, Q′.

(*Bourses de licence, 1895.*)

I. — L'enveloppe de la droite mobile représentée par l'équation (1), quand u varie, est le lieu des points (x, y) pour lesquels l'équation du troisième degré en u a une racine double, c'est-à-dire pour lesquels les équations obtenues en annulant les deux dérivées partielles par rapport à u et à la variable d'homogénéité, ont une racine commune. Ces deux équations sont

$$u^2(x-a) + x = 0$$

et

$$ux - y = 0;$$

elles donnent de suite

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{au^2}{1+u^2}, \\[2ex] y = \dfrac{au^3}{1+u^2}. \end{cases} \qquad (A)$$

Ce sont là les coordonnées du point de contact de la droite (U) avec son enveloppe; ce sont aussi, quand u varie, les deux équations de cette courbe représentée algébriquement à l'aide d'un paramètre variable. L'élimination de u entre les équations (2) est immédiate et donne pour équation cartésienne de l'enveloppe

$$(3) \qquad x(x^2 + y^2) - ay^2 = 0; \qquad (C)$$

on reconnaît là la cissoïde de Dioclès rapportée à ses axes ordinaires.

Désignons maintenant par t le paramètre du point mobile qui décrit la courbe (C) et cherchons les points de rencontre de cette courbe avec la droite (U) qui correspond à une valeur particulière u, c'est-

à-dire exprimons que $x = \frac{at^2}{1+t^2}$, $y = \frac{at^3}{1+t^2}$ satisfont à l'équation de la droite (t); nous aurons ainsi l'équation aux paramètres des points de rencontre,

$$2t^3 - 3ut^2 + u^3 = 0.$$

Cette équation admet la racine double $t = u$ et la racine simple $t = -\frac{u}{2}$; la racine double donne le point de contact, A, la racine simple, le point de rencontre ordinaire, B; les coordonnées du point B sont donc

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{au^2}{u^2+4}, \\ y &= \frac{-au^3}{2(u^2+4)}. \end{aligned} \right. \qquad (B).$$

II. — L'équation de la droite (V) $(u = 1)$ est

$$4x - 2y - a = 0;$$

en désignant par λ l'abscisse d'un point P quelconque de cette droite, l'y du point P est $\frac{4\lambda - a}{2}$; nous aurons alors les paramètres des tangentes qui passent au point P, en exprimant que la droite (t) passe par ce point, c'est-à-dire que son équation est vérifiée par $x = \lambda$, $y = \frac{4\lambda - a}{2}$; nous obtenons ainsi

$$(\lambda - a)u^3 + 3\lambda u - 4\lambda + a = 0,$$

équation qui admet évidemment la racine 1, puis les deux racines de l'équation du second degré

$$(5) \qquad (\lambda - a)u^2 + (\lambda - a)u + 4\lambda - a = 0.$$

Cette équation donne les paramètres t et t' des deux autres tangentes qui passent au point P. En portant ces valeurs t et t' à la place de u dans les équations (2), on obtient les coordonnées des deux points de contact Q et Q'.

L'équation de la droite qui unit ces deux points est alors

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ at^2 & at^3 & t^2+1 \\ at'^2 & at'^3 & t'^2+1 \end{vmatrix} = 0;$$

en développant cette équation et divisant le premier membre par $t - t'$, on peut écrire ainsi qu'il suit l'équation de cette corde des contacts

$$[\overline{tt'}^2 + (t+t')^2 - tt']x - (t+t')y - a\overline{tt'}^2 = 0;$$

il suffit d'y remplacer $t + t'$ par -1 et tt' par $\frac{4\lambda - a}{\lambda - a}$ pour avoir l'équation de la droite QQ'; on trouve ainsi

$$(6) \qquad (3\lambda^2 - 5a\lambda + a^2)x + (\lambda - a)^2 y - a(4\lambda - a)^2 = 0.$$

Mais il vaut mieux, après avoir remplacé $t + t'$ par -1, garder tt' comme paramètre variable; l'équation de la droite s'écrit alors

$$\overline{tt'}^2(x - a) - tt'x + x + y = 0,$$

et il suffit d'exprimer que cette équation du second degré en tt' a une racine double pour avoir l'enveloppe. On trouve ainsi la conique

$$(7) \qquad 4(x - a)(x + y) - x^2 = 0;$$

cette courbe passe à l'origine, y admet pour tangente la droite $x + y = 0$; de plus elle admet pour asymptote la droite $x = a$, pour centre le point de coordonnées $x = a$, $y = -\frac{a}{2}$, et pour autre direction asymptotique la direction $y = -\frac{3}{4}x$; elle est donc facile à construire.

Il nous reste à reconnaître maintenant quels sont les arcs de cette courbe qui sont touchés par des droites QQ′ joignant des points réels de la courbe (C). Pour que les points Q et Q′ soient réels, il faut que les valeurs de t et t' soient réelles, ce qui conduit à

$$(\lambda - a)^2 - 4(\lambda - a)(4\lambda - a) \geqslant 0,$$

ou

$$(\lambda - a)^2\left[1 - 4\frac{4\lambda - a}{\lambda - a}\right] \geqslant 0,$$

ou enfin, comme

$$\frac{4\lambda - a}{\lambda - a} = tt',$$

$$1 - 4tt' \geqslant 0.$$

Or pour les points de l'enveloppe l'équation du second degré en tt' a une racine double; on a donc pour chacun de ces points,

$$tt' = \frac{x}{2(x - a)},$$

et la condition que doivent vérifier les points cherchés sur l'enveloppe devient

$$(x - a)(-x - a) \geqslant 0,$$

ou

$$a^2 - x^2 \geqslant 0.$$

Cette condition n'est remplie que pour les points situés entre les deux parallèles à Oy, $x - a = 0$ et $x + a = 0$, et pour les points situés sur ces droites.

AUZERAM (à Montpellier).

Bonnes solutions : MM. A. CAUSSÉ (à Castres); MALPLAT (pensionnat de Valbenoîte, à Saint-Étienne); J. LHÉRIAUD (lycée de Toulouse).

Solutions satisfaisantes : MM. B. LACOMBE (lycée de Toulouse); G. SCIGOT (lycée Saint-Louis); A. LAUREAUX (lycée de Besançon).

PHYSIQUE ET CHIMIE

350. — *Étudier l'éclairement produit à une distance très grande* L *par un projecteur formé d'un objectif infiniment mince, de surface* S *et de distance focale* F, *et muni d'une source lumineuse de surface* s *et d'éclat intrinsèque uniforme* E, *placée normalement à l'axe tout près du foyer. Considérer, en particulier, l'image donnée par un objectif récepteur, de surface* S *et de foyer* F′, *installé à la distance* L *en regard de l'objectif transmetteur; déterminer enfin l'effet produit par un oculaire servant à examiner cette image. On négligera les pertes de lumière par absorption et par réflexion.*

(*École Normale supérieure, 1894.*)

Suivons, pour traiter la question, la méthode indiquée dans la solution de la question 386 (avril 1895).

La quantité de lumière, q, que reçoit un élément de surface ε, situé à la distance L, est passée, avant de se réfracter dans l'objectif transmetteur, par l'élément conjugué ω situé à une distance a de cet objectif et à une distance α de la source lumineuse. D'après les conditions énoncées, cette distance α est nécessairement très petite, et une partie seulement, σ, de la source lumineuse, intervient

dans le phénomène; il en résulte l'expression

$$q = \frac{E\omega\sigma}{\alpha^2}.$$

Or on a $\frac{\omega}{\varepsilon} = \frac{a^2}{L^2}$ et $\frac{\sigma}{S} = \frac{\alpha^2}{a^2}$.

Remplaçons ω et σ par leurs valeurs, il vient

$$q = \frac{ES}{L^2}\varepsilon.$$

L'éclairement est donc le même que celui que produirait l'objectif s'il avait le même éclat que la source, et nous pouvons substituer au système le disque lumineux d'éclat E et de surface S.

Ce disque envoie sur le récepteur une quantité de lumière

$$Q = \frac{ESS'}{L^2}$$

qui se répartit ensuite sur une image dont la surface est

$$S\left(\frac{F'}{L - F'}\right)^2 \quad \text{ou sensiblement} \quad S\frac{F'^2}{L^2}.$$

L'éclairement de cette image est représenté par le quotient de ces deux quantités qui est égal à

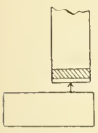
$$\frac{ES'}{F'^2}.$$

Cette image étant sensiblement au foyer, on peut dire que son éclairement est le même que s'il était produit par le récepteur S' supposé pourvu de l'éclat E.

La dernière partie du problème n'est autre que la question de la clarté dans une lunette astronomique : si on examine l'image avec un oculaire de puissance $\frac{1}{f}$, on verra un disque de surface apparente $\frac{S}{L^2}\frac{F'^2}{f^2}$ dont l'éclat paraîtra égal ou inférieur à E suivant que la pupille de l'observateur sera plus petite ou plus grande que le cercle oculaire de la lunette.

---

465. — *Un piston sans frottement de poids π, de section S^{cq}, repose sur le fond d'un cylindre vertical ouvert à sa partie supérieure dans l'atmosphère. Dans le fond se trouve une soupape qui met le cylindre en relation avec une chaudière de capacité V litres qui contient M^{kg} d'eau et de vapeur et qui est maintenue à une température constante T à laquelle correspond une pression de vapeur de P^{kg} par centimètre carré.*



Le cylindre est chauffé à une température T_1 telle que :

1° *La pression P_1^{kg} par centimètre carré correspondante soit exactement celle qui est transmise par le piston;*

2° *La différence $P - P_1$ soit exactement celle qui est nécessaire pour le fonctionnement de la soupape.*

On demande de calculer le déplacement du piston.

Exercice numérique : $V = 30$ *litres*, $T = 165°$, $P = 7^{kg},13$,
$M = 1^{kg}$, $T_1 = 144°$, $\pi = 1000^{kg}$.

Rayon du piston : $R = 31^{cm},43$

Densité de la vapeur d'eau : $d = 0,622$

Coefficient de dilatation des gaz : $\alpha = 0,00367$

(*École Centrale, 1895, 2e session.*)

La masse d'eau M doit remplir, à l'état de vapeur, le volume V à la température T et à la pression P, et le volume Sx à la température T_1 et à la pression P_1.

Appelons P_0 la pression normale, que nous supposerons régner sur la face supérieure du piston ; la pression transmise par celui-ci sera $P_0 + \frac{\pi}{S}$. Nous pouvons donc écrire l'équation

$$M = Vd.0,001293 \frac{P}{P_0} \frac{1}{1 + \alpha T} + Sxd.0,001293 \frac{P_0 + \frac{\pi}{S}}{P_0} \frac{1}{1 + \alpha T_1}.$$

Pour faire l'application numérique, nous évaluerons x en centimètres, S en centimètres carrés, V en centimètres cubes et M en grammes; V sera donc égal à 30000, M à 1000; les autres nombres seront ceux de l'énoncé; P_0, évalué en kilogrammes par centimètre carré, est égal à 1,0336.

On trouve ainsi :

1° pour le poids de vapeur contenu dans la chaudière : $103^{gr},66$;

2° pour le déplacement demandé : $418^{cm},46$.

Il importe d'observer que ce déplacement est un maximum, car il résulte de l'énoncé qu'il y a équilibre pour toute position du piston inférieure à la position calculée et, en particulier pour la position initiale.

De plus il semble, d'après l'énoncé, que la pression P_1 dût être la tension maxima correspondant à la température T_1; or il s'en faut de beaucoup que les données numériques satisfassent à cette condition.

---

466. — *On chauffe* 10^{gr} *de phosphore avec un excès de sulfure de baryum et d'eau. Les gaz dégagés sont reçus dans une dissolution préparée en attaquant* 100^{gr} *d'argent pur par l'acide azotique, étendant d'eau et ajoutant un excès d'ammoniaque. On demande :*

1° *La nature du précipité qui se forme;*

2° *Le poids d'argent dissous restant dans la liqueur ammoniacale.*

$H = 1$, $O = 16$, $S = 32$, $Az = 14$, $P = 31$, $Ag = 108$, $Ba = 137$.

(*École Centrale, 1895, 2e session.*)

On a les réactions :

$$x\{8P + 3BaS + 12H^2O = 3(PO^2H^2)^2Ba + 3H^2S + 2PH^3\},$$

$$3x\{H^2S + 2AzO^3Ag = 2AzO^3H + Ag^2S\},$$

$$2x\{PH^3 + 8AzO^3Ag + 4H^2O = 8AzO^3H + PO^4H^3 + 8Ag\},$$

le coefficient x étant déterminé par le poids du phosphore :

$$8 \times 31 \times x = 10.$$

Le précipité se compose donc de sulfure d'argent contenant un poids d'argent $6 \times 108 \times x$ et d'argent libre pesant $16 \times 108 \times x$. En remplaçant x par sa valeur, on trouve ainsi $95^{gr},8$ d'argent ; il en reste donc $4^{gr},2$ dissous dans la liqueur ammoniacale.

M. L. Gouzon, pensionnat de Saint-Étienne-Valbenotte, a résolu la question en supposant que l'hydrogène phosphoré produisait un dépôt de phosphure d'argent, comme l'indiquent, en effet, quelques auteurs. On trouve, dans cette hypothèse, que le précipité total renferme $52^{gr},26$ d'argent et qu'il en reste, par conséquent $47^{gr},74$ à l'état dissous.

---

505. — *Les températures étant évaluées avec le thermomètre à hydrogène, le coefficient moyen de dilatation du mercure de* 0° *à* $t°$ *est donné par la formule empirique*

$$m = a + bt, \qquad a = 179 \times 10^{-6}, \qquad b = 2522 \times 10^{-11}$$

et le coefficient de dilatation du verre par la formule

$$k = \alpha + \beta t, \qquad \alpha = 26 \times 10^{-6} \qquad \beta = 1475 \times 10^{-11}.$$

On demande quelle est, à 300° *du thermomètre à hydrogène :*

1° *La température t' qui serait indiquée par un thermomètre fondé sur la dilatation réelle du mercure;*

2° *La température t'' indiquée par un thermomètre à mercure ordinaire.*

Les différents volumes d'un même corps étant :

V_0 à la température de la glace fondante,

V_{100} à la température de l'eau bouillante,

V à la température t d'une échelle thermométrique quelconque,

on sait que la température θ qu'indique ce corps, choisi comme thermométrique, lorsqu'il occupe le volume V, est, par définition,

$$\theta = 100\,\frac{V - V_0}{V_{100} - V_0}. \tag{1}$$

1° Le corps thermométrique est le mercure :

$$\theta' = 300\,\frac{a + 300b}{a + 100b} = 308^\circ,34.$$

2° Le corps thermométrique est le mercure dans le verre.

Dans la formule (1), les V désignent les volumes apparents du mercure, définis par l'égalité

$$V = V_0\,\frac{1 + mt}{1 + kt};$$

$$\theta'' = 300 \times \frac{1 + 100\alpha + 10000\beta}{1 + 300\alpha + 90000\beta} \times \frac{a - \alpha + 300(b - \beta)}{a - \alpha + 100(b - \beta)} = 302^\circ,16.$$

R. DELACROIX.

CONCOURS DE 1896

Concours généraux de mathématiques spéciales

Mathématiques (Paris et départements)

518. — On donne une ellipse E qui, rapportée à ses axes de symétrie, a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

1° On considère des ellipses S dont les axes coïncident en position avec ceux de l'ellipse E et ont 2A, 2B pour longueurs.

Trouver la relation qui doit lier A et B pour qu'on puisse inscrire dans E une infinité de triangles PQR circonscrits à S et, dans ces conditions, le lieu des sommets des rectangles touchant les ellipses S en leurs sommets.

Montrer que, dans les mêmes conditions, les normales à E aux points P, Q, R concourent en un point N.

2° Examiner si les ellipses S obtenues au n° 1 représentent *toutes* les ellipses *concentriques* à E et telles qu'on puisse inscrire dans E une infinité de triangles PQR circonscrits à S, les normales à E aux points P, Q, R étant en outre *concourantes*.

3° Montrer que parmi les ellipses S obtenues au n° 1 il y en a pour lesquelles les normales PN, QN, RN aux points P, Q, R de l'ellipse E passent respectivement par les pôles P′, Q′, R′, par rapport à E, des côtés QR, RP, PQ du triangle PQR.

4° L'ellipse S satisfaisant aux conditions énoncées au n° 3, trouver le lieu des centres des cercles conjugués aux triangles P′Q′R′, l'enveloppe de ces cercles et le lieu des points de concours N des normales PN, QN, RN à l'ellipse E.

(22 mai, de 8 h. 1/2 à 1 h. 1/2.)

QUESTIONS PROPOSÉES

519. — On considère une ellipse E et une droite Δ ; par un point quelconque M de Δ on mène les tangentes à E ; soient P et Q les deux points de contact. Les normales à E en P et Q se coupent en un point N ; de ce point on peut mener deux autres normales dont les pieds sont désignés par P′ et Q′. Le cercle circonscrit au triangle MPQ rencontre l'ellipse en deux autres points P″ et Q″, et les normales en ces points se coupent en un point N′ d'où l'on peut mener deux autres normales à l'ellipse ayant pour pieds P‴ et Q‴. Soient alors M′, M″, M‴ les pôles respectifs des droites P′Q′, P″Q″, P‴Q‴ et I, I′, I″, I‴ les projections des points M, M′, M″, M‴ sur les droites PQ, P′Q′, P″Q″, P‴Q‴. On demande :

1° Les lieux des points M′, M″, M‴ ;

2° Les enveloppes des droites P′Q′, P″Q″, MI, M′I′, M‴I‴ ;

3° Les lieux des points de rencontre de M′I′ avec PQ, de M′I′ avec MI, de MI avec PQ et de MI avec P′Q′.

Examiner ce que deviennent ces lieux quand Δ varie.

Trouver les enveloppes des lieux précédents quand Δ se déplace parallèlement à elle-même ou passe par un point fixe. E.-N. Barisien.

520. — Étant données trois coniques et une droite D, si l'on joint un point M aux points de rencontre de ces coniques avec la droite on obtient trois nouvelles cordes. Montrer que le lieu des points M pour lesquels ces trois cordes sont concourantes est la jacobienne du réseau défini par les trois coniques.

Énoncer la proposition corrélative.

Énoncer et démontrer les propositions analogues dans l'espace.

Vasnier (lycée de Versailles).

521. — On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy ; on considère une conique variable (C) ayant ses foyers réels, l'un sur Ox, l'autre sur Oy, dont la longueur de l'axe non focal est constante et égale à $2b$ et dont le cercle orthoptique passe par un point fixe A. On demande :

1° Le lieu du centre de la conique (C) ;

2° L'enveloppe des axes de la conique (C).

3° Cette enveloppe se compose de deux paraboles (P), (Q). En supposant que le point A devienne variable, quels sont les lieux que doit décrire ce point pour que la parabole (P) ou la parabole Q ait un paramètre invariable et égal à p ?

4° Trouver l'enveloppe des directrices de la conique (C) correspondant aux foyers réels.

5° Cette enveloppe se compose de deux paraboles (P_1), (Q_1) dont les directrices sont parallèles. En supposant que le point A devienne variable, trouver le lieu décrit par ce point quand la distance qui sépare les directrices des paraboles (P_1), (Q_1) est constante et égale à d. Examiner le cas particulier où $d = 4b\sqrt{2}$.

Auzeram (à Montpellier).

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ET GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Solution géométrique de la question 477. — *Lieu du point de concours des hauteurs d'un triangle équilatéral de grandeur variable inscrit dans un triangle rectangle donné.*

Je vais résoudre la question suivante, évidemment plus générale :

Une figure F reste semblable à elle-même, et trois de ses points décrivent trois droites ; trouver le lieu d'un quatrième point.

Soient P, Q, R les trois points de la figure F qui décrivent les trois droites BC, CA, AB. Les trois cercles circonscrits aux triangles AQR, BRP, CPQ se coupent, comme il est très facile de le démontrer, en un même point ω.

Les angles RωQ, QωP, PωR, suppléments respectifs des angles A, C, B, sont constants et, par suite, dans le mouvement de la figure F, le point ω reste homologue à lui-même.

Dès lors les angles RPω, QRω, PQω sont des angles constants, puisqu'ils restent homologues à eux-mêmes ; or l'angle RPω, par exemple, est égal à l'angle RBω, comme inscrits dans le même segment. La droite Bω est donc fixe, et il en est de même de Aω et Cω, ce qui prouve que le point ω est fixe.

Ainsi il existe un point de la figure mobile qui demeure fixe dans le mouvement.

Dès lors soit M un point quelconque de la figure mobile. Le rapport $\frac{\omega M}{\omega P}$ étant constant ainsi que l'angle MωP, le lieu du point M s'obtient en prenant une figure homothétique du lieu de P, avec le rapport d'homothétie $\frac{\omega M}{\omega P}$, et faisant tourner ce lieu d'un angle égal à MωP.

Le lieu du point M est donc une droite.

(La théorie des figures qui se meuvent en restant semblables à elles-mêmes se trouve dans l'ouvrage bien connu de Petersen.)

J. RICHARD, Professeur au Lycée de Tours.

---

488. — *On donne un point fixe* A *et une droite fixe* MN *ne passant pas par ce point. Deux droites* AB, AC, *de coefficients angulaires* m *et* m', *passant par le point* A *rencontrent la droite* MN *aux points* B *et* C.

1° *Ecrire l'équation générale des cercles* S *passant par les trois points* A, B, C.

2° *On suppose que* AB *et* AC *tournent autour de* A *en faisant entre elles un angle constant* θ. *On demande le lieu des centres des cercles* S.

3° *On mène des tangentes en* A, B, C *aux cercles* S. *L'angle* θ *restant constant, on demande le lieu des points de rencontre deux à deux de ces tangentes et on demande de discuter la forme de ce lieu quand* θ *varie de* 0 *à* 180°.

(*Ecole des Mines de Saint-Etienne*, 1895.)

1° Prenons deux axes rectangulaires passant au point A, l'axe des y étant parallèle à la droite MN, et désignons par a l'abscisse de cette droite. Les équations des droites AB et AC étant

$$y - mx = 0, \qquad y - m'x = 0,$$

les coordonnées des points B et C sont respectivement (a, ma) et $(a, m'a)$.

Un cercle quelconque passant par l'origine a pour équation

$$x^2 + y^2 + \lambda x + \mu y = 0;$$

en écrivant que cette équation est vérifiée par les coordonnées des points B et C, nous avons

$$a(1 + m^2) + \lambda + \mu m = 0,$$
$$a(1 + m'^2) + \lambda + \mu m' = 0,$$

d'où nous tirons sans difficulté

$$\lambda = a(mm' - 1), \qquad \mu = -a(m + m').$$

Il en résulte que l'équation générale des cercles S est

$$x^2 + y^2 + ax(mm' - 1) - ay(m + m') = 0. \qquad (S)$$

2° Nous aurons le lieu demandé en éliminant m et m' entre les équations

$$x = \frac{a}{2}(1 - mm'),$$

$$y = \frac{a}{2}(m + m'),$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{m - m'}{1 + mm'}.$$

On en tire

$$mm' = \frac{a - 2x}{a}, \qquad m + m' = \frac{2y}{a},$$

et

$$\operatorname{tg}^2\theta = \frac{(m + m')^2 - 4mm'}{(1 + mm')^2} = \frac{4y^2 + 4a(2x - a)}{4(x - a)^2}.$$

L'équation du lieu est donc

$$x^2 \operatorname{tg}^2\theta - y^2 - 2ax(1 + \operatorname{tg}^2\theta) + a^2(1 + \operatorname{tg}^2\theta) = 0,$$

ou

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{\cos^2\theta}(x - a)^2.$$

Elle représente une hyperbole qui a pour foyer le point A, pour directrice correspondante la droite MN et pour excentricité la valeur absolue de $\frac{1}{\cos\theta}$.

3° Le point de rencontre des tangentes aux points B et C est le pôle de la droite MN, les coordonnées de ce point vérifient les équations

$$\frac{2x + a(mm' - 1)}{1} = \frac{ax(mm' - 1) - ay(m + m')}{-a},$$

$$2y - a(m + m') = 0.$$

Nous en tirons $$m + m' = \frac{2y}{a}, \qquad mm' = \frac{2y^2 - a(x - a)}{a(x + a)};$$

transportons ces valeurs dans la relation

$$\operatorname{tg}^2 \theta = \frac{(m + m')^2 - 4mm'}{(mm' + 1)^2};$$

nous obtenons $$\operatorname{tg}^2 \theta = \frac{\dfrac{4y^2}{a^2} - \dfrac{4(2y^2 - a(x - a))}{a(x + a)}}{\left[\dfrac{2y^2 - a(x - a)}{a(x + a)} + 1\right]^2} = \frac{4(y^2 + a^2)(x^2 - a^2)}{(4y^2 + a^2)^2} = \frac{x^2 - a^2}{y^2 + a^2},$$

ou $$x^2 \cos^2 \theta - y^2 \sin^2 \theta - a^2 = 0.$$

Telle est l'équation du lieu du point de rencontre des tangentes en B et C au cercle S.

Cette équation représente une hyperbole rapportée à ses axes; on étudie aisément les variations de cette courbe, quand θ varie de 0 à 180°.

Considérons maintenant le point de rencontre des tangentes aux points A et B; c'est le pôle de la droite AB $(y - mx = 0)$, ses coordonnées vérifient les équations

$$\frac{2x + a(mm' - 1)}{-m} = \frac{2y - a(m + m')}{1},$$

$$ax(mm' - 1) - ay(m + m') = 0,$$

ou $$\left.\begin{aligned} 2(x + my) - a(m^2 + 1) &= 0, \\ x(mm' - 1) - y(m + m') &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Le lieu du point de rencontre des tangentes en A et B s'obtiendra en éliminant m et m' entre les équations (1) et la suivante :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{m - m'}{1 + mm'}. \quad (2)$$

En ajoutant les équations (1) membre à membre, nous avons

$$(3) \qquad x(mm' + 1) + y(m - m') - a(m^2 + 1) = 0.$$

Or de l'équation (2) on tire

$$\frac{m - m'}{\operatorname{tg} \theta} = \frac{1 + mm'}{1} = \frac{1 + m^2}{m \operatorname{tg} \theta + 1};$$

en tenant compte de ces relations, l'équation (3) peut s'écrire

$$x + y \operatorname{tg} \theta - a(m \operatorname{tg} \theta + 1) = 0.$$

Il nous est alors facile d'éliminer m entre cette équation et la première des équations (1). Nous obtenons ainsi, toutes réductions faites,

$$x^2 - y^2 \operatorname{tg}^2 \theta - 2ax(1 + \operatorname{tg}^2 \theta) + a^2(1 + \operatorname{tg}^2 \theta) = 0,$$

ou $$x^2 + y^2 = \frac{1}{\sin^2 \theta}(x - a)^2.$$

Cette équation représente une hyperbole ayant pour foyer le point A, pour directrice correspondante la droite MN et pour excentricité la valeur absolue de $\dfrac{1}{\sin \theta}$.

Cette hyperbole est aussi le lieu du point de rencontre des tangentes en A et C au cercle S.

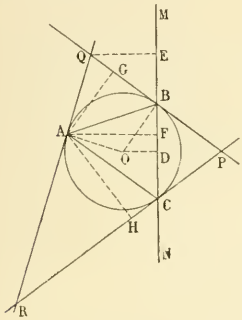
Solution géométrique. — 2° Soit O le centre d'un cercle S ; abaissons OD perpendiculaire sur MN et menons les droites OB et OA. Nous pouvons toujours supposer que θ désigne l'angle aigu des droites indéfinies AB et AC ; dans le triangle rectangle OBD, l'angle O est égal à θ et nous avons

$$OD = OB \cos \theta,$$

ou

$$\frac{OA}{OD} = \frac{1}{\cos \theta};$$

cette égalité montre que le lieu du point O est une hyperbole qui a pour foyer le point O et pour directrice correspondante la droite MN.



3° Considérons d'abord le point Q intersection des tangentes en B et A, et abaissons QE perpendiculaire sur MN. L'angle B du triangle rectangle QBE est égal à l'angle BOD, comme ayant leurs côtés perpendiculaires, donc $QBE = \theta$, et par suite

$$QE = QB \sin \theta = QA \sin \theta$$

et

$$\frac{QA}{QE} = \frac{1}{\sin \theta}.$$

Le lieu du point Q est une hyperbole ayant pour foyer le point A et pour directrice correspondante la droite MN.

Le point R, intersection des tangentes en A et C, est également situé sur cette hyperbole.

Pour avoir le lieu du point P, abaissons du point A des perpendiculaires AF, AG, AH respectivement sur les droites BC, BP et CP. Un théorème bien connu de géométrie élémentaire nous donne

$$AG \times AH = \overline{AF}^2 = a^2.$$

Si l'on mène par le point A des droites AI et AJ, respectivement parallèles aux droites BP et CP, les distances du point P à ces droites sont visiblement égales à AG et AH. Le produit de ces distances est donc constant ; comme, d'autre part, les droites AI et AJ sont fixes, puisque les tangentes aux points B et C font un angle constant avec la droite MN, on voit que le lieu du point P est une hyperbole ayant pour asymptotes les droites AI et AJ.

Louis-Joseph GOUJON, pensionnat de Valbenoîte, à Saint-Etienne.

Ont résolu la même question : MM. E.-N. Barisien ; J. Blandin, à Melay ; A. Guilleminot, pensionnat Saint-Louis, à Saint-Etienne ; A. Langlois, pensionnat de Valbenoîte, à Saint-Etienne ; L. Martaud, lycée de Versailles ; F. Pégorier, étudiant à Toulouse.

---

489. — *Soient* Ox, Oy *deux axes rectangulaires.* Ox *porte un segment fixe* AA′ : $OA = OA' = a$; Oy *porte un segment variable* BB′ : $OB \times OB' = k^2$. *On considère les coniques* (C) *passant par les quatre points* A, A′, B, B′ *et tangentes à une droite fixe* Δ *parallèle à* Ox.

1° *Montrer que les coniques* (C) *restent tangentes à une parabole* (P).

2° *Trouver le lieu des centres des coniques* (C).

3° *Soient* O *le centre d'une conique* (C) *et* M *le point où cette conique touche la parabole* (P) : *trouver le lieu du second point de rencontre de la droite* OM *avec la conique* (C).

Désignons par b l'ordonnée de la droite fixe parallèle à Ox et par λ l'abscisse du point de contact de cette droite avec la conique variable (C). L'équation d'une conique passant aux points A et A′ est

$$x^2 - a^2 + 2Axy + By^2 + 2Cy = 0;$$

exprimons qu'elle coupe Oy en deux points B et B′, tels que $OB \cdot OB' = k^2$, nous aurons $B = -\frac{a^2}{k^2}$; enfin coupons par la droite $y = b$ et exprimons que l'équation aux abscisses des points de rencontre est identique à $(x - \lambda)^2 = 0$ ou $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 = 0$, nous aurons ainsi $Ab = -\lambda$ et $-a^2 - \frac{a^2b^2}{k^2} + 2Cb = \lambda^2$; d'où, immédiatement, $A = -\frac{\lambda}{b}$, $2Cb = \lambda^2 + a^2 + \frac{a^2b^2}{k^2}$; par conséquent, l'équation générale des coniques (C) est

$$(1) \qquad x^2 - 2\lambda \frac{xy}{b} - \frac{a^2y^2}{k^2} + \left(\lambda^2 + a^2 + \frac{a^2b^2}{k^2}\right)\frac{y}{b} - a^2 = 0,$$

λ étant un paramètre arbitraire.

1° Si nous regardons l'équation (1) comme déterminant les λ des coniques (C) qui passent au point (x, y), nous aurons l'enveloppe de ces coniques en exprimant que cette équation en λ a ses racines égales ; nous obtenons ainsi

$$\frac{y}{b}\left[x^2 - \frac{a^2y^2}{k^2} + \left(\frac{a^2}{b} + \frac{a^2b}{k^2}\right)y - a^2\right] - \frac{x^2y^2}{b^2} = 0.$$

Cette équation se décompose en trois autres : $y = 0$, $y - b = 0$ et

$$(2) \qquad x^2 - a^2 - \frac{a^2by}{k^2} = 0;$$

la première représente une enveloppe exceptionnelle : elle provient de ce que pour $y = 0$, l'équation en λ a une racine double infinie, ou, ce qui revient au même, de ce que la conique impropre du système ($yz = 0$) qui correspond à une valeur infinie de λ est une courbe double du système. La véritable enveloppe se compose de la droite $y - b = 0$, solution évidente *a priori*, et de la parabole représentée par l'équation (2). Cette parabole admet pour axe Oy, passe aux deux points A et A' et a pour sommet, sur Oy, le point qui, dans l'involution $OB \cdot OB' = k^2$, correspond au pied sur Oy de la droite Δ.

2° Pour avoir le lieu du centre, il faut éliminer λ entre les deux équations du centre $C'_x = 0$, $C'_y = 0$; ces équations sont

$$x - \frac{\lambda y}{b} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{2\lambda x}{b} - \frac{2a^2y}{k^2} - \frac{\left(\lambda^2 + a^2 + \frac{a^2b^2}{k^2}\right)}{b} = 0;$$

l'élimination de λ est immédiate et donne l'équation

$$(3) \qquad 2x^2y - \frac{2a^2}{k^2}y^3 - bx^2 - \frac{y^2}{b}\left(a^2 + \frac{a^2b^2}{k^2}\right) = 0,$$

qui représente le lieu. Ce lieu est une cubique unicursale ayant un point double isolé à l'origine et une asymptote parallèle à Ox, $y - \frac{b}{2} = 0$.

Mais, pour construire cette courbe, il vaut mieux déterminer les coordonnées d'un point courant en fonction de λ ; ces expressions sont immédiatement fournies par la résolution, relativement à x et y, des équations du centre ; on a ainsi

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{b} = \frac{\lambda^2 + \frac{a^2b^2}{k^2} + a^2}{2\left(\lambda^2 + \frac{a^2b^2}{k^2}\right)},$$

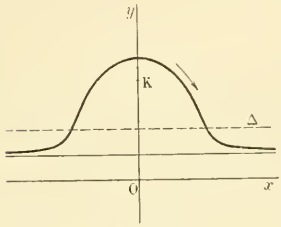
ou

$$(4) \qquad \begin{cases} 2x = \lambda + \dfrac{a^2\lambda}{\lambda^2 + \frac{a^2b^2}{k^2}}, \\[2ex] 2y = b + \dfrac{a^2b}{\lambda^2 + \frac{a^2b^2}{k^2}}. \end{cases}$$

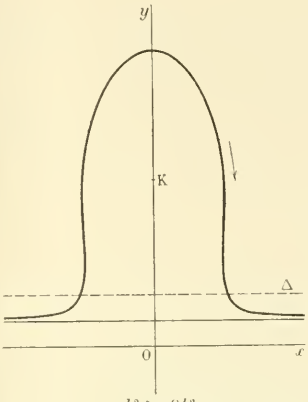
L'étude simultanée de ces deux fonctions de λ est très simple : on voit d'abord que, par le changement de λ en $-\lambda$, x change simplement de signe, y ne change pas, la courbe est donc symétrique par rapport à Oy, et, de plus, on obtiendra une moitié de cette courbe en faisant varier λ de 0 à $+\infty$; dans cet intervalle, y décroît continuellement de $\frac{1}{2}\left(b + \frac{k^2}{b}\right)$ à $\frac{b}{2}$; les variations de x exigent l'emploi de la dérivée ; or cette dérivée est donnée par

$$2x' = \frac{\left(\lambda^2 + \frac{a^2b^2}{k^2}\right)^2 - a^2\left(\lambda^2 - \frac{a^2b^2}{k^2}\right)}{\left(\lambda^2 + \frac{a^2b^2}{k^2}\right)^2}.$$

son numérateur est bicarré en λ et ne s'annule que si $k^2 \geqslant 8b^2$; si donc $k^2 < 8b^2$, x croît constamment, depuis 0 jusqu'à $+\infty$; si $k^2 > 8b^2$, x croît d'abord jusqu'à un certain maximum, décroît jusqu'à un certain minimum et croît ensuite jusqu'à $+\infty$, toutes ses valeurs étant d'ailleurs positives dans l'intervalle envisagé. Les deux courbes ainsi obtenues sont représentées ci-dessous ; dans le cas où $k^2 = 8b^2$, la portion de courbe étudiée présente une inflexion à tangente verticale ; nous ne représentons pas cette dernière courbe.



$k^2 < 8b^2$



$k^2 > 8b^2$

3° Le point de contact de la conique (1) avec son enveloppe s'obtient de suite en adjoignant à l'équation (1) l'équation dérivée par rapport à λ ; on a ainsi

$$y(x-\lambda) = 0;$$

la solution $y = 0$ fournit l'enveloppe exceptionnelle dont nous avons indiqué l'origine ; la solution $x = \lambda$ donne les deux points de contact de la conique (1) avec sa véritable enveloppe ; l'un d'eux est sur la droite $y = b$ et doit être rejeté, l'autre est sur la parabole (2) et son ordonnée s'obtient immédiatement. Les coordonnées du point M sont donc

$$\lambda \qquad \text{et} \qquad \frac{k^2(a^2-\lambda^2)}{a^2b};$$

les coordonnées du point O, milieu de MM′, sont données par les expressions (4). Nous aurons donc les coordonnées, x et y, du point M′ en écrivant que l'x du point O est la demi-somme des x des points M et M′ et que de même l'y du point O est la demi-somme des y des deux points M et M′ ; nous avons ainsi aisément

$$(5)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{a^2\lambda}{\lambda^2 + \dfrac{a^2b^2}{k^2}}, \\[2ex] y = \dfrac{\lambda^2 - a^2}{a^2b}k^2 + \dfrac{a^2b}{\lambda^2 + \dfrac{a^2b^2}{k^2}} + b. \end{cases}$$

Ces équations représentent une courbe du 4e ordre dont il serait aisé d'obtenir l'équation cartésienne ; mais, pour étudier la forme de cette courbe, il vaut mieux garder les équations (5).

Si on y change λ en $-\lambda$, y ne change pas, x change simplement de signe, la courbe est donc symétrique par rapport à l'axe des y, et, en tenant compte de cette symétrie, il suffit de faire varier λ de 0 à $+\infty$; les fonctions x et y ne sont jamais discontinues ; nous aurons les sens de leurs variations en étudiant les signes de leurs dérivées ; ces nouvelles fonctions ont pour expressions

$$x' = a^2 \frac{\dfrac{a^2b^2}{k^2} - \lambda^2}{\left(\lambda^2 + \dfrac{a^2b^2}{k^2}\right)^2},$$

$$y' = \frac{2k^2\lambda}{a^2b} - \frac{2a^2b\lambda}{\left(\lambda^2 + \dfrac{a^2b^2}{k^2}\right)^2}.$$

La première nous montre que x' est positif depuis $\lambda = 0$, jusqu'à $\lambda = \dfrac{ab}{k}$, et négatif ensuite. Les signes de y' ne sont pas évidents ; nous les aurons en annulant y', ce qui nous donne, indépendamment de la solution $\lambda = 0$,

$$k^2\left(\lambda^2 + \frac{a^2b^2}{k^2}\right)^2 - a^4b^2 = 0,$$

d'où

$$k\left(\lambda^2 + \frac{a^2b^2}{k^2}\right) = a^2b,$$

et, par suite, si k est plus grand que b,

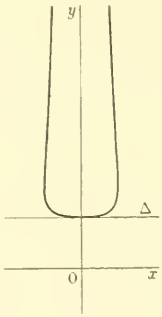
$$\lambda = \frac{a}{k}\sqrt{b(k-b)};$$

si donc $k \leqslant b$, y' est toujours positif; si $k > b$, y' est négatif jusqu'à la valeur que nous venons de trouver pour λ, puis positif. Comparons maintenant les deux valeurs trouvées pour λ, $\dfrac{ab}{k}$ et $\dfrac{a}{k}\sqrt{b(k-b)}$; tant que k est plus petit que $2b$, le premier nombre est le plus grand et y' change de signe avant x' ; c'est l'inverse qui a lieu quand k est plus grand que $2b$.

Il est facile de donner maintenant les différentes formes de la courbe qui correspondent aux diverses valeurs de k, en supposant a et b donnés.

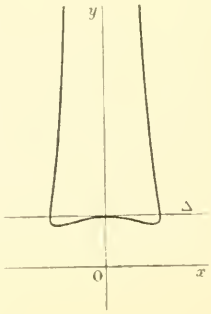
Premier cas : $k \leqslant b$.

λ	x'	x	y'	y
0		0		b
	$-$	croît	$+$	croît
$\dfrac{ab}{k}$	0	max.		
			$+$	croît
	$-$	décroît		
$+\infty$		0		$+\infty$



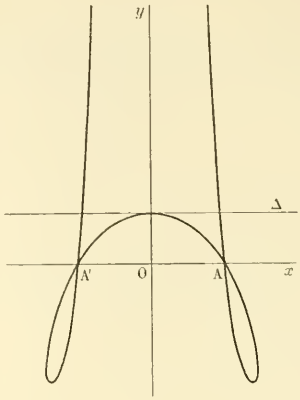
Second cas : $b < k < 2b$.

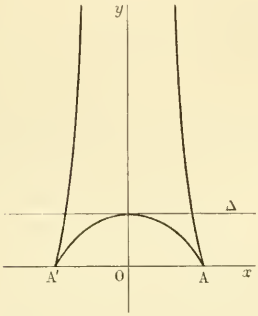
λ	x'	x	y'	y
0		0		b
	$+$	croît	$-$	décroît
$\dfrac{a}{k}\sqrt{b(k-b)}$			0	min. > 0
$\dfrac{ab}{k}$	0	max.		croît
	$-$	décroît		
$+\infty$		0		$+\infty$



Troisième cas : $k > 2b$.

λ	x'	x	y'	y
0		0		b
	$+$	croît	$-$	décroît
$\frac{ab}{k}$	0	max.		
$\frac{a}{k}\sqrt{b(k-b)}$		décroît	0	min. < 0
	$-$		$+$	croît
$+\infty$		0		$+\infty$





Cas intermédiaire : si $k = 2b$, la courbe possède deux points de rebroussement et a la forme ci-contre.

Solutions satisfaisantes : MM. A. Caussé (à Castres) ; E.-N. Barisien ; A. Laureaux (lycée de Besançon).

Solutions incomplètes : MM. L. Martaud (lycée Hoche) ; J. Blandin (à Melay).

Remarque. — Si l'on prend pour point M, dans la 3e partie, le point de contact de la conique variable avec la droite $y = b$, le lieu du second point de rencontre de la droite OM avec cette conique est une conique. Dans le cas où l'on prend $k^2 = a^2$, toutes les coniques (1) sont des hyperboles équilatères et le problème peut se traiter presque entièrement par la géométrie.

QUESTIONS PROPOSÉES

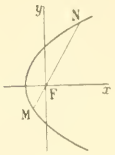
522. — On considère un cercle de centre fixe O, de rayon R et un diamètre fixe de ce cercle rencontrant le cercle en un point A ; puis on considère les coniques passant aux points O et A et admettant pour directrice une droite fixe perpendiculaire à OA. On demande :

1° Le lieu des foyers de ces coniques quand R est fixe ;

2° Le lieu des points de rencontre de l'axe focal d'une hyperbole équilatère répondant à la question avec le cercle, quand R varie ;

3° Le lieu des sommets de ces hyperboles équilatères, dans les mêmes conditions ;

4° Le lieu du point de rencontre de l'axe focal avec la tangente en O à cette même hyperbole équilatère quand R varie. Construire ces divers lieux. O. Morillot (collège Stanislas).



523. — On considère une parabole variable (P) admettant F pour foyer et Fx pour axe. Par le foyer F on mène une sécante qui coupe la parabole (P) en deux points M et N tels que la corde MN ait une longueur constante et égale à $2d$. On demande :

1° Le lieu du milieu de la corde MN ;

2° Le lieu des points M et N ;

3° L'enveloppe du cercle décrit sur MN comme diamètre ;

4° L'enveloppe du diamètre du cercle précédent qui est perpendiculaire à MN.

AUZERAM (à Montpellier).

524. — On considère une ellipse fixe E rapportée à ses axes, Ox et Oy, et deux points fixes D et D′ sur Oy, tels que $OD = -OD' = d$, puis un point M mobile sur l'ellipse.

1° La droite DM coupe Ox en N : trouver le lieu du point de rencontre R des deux droites OM et D′N, et construire la tangente T en ce point au lieu indiqué.

2° Trouver le lieu du point d'intersection de T avec la polaire de R par rapport à l'ellipse.

3° Trouver le lieu du point de rencontre de la parallèle à Ox menée par M avec la parallèle à DM menée par D′.

Construire ces lieux et traiter géométriquement la question quand l'ellipse E devient un cercle de rayon d.

J. BLANDIN (à Melay).

BIBLIOGRAPHIE

Leçons sur certaines questions de Géométrie élémentaire (Possibilité des constructions géométriques ; les polygones réguliers ; transcendance des nombres e et π), par F. KLEIN, professeur à l'université de Gœttingue. — Rédaction française autorisée par l'auteur par J. GRIESS, ancien élève de l'école normale supérieure, professeur de mathématiques au lycée d'Alger. — Paris, *Nony et Cie*.

On sait qu'on appelle *nombre algébrique* toute racine réelle d'une équation algébrique à coefficients entiers ; tout nombre réel qui n'est pas algébrique est appelé *transcendant*.

Le principal objet de cet intéressant ouvrage est d'établir l'existence des nombres transcendants et de montrer que les nombres e et π sont des nombres de cette nature, et cela par des méthodes fort simples, à la portée des élèves de mathématiques spéciales.

Le livre se divise en deux parties. Dans la première, l'auteur s'occupe des expressions que l'on peut construire à l'aide de la règle et du compas, et qui, comme on le sait, ne doivent contenir que des radicaux carrés ; il recherche l'équation de moindre degré qui admet pour racine une expression de ce genre et démontre que le degré de cette équation est égal à une puissance de 2. Il en résulte immédiatement que les nombres transcendants ne peuvent être construits au moyen de la règle et du compas.

Une application extrêmement intéressante de cette théorie générale est constituée par les chapitres III et IV qui traitent des polygones réguliers. On se borne au cas où le nombre p de leurs côtés est premier, et l'on démontre, d'après Gauss, que les seuls polygones réguliers que l'on puisse construire sont ceux pour lesquels le nombre p est de la forme $2^{2^\mu} + 1$. Ainsi pour $\mu = 0$, on a le triangle équilatéral ; pour $\mu = 1$, le pentagone ; pour $\mu = 2$, le polygone de 17 côtés, dont la construction est indiquée au chapitre IV, en suivant la méthode générale de Gauss.

C'est avec la seconde partie qu'on pénètre dans un domaine vraiment nouveau. L'ingénieux procédé imaginé par M. Cantor pour établir une correspondance univoque entre tous les nombres algébriques et les nombres positifs, sa construction des nombres transcendants sont absolument remarquables par leur simplicité et leur forme purement arithmétique.

Après une revue historique assez courte (chapitre II), on aborde au chapitre suivant la transcendance du nombre e. La démonstration est due aux efforts combinés de MM. Hilbert, Hurwitz et Gordan. M. Klein l'a présentée avec une remarquable clarté ; il suffit pour bien la comprendre de se familiariser avec les notations fort simples d'ailleurs qui y sont utilisées. Enfin dans le chapitre IV (transcendance du nombre π) on retrouve des idées analogues avec une forme légèrement plus compliquée.

Il est donc impossible de faire la quadrature du cercle à l'aide de la règle et du compas, ni d'aucune courbe algébrique. Mais cela n'est pas impossible à l'aide d'une courbe transcendante ; le chapitre V est consacré à la description de l'intégraphe qui trace de telles courbes, et permet de faire graphiquement et rigoureusement la quadrature du cercle.

G. P.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

6e Année. N° 10. Juillet 1896.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

NOTE SUR LA THÉORIE DES CONIQUES

Par M. W. **de Tannenberg**, Maître de conférences à la Faculté des Sciences de Nancy.

On sait que les coordonnées cartésiennes x, y d'un point d'une conique (C) peuvent être exprimées en fonction rationnelle d'une variable t de la manière suivante :

$$x = \frac{at^2 + 2bt + c}{a''t^2 + 2b''t + c''}, \qquad y = \frac{a't^2 + 2b't + c'}{a''t^2 + 2b''t + c''}. \tag{C}$$

Cette propriété importante des coniques relie leur théorie à celle des courbes unicursales. Je me propose d'esquisser dans cette Note une étude élémentaire des coniques, en prenant la propriété précédente pour définition.

I. — Équations réduites.

1. *Changement de la variable indépendante.* — Remarquons d'abord que les équations (C) de la conique donnée conservent leur forme si l'on y effectue la transformation homographique,

$$t = \frac{m\theta + n}{p\theta + q}, \tag{1}$$

θ désignant une nouvelle variable. On peut alors disposer des trois arbitraires de la transformation de manière à réduire les équations (C). Soient

$$x = \frac{A\theta^2 + 2B\theta + C}{A''\theta^2 + 2B''\theta + C''}, \qquad y = \frac{A'\theta^2 + 2B'\theta + C'}{A''\theta^2 + 2B''\theta + C''}, \tag{2}$$

les expressions nouvelles de x et y. La nature de la courbe (C) dépendant surtout des racines de l'équation

$$A''\theta^2 + 2B''\theta + C'' = 0, \tag{3}$$

il est naturel d'effectuer la réduction, de manière que les racines de l'équation (3) soient aussi simples que possible, c'est-à-dire représentées par 0 et ∞, ou bien $\pm i$.

Soit d'abord

$$b''^2 - a''c'' > 0; \tag{4}$$

l'équation

$$a''t^2 + 2b''t + c'' = 0 \tag{5}$$

a deux racines réelles et distinctes t_1 et t_2; posons

$$\frac{t - t_1}{t - t_2} = \theta; \tag{6}$$

alors l'une des racines de l'équation (3) est nulle, l'autre infinie ; chacune des expressions (2) a la forme

$$\frac{A\theta^2 + 2B\theta + C}{\theta} = A\theta + 2B + \frac{C}{\theta}$$

Soit au contraire

$$(7) \qquad b'^2 - a''c'' < 0;$$

posons

$$t = \lambda + \mu\theta,$$

et cherchons à déterminer μ et λ de manière que les racines de l'équation (3) soient $\pm i$; il *suffit* pour cela de résoudre le système

$$a''\mu^2 = a''\lambda^2 + 2b''\lambda + c, \qquad a''\lambda + b'' = 0,$$

ce qui est toujours possible en vertu de l'hypothèse faite (7). Chacune des expressions (2) prend alors la forme

$$\frac{A\theta^2 + 2B\theta + C}{1 + \theta^2}.$$

Enfin soit

$$b'^2 - a''c'' = 0;$$

l'équation (5) a alors une racine double t_1, et si nous effectuons la transformation

$$t - t_1 = \frac{1}{\theta},$$

l'équation (3) aura une racine double infinie et chacune des expressions (2) prendra la forme

$$A\theta^2 + 2B\theta + C.$$

En résumé, les équations de la conique (C) peuvent, par un changement simple de la variable indépendante, prendre l'une des formes

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} x = x_0 + at + \dfrac{A}{t}, \\ y = y_0 + bt + \dfrac{B}{t}; \end{cases} \qquad (\mathrm{II}) \quad \begin{cases} x = \dfrac{at^2 + 2bt + c}{1 + t^2}, \\ y = \dfrac{a't^2 + 2b't + c'}{1 + t^2}; \end{cases} \qquad (\mathrm{III}) \quad \begin{cases} x = at^2 + 2bt + c, \\ y = a't^2 + 2b't + c'. \end{cases}$$

2. *Centre. — Asymptotes.* — Considérons d'abord les équations (I) et transportons l'origine au point $(\omega)(x_0, y_0)$: les équations de la conique deviennent

$$(\mathrm{I}') \qquad x = at + \frac{A}{t}, \qquad y = bt + \frac{B}{t}.$$

Ces équations montrent que x et y se transforment en $-x$ et $-y$ quand on change t en $-t$, donc ω est centre de la courbe. On voit aisément que les équations

$$x = at, \qquad y = bt \qquad \text{et} \qquad x = \frac{A}{t}, \qquad y = \frac{B}{t}$$

représentent les asymptotes. La conique (C) est alors dite une *hyperbole*.

Passons maintenant aux équations (II) : si nous transportons l'origine en un point indéterminé $\omega(x_0, y_0)$, ces équations deviennent

$$x = \frac{(a - x_0)t^2 + 2bt + c - x_0}{1 + t^2}, \qquad y = \frac{(a' - y_0)t^2 + 2b't + c' - y_0}{1 + t^2};$$

choisissons x_0, y_0 de manière que

$$a - x_0 = -(c - x_0), \qquad a' - y_0 = -(c' - y_0),$$

c'est-à-dire prenons

$$x_0 = \frac{a + c}{2}, \qquad y_0 = \frac{a' + c'}{2};$$

les équations de la conique (C) prennent la forme

$$(\mathrm{II}') \qquad x = \frac{a(1 - t^2) + 2bt}{1 + t^2}, \qquad y = \frac{a'(1 - t^2) + 2b't}{1 + t^2};$$

elles montrent que x et y se transforment en $-x$ et $-y$ par le changement de t en $-\dfrac{1}{t}$, donc le point $\omega(x_0, y_0)$ est centre de la courbe. Remarquons en outre que si l'on pose

$$t = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},$$

les équations (II') deviennent

(III') $$x = a\cos\varphi + b\sin\varphi, \qquad y = a'\cos\varphi + b'\sin\varphi.$$

La conique C est dans ce cas fermée ; c'est une *ellipse*.

Enfin les équations (III) définissent une conique C n'ayant qu'une direction asymptotique ; l'asymptote est rejetée à l'infini. La courbe n'a évidemment pas de centre. On l'appelle *parabole*. Les formes de ces hyperboles, ellipses, paraboles sont indiquées par les équations (I'), (II'), (III').

II. — Transformation de la conique (C) en une parabole. Conséquences diverses.

1. *Préliminaires.* — Considérons les formules de transformation

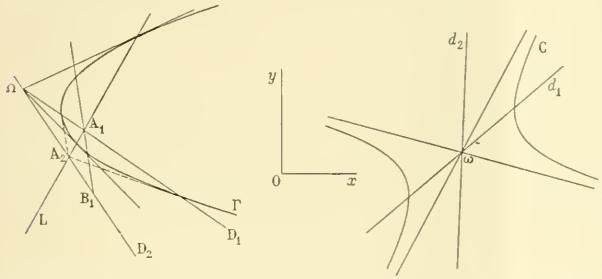
(1) $$x = \frac{aX + bY + c}{a''X + b''Y + c''}, \qquad y = \frac{a'X + b'Y + c'}{a''X + b''Y + c''};$$

à chaque point M (X, Y) d'un plan XOY ces équations font correspondre dans un plan xoy un deuxième point $m(x, y)$; ce point est dit le *transformé homographique* du point M. Une droite D du premier plan a pour transformée une droite d du deuxième plan. En particulier, la droite (L),

(L) $$a''X + b''Y + c'' = 0,$$

a pour transformée la droite de l'infini (l) du deuxième plan.

Enfin rappelons une propriété fondamentale de la transformation (1) : le rapport anharmonique de quatre points en ligne droite M_1, M_2, M_3, M_4 est égal au rapport anharmonique des quatre points correspondants m_1, m_2, m_3, m_4.



2. *Transformée de la conique* C. — En particulier, la transformée de la parabole (Γ),

$$X = t^2, \qquad Y = 2t, \quad (\Gamma)$$

est précisément la conique (C). Deux points correspondants M et m sur les deux courbes sont ceux qui correspondent à la *même valeur de* t.

La propriété d'invariance que nous avons rappelée permet d'étendre à la conique C la théorie des pôles et polaires, supposée établie pour la parabole (Γ).

3. *Centre de la conique* C. — Soient (x_0, y_0) les coordonnées du centre ω; ce point étant le pôle de la droite de l'infini (l) du plan (xoy), on a

$$x_0 = \frac{aX_0 + bY_0 + cZ_0}{a''X_0 + b''Y_0 + c''Z_0}, \qquad y_0 = \frac{a'X_0 + b'Y_0 + c'Z_0}{a''X_0 + b''Y_0 + c''Z_0},$$

X_0, Y_0, Z_0 étant un système de coordonnées homogènes du point Ω, pôle de la droite L. On trouve immédiatement en identifiant l'équation de la polaire de Ω avec celle de (L)

$$X_0 = -c'', \qquad Y_0 = 2b'', \qquad Z_0 = -a'';$$

donc $$x_0 = \frac{ac'' + ca'' - 2bb''}{a''c'' - b''^2}, \qquad y_0 = \frac{a'c'' + c'a'' - 2b'b''}{a''c'' - b''^2}.$$

4. *Diamètres de la conique* C. — Une corde quelconque (ab) de la conique C est complètement déterminée par les valeurs réelles ou imaginaires t_1 et t_2 de la variable t, qui correspondent aux points (a) et (b) ou plutôt par les valeurs toujours réelles

(2) $$p = t_1t_2, \qquad q = t_1 + t_2,$$

les deux quantités p et q seront appelées les *coordonnées* de la corde ab. Nous aurons beaucoup à utiliser la remarque suivante :

Les quantités p et q sont précisément les coordonnées du pôle de la corde AB de la parabole Γ, qui correspond à la corde ab.

En effet, l'équation de AB est précisément

$$Y(t_1+t_2) = 2X + t_1t_2.$$

Ceci posé, pour que ab soit un diamètre de la conique C, il faut et il suffit que AB passe par le point Ω, c'est-à-dire que le pôle de AB soit sur la droite L; l'équation

$$3 \qquad a''p + b''q + c'' = 0,$$

est donc l'équation qui définit les cordes diamétrales.

5. *Diamètres conjugués.* — Supposons que la conique C ait un centre, c'est-à-dire que le point Ω ne soit pas sur la parabole Γ. Soient D_1 et D_2 deux droites passant par le point Ω et conjuguées par rapport à la parabole Γ et soient A_1 et A_2 les points de rencontre avec la droite L. A ces deux droites correspondent dans la conique C deux diamètres d_1 et d_2; ces deux diamètres sont dits *conjugués*. Si par un des points A_1 ou A_2, par exemple A_1, on mène une sécante quelconque à la parabole Γ, le conjugué harmonique B_1 de A_1 par rapport aux points d'intersection se trouve sur D_2 : on conclut immédiatement de là : chacun des diamètres d_1 et d_2 est le lieu des milieux des cordes parallèles à l'autre.

Soient p_1, q_1 et p_2, q_2 les *coordonnées* des cordes diamétrales dirigées suivant ces droites; pour obtenir la relation qui lie ces quantités, il suffit d'écrire que D_1 et D_2 sont conjuguées par rapport à Γ, ce qui donne immédiatement, en ayant égard à une remarque faite (n° 4),

$$q_1q_2 = 2(p_1+p_2).$$

III. — Détermination générale des axes de la conique C.

Supposons que la conique C ait un centre et proposons-nous de déterminer un système de diamètres conjugués rectangulaires. Soient p_1, q_1 et p_2, q_2 les coordonnées de deux cordes de la conique C; pour qu'elles soient diamétrales et conjuguées, il faut et il suffit, d'après ce qui précède, que l'on ait

$$1 \qquad \left\{ \begin{aligned} a''p_1 + b''q_1 + c'' &= 0, \\ a''p_2 + b''q_2 + c'' &= 0, \\ q_1q_2 &= 2(p_1+p_2). \end{aligned} \right.$$

Reste à exprimer qu'elles sont rectangulaires. A cet effet, remarquons que, si x, y et x', y' sont les coordonnées des extrémités d'une corde de coordonnées p, q, on a

$$2 \qquad \frac{x'-x}{lp+mq+n} = \frac{y'-y}{l'p+m'q+n},$$

l, m, n, l', m', n' étant des fonctions déterminées de $a, b, c, \ldots, b'', c''$. Il suffit, pour le voir, de former les différences $x'-x$, $y'-y$. Pour que les cordes p_1, q_1 et p_2, q_2 soient rectangulaires, il faut donc et il suffit que l'on ait

$$3 \qquad (lp_1+mq_1+n)(lp_2+mq_2+n) + (l'p_1+m'q_1+n')(l'p_2+m'q_2+n') = 0.$$

Les équations (1) et (3) déterminent les quatre quantités p_1, q_1 et p_2, q_2.

Ayant déterminé p_1, q_1, on obtient l'axe correspondant de la manière suivante : La droite du plan XOY, qui lui correspond, étant la polaire du point (p_1, q_1) par rapport à la parabole (Γ), a pour équation

$$4 \qquad q_1Y = 2X + p_1;$$

les équations de l'axe sont donc

$$x = \frac{aX + bY + c}{a'X + b'Y + c'}, \qquad y = \frac{a''X + b''Y + c''}{a'X + b'Y + c'},$$

où X, Y sont supposées liées par la relation (4).

Appliquons ces formules aux équations réduites d'une hyperbole

$$x = at + \frac{A}{t}, \qquad y = bt + \frac{B}{t}.$$

Ici on a $\qquad a'' = c'' = 0, \qquad b'' = \frac{1}{2};$

d'autre part $\quad x' - x = \frac{t' - t}{tt'}(att' - A), \qquad y' - y = \frac{t' - t}{tt'}(btt' - B);$

donc on peut prendre

$$l = a, \qquad m = 0, \qquad n = -A,$$
$$l' = b, \qquad m' = 0, \qquad n' = -B;$$

le système des équations (1) et (3) devient alors

$$q_1 = 0, \qquad q_2 = 0, \qquad p_1 + p_2 = 0, \qquad (ap_1 - A)(ap_2 - A) + (bp_1 - B)(bp_2 - B) = 0;$$

l'équation en p, qui détermine p_1 et p_2, est donc

$$(a^2 + b^2)p^2 = A^2 + B^2,$$

et l'équation de l'axe correspondant à une valeur de p est

$$p(bx - ay) = Bx - Ay.$$

Les axes sont donc les bissectrices des angles formés par les asymptotes. Ce résultat, conséquence du calcul précédent, est évident *a priori* ; car, d'après la définition adoptée, deux diamètres conjugués sont conjugués harmoniques par rapport aux asymptotes.

Je laisse au lecteur le soin d'appliquer les équations (1) et (3) aux équations réduites (II) ou (III). Enfin on traitera aisément le cas où C est une parabole, cas écarté dans le calcul précédent. Il suffit alors de prendre les équations de la conique C sous la forme (III) et de remarquer que les cordes p, q parallèles à une direction donnée satisfont à la relation

$$q = t_1 + t_2 = \text{const.}$$

IV. — Détermination générale des foyers de la conique C.

1. *Préliminaires.* — Soit z une variable complexe et soit $f(z)$ un polynome entier à coefficients complexes.

Si on met $f(z)$ sous la forme

$$(1) \qquad f(z) = X + Yi,$$

on sait que X et Y satisfont aux équations

$$(2) \qquad \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x};$$

Ces équations mettent en évidence ce résultat bien connu : les courbes

$$X = \text{const.}, \qquad Y = \text{const.}$$

se coupent orthogonalement en chacun de leurs points communs. En particulier, soit

$$(3) \qquad f(z) = a + 2bz + cz^2 = X + Yi,$$

alors X et Y ont la forme générale

$$X = A(x^2 - y^2) + 2Bxy + 2Dx + 2Ey + F,$$
$$Y = -B(x^2 - y^2) + 2Axy - 2Ex + 2Dy + F_1.$$

Les deux courbes

$$(4) \qquad X = 0, \qquad Y = 0$$

se coupent seulement en deux points réels ; les affixes de ces points s'obtiennent en résolvant l'équation

$$a + 2bz + cz^2 = 0.$$

L'identité (3) montre que l'équation en λ relative aux courbes (4) admet comme racines $+i$ et $-i$. Pour avoir la racine λ correspondante au couple de sécantes réelles, il suffira donc de diviser le premier membre de l'équation en λ par $\lambda^2 + 1$. Enfin faisons encore la remarque suivante, quoiqu'elle ne soit pas utile pour la suite :

Soit donnée l'hyperbole équilatère

$$X = 0,$$

déterminons F_1 de manière que l'équation

$$Y = 0$$

représente deux droites. Cette équation représente alors le faisceau des axes de l'hyperbole équilatère ; ceci résulte immédiatement de la propriété d'orthogonalité que nous venons de rappeler.

2. *Foyers.* — Soit z l'affixe d'un point quelconque de la conique C ; on a (*)

$$(5) \qquad z = \frac{lt^2 + 2mt + n}{a''t^2 + 2b''t + c''}, \qquad l = a + ia', \qquad m = b + ib', \qquad n = c + ic.$$

Concevons que par un point (F) ayant pour affixe

$$z_0 = x_0 + y_0 i,$$

on mène des tangentes à la conique C ; si l'une de ces tangentes a pour coefficient angulaire i, le point F est dit foyer ; dans ce cas la deuxième tangente a pour coefficient angulaire $-i$. Pour obtenir l'affixe z_0 d'un foyer F, il suffit donc d'exprimer que la droite

$$z = z_0$$

est tangente à la conique C, c'est-à-dire que l'équation

$$\frac{lt^2 + 2mt + n}{a''t^2 + 2b''t + c''} = z_0$$

a une racine double ; z_0 est donc racine de

$$(6) \qquad (m - bz_0)^2 - (l - a''z_0)(n - c''z_0) = 0,$$

et il n'y a que deux foyers réels. En rapportant la conique C à ses axes, on trouve que ses foyers sont situés sur un axe et symétriquement par rapport au centre. Si la conique C est une parabole, on a $b'^2 = a''c''$ et l'un des foyers est rejeté à l'infini.

Remarque. — Il résulte de là un moyen pour obtenir le centre de la conique C, ainsi que le faisceau des axes. En effet, l'équation

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2},$$

où z_1 et z_2 désignent les racines de l'équation (6), définit le centre de la conique C.

D'autre part, mettons l'équation (6) sous la forme

$$X + iY = 0 ;$$

les hyperboles équilatères

$$X = 0, \qquad Y = 0$$

se coupent (orthogonalement), en deux points réels, qui sont les foyers réels F_1 et F_2.

Le couple de sécantes communes réelles est évidemment l'ensemble des deux axes de la conique C. L'équation du faisceau des axes est donc

$$X + \lambda Y = 0,$$

λ étant la racine réelle de l'équation en λ (relative à X et Y), racine que nous avons appris à calculer.

(*) Voir à ce sujet une Note de M. Goursat, insérée dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (Année 1887, p. 165).

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

460. — *On considère trois coniques ayant un foyer commun* F : *l'une fixe,* (C) ; *les deux autres variables,* (Γ) *et* (Γ′), *tangentes respectivement à la conique* (C) *en des points fixes* A *et* B, *et tangentes entre elles ; et on demande :*

1° *Le lieu du point de contact,* D, *des coniques* (Γ) *et* (Γ′) ;

2° *L'enveloppe de la tangente commune en* D *à ces deux coniques ;*

3° *Le lieu du point de rencontre des directrices de ces deux coniques relatives au foyer commun* F ; *montrer que ces directrices passent par des points fixes et les déterminer ;*

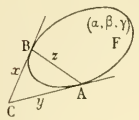
4° *Montrer aussi que la sécante commune aux deux coniques* (Γ) *et* (Γ′), *qui ne passe pas au point où elles se touchent, passe aussi par un point fixe ;*

5° *Si l'on considère une droite passant par ce point, montrer qu'il y a deux couples de coniques* (Γ), (Γ′) *qui l'admettent pour sécante commune ne passant pas au point de contact ;*

6° *On considère le triangle formé par cette droite et les tangentes aux deux couples en leurs points de contact ; puis une conique de foyer* F *inscrite dans ce triangle et une de foyer* F *circonscrite à ce triangle. Trouver les enveloppes des directrices de ces coniques qui correspondent au foyer* F, *et le lieu de leurs points de rencontre.*

Prenons pour triangle de référence le triangle formé par la corde AB et les tangentes à la conique fixe aux points A et B. Représentons par

$$C \equiv 2uv - w^2 = 0, \qquad P \equiv \alpha u + \beta v + \gamma w = 0$$



les équations tangentielles de la conique C et du point F.

Si nous remarquons que les deux points F et A forment un couple d'ombilics des coniques C et Γ, et que, de même, les points F et B forment un couple d'ombilics des coniques C et Γ′, nous aurons pour équations des coniques Γ et Γ′

$$\Gamma \equiv \lambda C + 2Pu = 0, \qquad \Gamma' \equiv \mu C + 2Pv = 0.$$

1° On a de suite la combinaison linéaire

$$\mu\Gamma - \lambda\Gamma' \equiv 2P(\mu u - \lambda v) = 0 ;$$

donc l'ombilic de Γ et Γ′ associé à F est le point $\mu u - \lambda v = 0$; c'est le point de contact, si les deux coniques se touchent, et l'on voit de suite que ce point décrit la droite AB.

2° La tangente commune passant en ce point D a évidemment une équation de la forme

$$\lambda x + \mu y + \nu z = 0,$$

ν étant à déterminer de façon que cette droite soit tangente à la conique Γ au point $D(\mu, -\lambda, 0)$; il suffit évidemment pour cela d'exprimer que cette droite touche la conique Γ et qu'elle est la polaire d'un point de $z = 0$. On obtient ainsi $\Gamma(\lambda, \mu, \nu) = 0$ et $\Gamma'_\nu(\lambda, \mu, \nu) = 0$. La dernière donne $\nu = \gamma$ et la première donne alors la condition de contact des deux coniques Γ et Γ′,

$$(1) \qquad \lambda\mu + \alpha\lambda + \beta\mu + \frac{\gamma^2}{2} = 0.$$

L'équation tangentielle de l'enveloppe de la droite $\lambda x + \mu y + \gamma z = 0$ s'obtient en éliminant λ et μ entre $\frac{\lambda}{u} = \frac{\mu}{v} = \frac{\gamma}{w}$ et l'équation (1). On trouve ainsi la conique

$$S \equiv \gamma C + 2Pw = 0 ;$$

cette conique admet pour foyer le point F et est tangente aux deux droites CA et CB.

3° En tenant compte de la relation (1), on trouve pour équations ponctuelles des coniques Γ et Γ′,

$$f \equiv 2(\lambda x + \mu y + \gamma z)y - (\lambda + \beta)z^2 = 0,$$
$$f_1 \equiv 2(\lambda x + \mu y + \gamma z)x - (\mu + \alpha)z^2 = 0.$$

La directrice de f relative au foyer F a alors pour équation

$$\alpha\frac{\partial f}{\partial x}+\beta\frac{\partial f}{\partial y}+\gamma\frac{\partial f}{\partial z}=0,$$

ou

$$\beta\lambda x+(\lambda\alpha+2\mu\beta+\gamma^2)y-\lambda\gamma z=0,$$

puis, en faisant usage de la relation (1),

$$\beta x+\alpha y-\gamma z-2(\mu+\alpha)y=0.$$

De même, l'équation de la directrice de f_1 par rapport au foyer F est

$$\beta x+\alpha y-\gamma z-2(\lambda+\beta)x=0.$$

On voit immédiatement que ces deux droites passent par les points de rencontre de la droite fixe $\beta x+\alpha y-\gamma z=0$ avec les droites CA et CB ; la droite fixe dont nous venons de parler est d'ailleurs la directrice du foyer F par rapport à la conique C. Pour avoir le lieu du point de rencontre de ces deux directrices, il faut éliminer $\lambda+\beta$ et $\mu+\alpha$ entre leurs équations et la relation (1), qui peut s'écrire $(\lambda+\beta)(\mu+\alpha)=\alpha\beta-\frac{\gamma^2}{2}=h^2$; le lieu demandé est donc la conique

$$(\beta x+\alpha y-\gamma z)^2-4h^2xy=0\,;$$

ce n'est pas autre chose que la conique S précédemment trouvée.

4° On peut à l'aide des deux coniques f et f_1 former la combinaison linéaire suivante

$$(\mu+\alpha)f-(\lambda+\beta)f_1\equiv 2(\lambda x+\mu y+\gamma z)[(\mu+\alpha)y-(\lambda+\beta)x]=0,$$

et l'on voit de suite que la sécante commune associée à la tangente commune passe au point fixe $x=0$, $y=0$, c'est-à-dire au point C.

5° Si l'on pose $\frac{\lambda+\beta}{\mu+\alpha}=h^2$, on obtient facilement, à l'aide de la relation (1), $\mu+\alpha=\pm\frac{k}{h}$, puis $\lambda+\beta=\pm hk$. Il y a donc deux couples de coniques Γ et Γ′ admettant la droite $y-h^2x=0$ pour sécante commune : ce sont les couples qui correspondent aux valeurs

$$\lambda_1+\beta=hk,\qquad \mu_1+\alpha=\frac{k}{h},$$

et

$$\lambda_2+\beta=-hk,\qquad \mu_2+\alpha=-\frac{k}{h}.$$

6° Les tangentes communes aux deux couples sont $\lambda_1x+\mu_1y+\gamma z=0$, $\lambda_2x+\mu_2y+\gamma z=0$; elles se coupent au point dont les coordonnées sont données par

$$\frac{x}{\mu_1-\mu_2}=\frac{y}{\lambda_2-\lambda_1}=\frac{z}{\frac{\lambda_1\mu_2-\mu_1\lambda_2}{\gamma}},$$

ou

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{-h^2}=\frac{z}{\frac{\beta-\alpha h^2}{\gamma}}.$$

Ces deux droites étant tangentes à la conique S, le point que nous venons de trouver et le foyer F forment un couple d'ombilics communs à la conique S et à la conique cherchée, inscrite dans le triangle formé par la sécante commune et les deux tangentes ; cette conique a donc pour équation

$$S+\theta P\left(u-h^2v+\frac{\beta-\alpha h^2}{\gamma}w\right)=0,$$

et nous aurons θ en exprimant qu'elle touche la droite $y-h^2x=0$, dont les coordonnées sont h^2, -1, 0 ; nous obtenons ainsi $\gamma=-\theta(\beta-\alpha h^2)$; cette relation donne θ en fonction de h^2 ou h^2 en fonction de θ ; nous en déduisons $h^2=\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\theta\alpha}$, et l'équation de la conique inscrite dans le triangle indiqué est

$$\Sigma=\alpha\gamma C+PQ=0,$$

en posant

$$Q=\alpha\theta u-(\beta\theta+\gamma)v+\alpha w.$$

L'enveloppe de la directrice de cette conique relative au foyer F s'obtient en éliminant θ entre les

équations

$$\frac{\Sigma'_u}{\alpha} = \frac{\Sigma'_v}{\beta} = \frac{\Sigma'_w}{\gamma};$$

ces équations se simplifient immédiatement et s'écrivent

$$2\gamma v + P\theta = \frac{2\alpha\gamma u}{\beta} - P\theta - \frac{P\gamma}{\beta} = -2\alpha w + \frac{P\alpha}{\gamma};$$

l'élimination de $P\theta$ entre elles est évidente et fournit l'équation

$$\alpha u + \beta v - \gamma w = 0,$$

qui montre que cette directrice passe par un point fixe $(\alpha, \beta, -\gamma)$, conjugué harmonique de F par rapport au point C et au point C′ où la droite FC rencontre AB.

L'équation que nous venons de trouver peut s'écrire $P = 2\gamma w$ et les précédentes donnent alors $v + w\theta = 0$; de là on déduit les coordonnées de la directrice, puis l'équation de cette droite,

$$(\beta\theta + \gamma)x - \alpha\theta y + \alpha z = 0.$$

Il faut former maintenant l'équation de la conique circonscrite à ce même triangle et ayant pour foyer le point F. Si l'on désigne par $T = 0$ l'équation quadratique des deux tangentes menées du point F à la conique C, et par $R = 0$ l'équation de la directrice de la conique cherchée, cette conique aura pour équation ponctuelle $T + R^2 = 0$ ou

$$2k^2(2xy - z^2) - (\beta x + \alpha y - \gamma z)^2 + (ux + vy + wz)^2 = 0,$$

u, v, w étant déterminés par les conditions que la conique passe aux trois sommets du triangle. Or deux de ces sommets sont les points de rencontre des droites

$$\lambda_1 x + \mu_1 y + \gamma z = 0, \qquad \lambda_2 x + \mu_2 y + \gamma z = 0,$$

avec la droite $y - h^2 x = 0$; ils ont pour coordonnées

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{h^2} = \frac{z}{\dfrac{\alpha h^2 + \beta - 2hk}{\gamma}},$$

et

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{h^2} = \frac{z}{\dfrac{\alpha h^2 + \beta + 2hk}{\gamma}},$$

et il est facile de voir que ces points ont pour lieu commun la conique S dont l'équation ponctuelle est

$$(\beta x + \alpha y - \gamma z)^2 - 4k^2 xy = 0;$$

donc, en portant les valeurs de x, y, z dans l'équation de la conique, cette partie s'annule et il reste à annuler

$$2k^2 z^2 - (ux + vy + wz)^2.$$

Mais on déduit d'ici

$$ux + vy + wz = \pm kz\sqrt{2},$$

et, comme on peut, si l'on veut, changer tous les signes de u, v, w, sans changer la conique cherchée, on peut se borner à prendre le signe $+$ dans le second membre pour l'une des relations; le premier point donne ainsi la condition

$$u + vh^2 + (w - k\sqrt{2})\frac{\alpha h^2 + \beta - 2hk}{\gamma} = 0,$$

tandis que le second donne les deux conditions

$$u + vh^2 + (w \mp k\sqrt{2})\frac{\alpha h^2 + \beta + 2hk}{\gamma} = 0;$$

bornons-nous à considérer le cas où l'on prend le même signe devant $k\sqrt{2}$ dans les deux relations. Alors, en retranchant ces deux égalités l'une de l'autre, on obtient $w - k\sqrt{2} = 0$, puis $u + vh^2 = 0$.

Reste à exprimer que le point de concours des deux tangentes communes, dont les coordonnées sont 1, $-h^2$, $-\dfrac{1}{\theta} = \dfrac{\beta - \alpha h^2}{\gamma}$, est situé sur la conique; comme on sait que ce point est situé sur

la droite $\beta x - \alpha y - \gamma z = 0$, il suffit d'exprimer que ses coordonnées annulent

$$2h^2(2xy - z^2) + (ux + vy + wz)^2,$$

et on a ainsi la troisième relation

$$2h^2\left(2h^2 - \frac{1}{\theta^2}\right) - \left(u - vh^2 - \frac{w}{\theta}\right)^2 = 0.$$

Cette relation, jointe aux deux autres, montre qu'il y a deux coniques satisfaisant aux relations particulières qui ont été choisies.

Nous aurons l'enveloppe des directrices de ces coniques, en rendant cette dernière équation homogène en u, v, w, ce qui est immédiat, puisque $2h^2 = w^2$, puis en remplaçant h^2 par $-\frac{u}{v}$. Nous obtenons ainsi très aisément

$$\gamma(2uv + w^2 + 2(\alpha u + \beta v)w) = 0$$

ou

$$\gamma C - 2Pw = 0;$$

c'est la conique S déjà rencontrée.

Cherchons enfin le lieu du point de concours des directrices. Pour cela formons l'équation de l'une des dernières à l'aide des relations

$$w = k\sqrt{2}, \qquad u + vh^2 = 0$$

et

$$u - vh^2 - \frac{w}{\theta} = k\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{\theta^2} + 2h^2};$$

nous déduisons de là w, u et v et l'équation cherchée est

$$\left(\frac{1}{\theta} + \sqrt{\frac{1}{\theta^2} + 2h^2}\right)\left(x - \frac{y}{h^2}\right) + 2z = 0,$$

le radical ayant l'un ou l'autre des deux signes + ou —. D'autre part la directrice de la conique inscrite a pour équation

$$(\beta\theta + \gamma)x - \alpha\theta y + \alpha z = 0,$$

avec la relation $\theta = \frac{-\gamma}{\beta - \alpha h^2}$. Il n'y a plus qu'à éliminer θ et h^2 entre ces trois équations. On trouve ainsi

$$z = 0, \qquad \gamma y + \beta z = 0, \qquad \gamma x + \alpha z = 0,$$

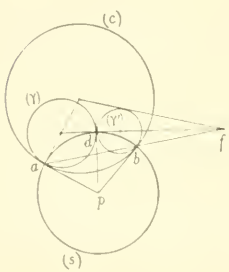
et

$$3(\beta x - \alpha y)^2 - 2(\beta z - \gamma y)(\alpha z + \gamma x) = 0.$$

La première équation représente la droite AB; c'est le vrai lieu; les autres équations représentent des lieux exceptionnels qui proviennent de ce que les deux directrices coïncident dans quatre positions particulières.

VASNIER.

Solution géométrique. — Transformons la figure par polaires réciproques en prenant comme conique directrice un cercle de centre F. Les coniques (C), (Γ), (Γ′) se transforment respectivement en des cercles (c), (γ), (γ′); ces deux derniers étant variables et touchant le cercle fixe (c) aux points fixes a et b. Si nous désignons par T le point de rencontre des tangentes en A et B à la conique (C), les points a et b correspondent aux tangentes AT et BT. De plus les cercles (γ) et (γ′) se touchent en un point d.



1° Au point D correspond dans la figure transformée la tangente commune en d aux deux cercles (γ) et (γ′). Or cette tangente passe par le centre radical p des trois cercles (c), (γ) et (γ′). Il en résulte que le lieu du point D est une droite correspondant au point d'intersection des tangentes en a et b au cercle (c), c'est-à-dire la droite AB.

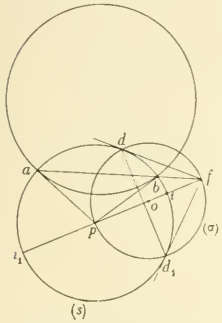
2° Le lieu du point d est le cercle (s) qui a pour centre le point p et qui passe par les points a et b; par conséquent, l'enveloppe de la tangente commune en D aux coniques (Γ) et (Γ′) est une conique (S) ayant pour foyer le point F, pour directrice la droite AB qui correspond au point p, et qui est tangente aux droites AT et BT.

3° La droite qui joint les centres des cercles (γ) et (γ′) est tangente en d au cercle (s); on en conclut que le point de rencontre des directrices des coniques (Γ) et (Γ′) est situé sur la conique (S).

D'autre part le lieu du centre du cercle (γ) est la droite joignant le point a au centre du cercle (c) ; donc la directrice de la conique (Γ) passe par le point de rencontre de la tangente AT et de la directrice de la conique (C) ; résultat analogue pour la directrice de (Γ').

4° A la sécante commune de l'énoncé correspond le point de rencontre des tangentes communes autres que pd aux cercles (γ) et (γ'). Ce point f est sur la ligne des centres, et l'on sait que la droite ab passe par ce point. Le lieu du point f étant la droite ab, la sécante commune aux coniques (Γ) et (Γ') passe par le point T.

5° Il suffit d'établir qu'à un point quelconque f choisi arbitrairement sur ab correspondent deux couples de cercles (γ) et (γ') ou deux points d. En effet, le point d est situé à la fois sur le cercle (s) et sur le cercle (σ) qui a pour diamètre pf. Ces deux cercles se coupent en deux points d et d_1 ; on déduit de là les deux couples de cercles (γ) et (γ').



6° Au triangle considéré θ correspond le triangle fdd_1 ; à une conique de foyer F inscrite dans le triangle θ correspond le cercle circonscrit au triangle fdd_1, c'est-à-dire le cercle (σ). Or le centre o de ce cercle est le milieu de fp, le lieu de ce point est une droite parallèle à ab, également distante de ab et du point p. A cette droite correspond dans la première figure un point appartenant à la droite FT et conjugué harmonique du point F par rapport au point T et au point de rencontre de FT avec AB ; c'est par ce point que passe la directrice de la conique inscrite au triangle θ.

Les coniques circonscrites à ce triangle se transforment en cercles tangents aux trois côtés du triangle fdd_1. Nous ne considérerons que le cercle inscrit et le cercle exinscrit relatif au sommet f ; ils ont respectivement leurs centres aux points i et i_1 sur le cercle (s). Les directrices des coniques correspondantes enveloppent donc la conique (S).

Enfin aux points de rencontre des directrices correspond la droite pf qui passe par le point fixe p ; le lieu cherché est la droite AB.

GROLLEAU, répétiteur général au lycée de Marseille.

Très bonne solution : M. C. CONTANT (lycée de Bar-le-Duc).
Solutions analogues par MM. AUZERAM, à Montpellier ; LETIERCE, lycée de Douai ; G. SUGOT, lycée Saint-Louis.

---

474. — *Une conique variable passe par deux points fixes* A *et* B *et rencontre une conique fixe en deux points fixes* C *et* D *et deux points variables* M *et* N.

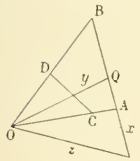
1° *Trouver l'enveloppe de la droite* MN.

2° *Par les quatre points* C, D, M, N *et un cinquième point fixe* E, *on fait passer une conique* Γ ; *montrer que cette conique passe encore par un point fixe* F.

3° *Trouver le lieu des pôles de* CD *par rapport à la conique* Γ.

4° *Lieu du point* F *quand le point* E *décrit une droite donnée.*

1° Je prends pour triangle de référence un triangle ayant pour sommet le point de concours des deux droites AC et BD et pour côtés issus de ce sommet, deux droites OP, OQ, conjuguées harmoniques par rapport aux droites OAC et OBD, le troisième côté étant AB. Je désigne par $ax + by + cz = 0$ l'équation de CD, par $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ celle de la droite qui joint les deux autres points de rencontre de la conique fixe avec le couple (OA, OB). Les deux droites (OA, OB) ont pour équation $y^2 - m^2z^2 = 0$, et la conique fixe est représentée par



$$k^2(y^2 - m^2z^2) + (ax + by + cz)(\alpha x + \beta y + \gamma z) = 0.$$

D'autre part, la conique variable passant aux quatre points A, B, C, D a pour équation

$$k^2(y^2 - m^2z^2) + \lambda x(ax + by + cz) = 0;$$

la seconde sécante commune de cette conique et de la conique fixe a donc pour équation

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - \lambda x = 0,$$

et l'on voit de suite qu'elle passe par le point fixe

$$x = 0, \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z = 0,$$

situé sur le côté AB. Prenons ce point pour le sommet Q du triangle de référence, nous aurons $\gamma = 0$.

2° Toute conique Γ_1 passant aux quatre points C, D, M, N a pour équation

$$k^2(y^2 - m^2z^2) + (ax + by + cz)(\alpha x + \beta y) - \mu(ax + by + cz)(\alpha x + \beta y - \lambda x) = 0,$$

ou

$$y^2 - m^2z^2 + \mu(ax + by + cz)(\alpha x + \beta y - \lambda x) = 0,$$

en désignant par λ et μ d'autres paramètres variables. Si l'on exprime que cette conique passe au point fixe (x_0, y_0, z_0), on obtient l'équation générale des coniques Γ indiquées dans l'énoncé ; on a ainsi

$$\Gamma \equiv (y^2 - m^2z^2)(ax_0 + by_0 + cz_0)(\alpha x_0 + \beta y_0 - \lambda x_0) - (y_0^2 - m^2z_0^2)(ax + by + cz)(\alpha x + \beta y - \lambda x) = 0.$$

Cette équation contient linéairement le paramètre λ ; les coniques Γ passent donc par quatre points fixes ; trois d'entre eux sont C, D, E ; il y en a donc un quatrième, F. Pour obtenir ce quatrième point, considérons les deux coniques de base du faisceau

$$(y^2 - m^2z^2)(ax_0 + by_0 + cz_0)(\alpha x_0 + \beta y_0) - (y_0^2 - m^2z_0^2)(ax + by + cz)(\alpha x + \beta y) = 0,$$

$$(y^2 - m^2z^2)(ax_0 + by_0 + cz_0)x_0 - (y_0^2 - m^2z_0^2)(ax + by + cz)x = 0,$$

et éliminons entre elles $(y^2 - m^2z^2)$; nous obtiendrons le système de sécantes communes

$$ax + by + cz = 0 \qquad \text{et} \qquad (\alpha x + \beta y)x_0 - (\alpha x_0 + \beta y_0)x = 0 ;$$

la première passe aux points C et D ; la seconde, $yx_0 - xy_0 = 0$, passe aux points E et F. Il serait alors facile d'avoir les coordonnées du point F.

3° Appelons x, y, z les coordonnées du pôle de CD ; l'équation de cette droite par rapport à la conique Γ est

$$XY'_x + YY'_y + ZY'_z = 0,$$

ou

$$2(ax_0 + by_0 + cz_0)(\alpha x_0 + \beta y_0 - \lambda x_0)(Yy - m^2Zz) - (y_0^2 - m^2z_0^2)$$
$$(aX + bY + cZ)(\alpha x + \beta y - \lambda x) - (y_0^2 - m^2z_0^2)(\alpha X + \beta Y - \lambda X)(ax + by + cz) = 0$$

Il faut exprimer que cette droite coïncide avec CD ; on a ainsi

$$P(\alpha X + \beta Y - \lambda X) - H(\alpha x_0 + \beta y_0 - \lambda x_0)(Yy - m^2Zz) \equiv \rho(aX + bY + cZ),$$

en désignant par P la fonction linéaire $ax + by + cz$ et par H la constante $2\dfrac{ax_0 + by_0 + cz_0}{y_0^2 - m^2z_0^2}$; on déduit de là

$$P\alpha - P\lambda = a\rho,$$
$$P\beta - Hy(\alpha x_0 + \beta y_0 - \lambda x_0) = b\rho,$$
$$Hm^2z(\alpha x_0 + \beta y_0 - \lambda x_0) = c\rho.$$

Il n'y a plus qu'à éliminer λ et ρ entre ces trois équations ; mais il vaut mieux ajouter l'équation $\alpha x_0 + \beta y_0 - \lambda x_0 = \lambda'$ et éliminer λ, λ' et ρ entre les quatre équations ainsi obtenues. On trouve immédiatement

$$\begin{vmatrix} a & P\alpha & P & 0 \\ b & P\beta & 0 & Hy \\ c & 0 & 0 & -Hm^2z \\ 0 & \alpha x_0 + \beta y_0 & x_0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$P\begin{vmatrix} a & \alpha & 1 & 0 \\ b & \beta & 0 & Hy \\ c & 0 & 0 & -Hm^2z \\ 0 & \alpha x_0 + \beta y_0 & x_0 & P \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation représente deux droites, la droite $P = 0$, qui correspond à celle des coniques Γ qui se réduit à deux droites dont l'une est CD, et une autre droite qui est le véritable lieu du pôle de CD.

4° Si le point $E(x_0, y_0, z_0)$ décrit une droite $Ax + By + Cz = 0$, on a la relation

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 = 0,$$

et l'on obtient le lieu du point F en éliminant x_0, y_0, z_0 entre les trois équations

$$xy_0 - yx_0 = 0, \qquad Ax_0 + By_0 + Cz_0 = 0$$

et

$$(y^2 - m^2z^2)(ax_0 + by_0 + cz_0)x_0 - (y_0^2 - m^2z_0^2)(ax + by + cz)x = 0.$$

Les deux premières donnent des quantités proportionnelles à x_0, y_0, z_0, les nombres x, y et $-\frac{Ax + By}{C}$; il n'y a plus qu'à remplacer ces nombres par les valeurs ainsi trouvées dans la dernière équation. On a ainsi

$$(y^2 - m^2z^2)\left(ax + by - c\frac{Ax + By}{C}\right) - \left[y^2 - m^2\frac{(Ax + By)^2}{C^2}\right](ax + by + cz) = 0,$$

avec $x = 0$; et finalement

$$x = 0, \qquad Ax + By + Cz = 0$$

et

$$Cc(y^2 - m^2z^2) - m^2(ax + by + cz)(Ax + By - Cz) = 0.$$

Cette dernière équation représente le véritable lieu ; c'est une conique qui passe aux points C et D.

C. BARTHE (lycée de Bar-le-Duc).

Nous avons reçu aussi de M. Barthe une très bonne solution géométrique.

Solution géométrique. — Faisons une transformation homographique de manière que les points C et D se projettent aux points cycliques du plan ; nous désignerons par des lettres affectées d'accents, A′, B′, M′, etc. les projections des points A, B, M, etc. de la première figure.

1° La conique fixe se transforme en un cercle fixe S, la conique variable en un cercle variable Σ passant par deux points fixes A′ et B′, et rencontrant le cercle S aux points variables M′ et N′. La droite M′N′ rencontre A′B′ en un point O′, qui a même puissance par rapport au cercle S et à tous les cercles passant par les points A′ et B′. Il en résulte que le point O′ est fixe ; la droite MN passe donc par un point fixe situé sur AB.

2° La conique Γ se projette suivant le cercle Γ' passant par les points M′, N′, E′. La droite O′E′ rencontre ce cercle en un deuxième point F′, et l'on a

$$\overline{O'E'}\,.\,\overline{O'F'} = \overline{O'M'}\,.\,\overline{O'N'} = \overline{O'A'}\,.\,\overline{O'B'} = \text{constante},$$

ce qui montre que le point F′ est fixe.

3° Le pôle de CD par rapport à la conique Γ se projette au centre du cercle Γ' ; le lieu de ce centre est la perpendiculaire élevée au milieu de E′F′. Le lieu du pôle de CD est donc une droite qu'on peut construire de la manière suivante :

On prend le point G conjugué harmonique par rapport à E et F du point de rencontre de CD et EF, on tire GC et GD, et on construit la droite conjuguée harmonique de EF par rapport à GC et GD ; cette droite est le lieu demandé.

4° Le produit $\overline{O'E'}\,.\,\overline{O'F'}$ étant fixe, les points E′ et F′ décrivent des courbes inverses. Comme le point E′ se déplace sur une droite, le lieu du point F′ est un cercle passant par le point O′. Par suite le lieu du point F est une conique passant par le point O.

Albert LEVASSOR (lycée Henri IV).

Ont résolu la même question : MM. Auzeram, à Montpellier ; E. Barré, lycée de Douai ; A. Laureaux, lycée de Besançon ; J. Lhériaud, lycée de Toulouse ; L. Martaud, lycée de Versailles ; G. Sugot, lycée Saint-Louis.

Bonne solution, mais tout à fait différente, de M. E. Bally (collège Stanislas).

PHYSIQUE

504. — *Un pendule* OM, *mobile autour du point* O, *est constitué par un fil fin de longueur* l *et par une petite boule* M *de masse* m. *A cette petite boule est attaché un autre fil flexible qui passe sans frottement dans un anneau très petit,* A, *et porte à son extrémité un corps de masse* M ; *l'anneau* A *est situé sur la verticale du point* O *et la distance* OA *est égale à* $l + L$. *Calculer la durée d'une petite oscillation du pendule.*

Appelons p le poids de la masse m, P celui de la masse M, α et β les angles que font respectivement, à un moment donné, le pendule OM et le fil MA avec la verticale.

Les forces agissant sur la boule M ont une composante tangentielle

$$p \sin \alpha - P \sin (\alpha + \beta),$$

ou simplement, puisqu'on se borne aux petites oscillations,

$$(p + P)\alpha - P\beta,$$

ou enfin, en appelant x la distance très petite de la boule à la verticale OA,

$$\left(\frac{p+P}{l} + \frac{P}{L}\right) x.$$

Or, d'une manière générale, une force tangentielle kx produit une oscillation dont la durée est

$$t = \pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Ici $k = \frac{p+P}{l} + \frac{P}{L}$, donc

$$t = \pi \sqrt{\frac{ml}{p + P\left(1 + \frac{l}{L}\right)}}.$$

Cette expression est générale, p et P pouvant représenter des forces d'origine quelconque ; dans le cas actuel, on peut remplacer p par mg et P par Mg :

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g\left(1 + \frac{M}{m}\,\frac{L+l}{L}\right)}}.$$

(Solutions exactes de M. E. Barré, à Valenciennes, et de M. A. Caussé, à Castres.)

CONCOURS DE 1896 (*Suite*).

CONCOURS GÉNÉRAUX DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

Physique (Paris).

I. — Détermination de la densité des vapeurs.

II. — **526**. — Un prisme de verre limité par deux bases normales aux arêtes et ayant la forme d'un triangle équilatéral tourne d'un mouvement très rapide autour d'un axe vertical parallèle aux arêtes et passant par les centres de gravité des bases, à l'intérieur d'une pièce ayant la forme d'un cylindre dont l'axe coïncide avec l'axe de rotation du prisme. Le diamètre de cette pièce peut être considéré comme infini vis-à-vis des dimensions du prisme. Une fente verticale pratiquée dans la paroi de la pièce laisse passer un faisceau de rayons parallèles et horizontaux juste assez large pour couvrir le prisme dans toutes les positions.

On demande de décrire les phénomènes que verrait un observateur regardant les murs de la pièce.

Comment se servir de cette disposition pour mesurer l'indice du prisme ?

29 mai, de 8 h. 1/2 à 2 h. 1/2.

Chimie (Paris).

I. — Étudier les combinaisons hydrogénées du phosphore, de l'arsenic et du silicium.

II. — **527**. — Pour déterminer les chaleurs de formation de l'hydrogène phosphoré gazeux, de l'hydrogène arsénié et de l'hydrogène silicié, on fait arriver les gaz bulle à bulle dans un excès de brome. Le brome recouvert d'une épaisse couche d'eau est placé dans un tube de verre immergé dans l'eau d'un calorimètre.

Les dégagements de chaleur observés, évalués en grandes calories, et les augmentations de poids du tube à brome sont respectivement :

Pour l'hydrogène phosphoré,	$1^{cal},452$	et	$0^{gr},194$;
— arsénié,	1 ,064	—	0 ,390 ;
— silicié,	1 ,688	—	0 ,128.

Par quelles réactions chimiques et par quels procédés d'analyse pourrait-on vérifier les réactions produites au sein du calorimètre ?

Données numériques :

Les quantités de chaleur dégagées par l'oxydation complète du phosphore ordinaire, de l'arsenic, du silicium cristallisé en présence d'un excès d'eau sont respectivement

$405^{cal},4$ $225,4$ $211,1$.

D'autre part, la réaction $H + Br$ liquide $= HBr$ dissous dégage $29^{cal},5$.

De même $H^2 + O = H^2O$ — 69 .

$P = 31$, $As = 75$, $Si = 28$.

(*1er juin, de 8 h. 1/2 à 2 h. 1/2.*)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Physique et Chimie.

Physique. — I. — Conditions de justesse et de sensibilité d'une balance. (On ne décrira pas l'instrument.)

II. — Détermination de la densité d'une vapeur à une température très élevée.

Chimie. — Préparation de l'acide sulfurique par le procédé des chambres de plomb. (Théorie et pratique.)

(*10 juin, de 7 h. à 10 h.*)

Mathématiques.

528. — On donne un cercle C, qui a pour équations en coordonnées rectangulaires : $x = a$, et $y^2 + z^2 = a^2$. On considère : 1° le cône S qui a pour base ce cercle et pour sommet le point de l'axe Oz qui est à la distance λa de l'origine ; 2° la surface S_1 engendrée par des droites parallèles au plan des xy, et qui s'appuient sur l'axe Oz et sur le cercle donné. On demande :

I. — De former les équations des deux surfaces S et S_1 ;

II. — De trouver l'expression du sinus de l'angle des plans tangents aux deux surfaces en un point du cercle qui a pour cote $z = \mu a$, et de calculer ce sinus, avec trois décimales seulement, pour $\lambda = \frac{1}{2}$ et $\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

III. — De déterminer l'intersection des deux surfaces ; d'en construire deux projections pour $\lambda = \frac{1}{2}$; d'en suivre les principales transformations quand λ varie de zéro à l'infini.

(*11 juin, de 7 h. à 11 h.*)

Calcul trigonométrique.

On donne les trois côtés d'un triangle :

$a = 25648^m$; $b = 32907^m$; $c = 29763^m$.

Calculer les trois angles, la hauteur CH, et la surface du triangle.

(*11 juin, de 4 h. 1/2 à 6 h.*)

Géométrie descriptive.

529. — On donne : 1° un paraboloïde de révolution à axe vertical, ayant son foyer à 57^{mm} au-dessous du sommet, lequel a ses projections horizontale et verticale à 170^{mm} et 375^{mm} au-dessus du bord inférieur de la feuille, et à 220^{mm} du bord gauche ; 2° un cône de révolution, dont une section méridienne se compose de deux lignes droites : l'une parallèle aux deux plans de projection, et passant par le sommet du paraboloïde ; l'autre verticale se projetant à 100^{mm} du bord gauche de la feuille. On ne considérera que la nappe de ce cône qui se projette verticalement au-dessous de la première des deux lignes indiquées et à droite de la seconde.

La courbe d'intersection de ce cône et du paraboloïde sert de directrice à un second cône ayant même sommet que le paraboloïde.

On demande de représenter par ses projections le solide commun aux deux cônes supposés pleins, et limités inférieurement par un plan horizontal H, situé à 54^{mm} au-dessous de leurs sommets.

On tracera en traits pleins noirs les lignes d'intersection des deux cônes et du plan H.

On indiquera en traits rouges le contour apparent vertical du paraboloïde, et la construction : 1° des points les plus hauts et les plus bas de la courbe d'intersection des deux cônes limitée au plan H ; 2° d'un point de la trace du cône de révolution sur le plan H de la tangente en ce point.

(12 juin, de 7 h. à 11 h.)

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Mathématiques.

530. — 1° On considère une courbe plane telle que les coordonnées rectangulaires d'un quelconque de ses points s'expriment au moyen du paramètre t par les formules

$$x = at^3 + bt^2 + ct, \qquad y = t^2.$$

Quels doivent être les coefficients a, b, c pour que les cosinus directeurs de la tangente en un point quelconque de la courbe soient des fonctions rationnelles de t ? Démontrer que toutes les courbes que l'on obtient ainsi sont semblables et semblablement placées.

2° Evaluer, pour l'une d'elle, la longueur de la boucle située au-dessous du point double.

3° Considérant, en particulier, la courbe (C) que représentent les formules

$$x = t - \frac{t^3}{3}, \qquad y = t^2,$$

on lui mène deux tangentes parallèles, de coefficient angulaire m : Déterminer, en fonction de m, les coordonnées du point où la courbe (C) est rencontrée par la droite qui joint les points de contact de ces deux tangentes, et trouver l'enveloppe (E) de cette même droite, variable avec m.

4° Former les équations des tangentes menées à la courbe (E) par un point A_0 de la courbe (C), correspondant à la valeur t_0 du paramètre t. Quelle est celle de ces droites qui rencontre la courbe (C), abstraction faite de A_0, en deux points où les tangentes sont parallèles ?

5° Dans l'espace, on considère la courbe (K) définie par les équations

$$x = z - \frac{z^3}{3}, \qquad y = z^2,$$

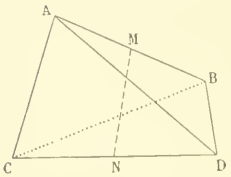
ainsi que les cylindres (S) et (S') qui la projettent respectivement sur les plans des xy et des xz. Ces deux cylindres se coupent suivant une autre courbe (K'). Former l'équation du cylindre qui projette (K') sur le plan des yz.

6° Trouver le lieu des points d'intersection des tangentes à la courbe (K') en deux points situés sur une même génératrice du cylindre (S'). On figurera la projection de ce lieu sur le plan des yz.

(15 juin, durée 6 heures.)

Physique.

I. — Comment fait-on une pesée au moyen d'une balance de précision ?



II. — **531.** — Soit un tétraèdre formé comme il suit : les deux arêtes opposées AB, CD sont perpendiculaires, en leurs milieux M, N, à une même droite MN et égales au double de MN ; de plus, elles sont perpendiculaires entre elles ; il en résulte que les dièdres AB, CD du tétraèdre sont droits.

Etudier comment se comporte, en tant que prisme à réflexion totale, un morceau de verre ayant la forme de ce tétraèdre : la lumière tombe à peu près normalement sur l'une des faces du dièdre AB et sort par l'autre face du même dièdre après s'être réfléchie à l'intérieur du dièdre CD.

Quel effet produit un prisme de cette sorte, disposé devant l'objectif d'une lunette astronomique ?

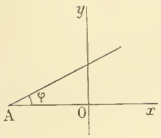
(16 juin, durée 6 heures.)

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE NAVALE (Concours de 1896).

Géométrie analytique.

523. — *Oxy étant deux axes rectangulaires, on considère toutes les hyperboles équilatères tangentes en O à l'axe des y et dont un des axes passe par un point fixe A de l'axe des x.*



Trouver le lieu des centres et le lieu des foyers (démonstration géométrique) : distinguer sur le lieu des foyers les points qui correspondent aux foyers se trouvant sur l'axe passant par A des points qui correspondent aux foyers se trouvant sur l'axe perpendiculaire.

Trouver le lieu des sommets, le construire en coordonnées polaires, en prenant pour origine le point A.

Par chaque point du plan passent deux de ces hyperboles : Distinguer les régions du plan qui correspondent à des hyperboles réelles.

On prendra comme paramètre variable l'angle φ que fait l'axe de l'hyperbole passant par A avec l'axe des x, et on posera $\overline{OA} = -a$.

Toutes les hyperboles équilatères qui passent par l'origine des coordonnées et sont tangentes en ce point à l'axe des y, sont représentées par l'équation

$$x^2 + 2Bxy - y^2 + 2Dx = 0.$$

L'angle φ dont il faudrait faire tourner les axes de coordonnées pour les rendre parallèles aux axes de la courbe est, d'après une formule connue $\left(\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A - C}\right)$, donné par l'équation

$$\operatorname{tg} 2\varphi = B.$$

Avec cette condition nouvelle, l'équation générale des hyperboles devient

$$x^2 + 2xy \operatorname{tg} 2\varphi - y^2 + 2Dx = 0.$$

Le centre a pour coordonnées la solution du système

$$\left.\begin{aligned} x + y \operatorname{tg} 2\varphi + D &= 0 \\ x \operatorname{tg} 2\varphi - y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{ou bien} \quad \left\{\begin{aligned} x &= -D \cos^2 2\varphi \\ y &= -D \sin 2\varphi \cos 2\varphi. \end{aligned}\right.$$

L'un des axes de l'hyperbole a donc pour équation

$$y + D \sin 2\varphi \cos 2\varphi = (x + D \cos^2 2\varphi) \operatorname{tg} \varphi.$$

Pour que cet axe passe par le point A donné, on doit avoir

$$D \sin 2\varphi \cos 2\varphi = (-a + D \cos^2 2\varphi) \operatorname{tg} \varphi.$$

Cette équation donne la valeur de D :

$$D \cos 2\varphi (\sin 2\varphi \cos \varphi - \cos 2\varphi \sin \varphi) = -a \sin \varphi,$$

c'est-à-dire

$$D = -\frac{a}{\cos 2\varphi}.$$

En résumé, l'équation d'une hyperbole équilatère remplissant toutes les conditions de l'énoncé est

$$(1) \qquad (x^2 - y^2) \cos 2\varphi + 2xy \sin 2\varphi - 2ax = 0.$$

Les coordonnées du centre sont

$$x = a \cos 2\varphi, \qquad y = a \sin 2\varphi.$$

Quand φ varie, le centre de l'hyperbole décrit donc le cercle

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0,$$

qui a son centre à l'origine et passe par le point donné.

Lieu des foyers. — Les équations des hyperboles de Plücker

$$4(A - C)f(x, y) = (f'_x)^2 - (f'_y)^2 \qquad \text{et} \qquad 4Bf(x, y) = f'_x f'_y$$

deviennent ici

$$2\cos 2\varphi(x^2 - y^2)\cos 2\varphi + 2xy\sin 2\varphi - 2ax) = (x\cos 2\varphi + y\sin 2\varphi - a)^2 - (x\sin 2\varphi - y\cos 2\varphi)^2.$$

et $\sin 2\varphi(x^2 - y^2)\cos 2\varphi + 2xy\sin 2\varphi - 2ax) = (x\cos 2\varphi + y\sin 2\varphi - a)(x\sin 2\varphi - y\cos 2\varphi).$

Après des réductions simples, ces équations s'écrivent

$$x^2 - y^2 - 2a(x\cos 2\varphi - y\sin 2\varphi) - a^2 = 0,$$

et

$$xy - a(x\sin 2\varphi + y\cos 2\varphi) = 0.$$

Pour éliminer φ, nous écrivons ces équations de la manière suivante :

$$a(x\cos 2\varphi - y\sin 2\varphi) = \frac{x^2 - y^2}{2} - \frac{a^2}{2},$$

$$a(x\sin 2\varphi + y\cos 2\varphi) = xy;$$

puis nous élevons au carré et nous ajoutons membre à membre, ce qui donne

$$a^2(x^2 + y^2) = \frac{(x^2 + y^2)^2}{4} - \frac{2a^2(x^2 - y^2)}{4} + \frac{a^4}{4},$$

ou bien

$$a^2x^2 = \frac{(x^2 + y^2)^2}{4} - \frac{2a^2(x^2 + y^2)}{4} + \frac{a^4}{4},$$

ou encore

$$(x^2 + y^2 - a^2)^2 - 4a^2x^2 = 0,$$

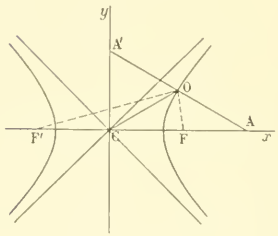
c'est-à-dire

$$(x^2 + y^2 - 2ax - a^2)(x^2 + y^2 + 2ax - a^2) = 0.$$

Le lieu des foyers se compose donc de deux cercles symétriques par rapport à l'axe des y, ayant leurs centres sur l'axe des x, à la distance a de l'origine, et un rayon égal à $a\sqrt{2}$.

Démonstration géométrique. — Considérons une hyperbole équilatère rapportée à ses axes, et soit $x^2 - y^2 - k^2 = 0$ son équation. La normale au point $O(x_1, y_1)$ est représentée par

$$\frac{x - x_1}{x_1} + \frac{y - y_1}{y_1} = 0, \qquad \text{ou bien} \qquad \frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} - 2 = 0.$$



Elle coupe les axes de l'hyperbole en des points A et A' situés à des distances du centre C respectivement égales à $2x_1$ et $2y_1$, de sorte que la droite CO qui joint le centre au point d'incidence O est médiane du triangle rectangle ACA'. Si donc on suppose fixes le point O et l'un des points A ou A', le centre C, supposé mobile, décrira le cercle ayant O pour centre et OA pour rayon.

De plus, l'hypoténuse du triangle rectangle étant fixe, *chacun des axes de l'hyperbole variable passe par un point fixe*, et ces deux points sont symétriques l'un de l'autre par rapport au point O.

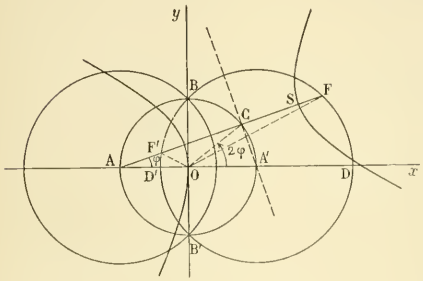
Enfin, l'axe transverse de l'hyperbole est dirigé suivant le plus grand des deux côtés de l'angle droit du triangle rectangle ACA'; car l'égalité $x_1^2 = y_1^2 + k^2$ montre que $|x_1|$ surpasse $|y_1|$.

Pour trouver le lieu des foyers F et F', nous démontrerons que les rapports $\frac{FA}{FO}$, $\frac{F'A}{F'O}$ sont constants. Si l'on se rappelle que les rayons vecteurs FO et F'O ont pour valeurs respectives $\frac{cx_1}{a} - a$ et $\frac{cx_1}{a} + a$, et que $c = a\sqrt{2}$, on voit que

$$\frac{FA}{FO} = \frac{2x_1 - a\sqrt{2}}{x_1\sqrt{2} - a} = \sqrt{2}, \qquad \text{et} \qquad \frac{F'A}{F'O} = \frac{2x_1 + a\sqrt{2}}{x_1\sqrt{2} + a} = \sqrt{2}.$$

Les points A et O étant supposés fixes, on voit que les points F et F′ décrivent un même cercle, lieu géométrique des points tels que le rapport des distances de chacun d'eux au point fixe de l'axe transverse et au point fixe de l'hyperbole est égal à $\sqrt{2}$.

En appliquant ces remarques au problème proposé, on voit que le lieu des centres des hyperboles équilatères données est bien le cercle ayant O pour centre et OA pour rayon. Le second axe de la courbe passe par A′ symétrique de A par rapport à O. Le demi-cercle BA′B′ est le lieu des positions du centre lorsque l'axe transverse passe par A. Si c'est l'axe non transverse qui passe en ce point, le centre décrit le demi-cercle BAB′.



Cherchons le lieu des foyers, l'axe transverse passant par A ; nous savons que ce lieu se confond avec le lieu des points tels que le rapport de leurs distances à A et O est égal à $\sqrt{2}$; il est visible que les points B et B′ en font partie ; on les obtient quand φ étant égal à $\pm\frac{\pi}{4}$, le centre C est aussi en B ou B′. Lorsque l'angle φ est nul, le centre est en A′, le demi-axe transverse de l'hyperbole est A′O et les foyers sont en D et D′ à une distance de A′ égale à $a\sqrt{2}$. On vérifie sans peine que les rapports $\frac{DA}{DO}$ et $\frac{D'A}{D'O}$ valent $\sqrt{2}$; le lieu des foyers est donc le cercle qui a A′ pour centre et A′B pour rayon. On voit aussi que le demi-cercle BA′B′ est le lieu des milieux des cordes du cercle lieu des foyers lorsque ces cordes tournent autour du point fixe A.

Si l'axe transverse passe par le point A′, les foyers tracent évidemment le cercle symétrique par rapport à Oy de celui qu'on vient de trouver.

Lieu des sommets. — Nous considérons seulement le cas où c'est l'axe transverse qui passe par le point A donné. Il est clair que quand cet axe passe par A′ le lieu est symétrique du premier par rapport à l'axe des y.

L'équation de l'axe transverse est alors

$$y = (x+a)\operatorname{tg}\varphi, \qquad \text{d'où} \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x+a}.$$

On en tire
$$\cos 2\varphi = \frac{(x+a)^2 - y^2}{(x+a)^2 + y^2} \qquad \text{et} \qquad \sin 2\varphi = \frac{2(x+a)y}{(x+a)^2 + y^2}.$$

En remplaçant dans l'équation (1) et chassant le dénominateur, on a l'équation du lieu :

$$(x^2 - y^2)[(x+a)^2 - y^2] + 4x(x+a)y^2 - 2ax[(x+a)^2 + y^2] = 0.$$

La courbe est du 4e degré ; elle passe pour l'origine et a pour tangente en ce point l'axe des y.

Portons l'origine au point A, c'est-à-dire remplaçons x par $x - a$; nous obtenons

$$[(x-a)^2 - y^2](x^2 - y^2) + 4(x-a)xy^2 - 2a(x-a)(x^2 + y^2) = 0.$$

Développons partiellement et simplifions

$$(x^2 - y^2 - 2ax + a^2)(x^2 - y^2) + 4x^2y^2 - 4axy^2 - 2ax(x^2 + y^2) + 2a^2(x^2 + y^2) = 0.$$
$$(x^2 + y^2)^2 - 4ax(x^2 + y^2) + a^2(3x^2 + y^2) = 0.$$

L'origine nouvelle est un point isolé.

Posons
$$x = \rho\cos\omega, \qquad y = \rho\sin\omega;$$

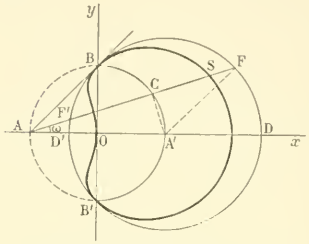
en divisant tous les termes par ρ^2, nous avons

$$\rho^2 - 4a\rho\cos\omega + a^2(2\cos^2\omega + 1) = 0,$$

d'où

$$\rho = a(2\cos\omega \pm \sqrt{\cos 2\omega}).$$

Nous voyons que l'angle ω ne peut varier que de $-\frac{\pi}{4}$ à $+\frac{\pi}{4}$; la courbe est symétrique par rapport à l'axe polaire et les rayons vecteurs de tous ses points s'obtiennent en ajoutant et retranchant aux rayons vecteurs des points du cercle $\rho = 2a\cos\omega$, lieu des centres, la longueur variable $a\sqrt{\cos 2\omega}$.



De là résulte pour la courbe la forme indiquée sur la figure.

Remarque. — On peut aussi, pour obtenir le lieu des sommets, remarquer que dans le triangle rectangle CAF, on a

$$CF = \sqrt{2a^2 - 4a^2\sin^2\omega} = a\sqrt{2}\sqrt{\cos 2\omega}.$$

En divisant cette longueur par $\sqrt{2}$, on a la longueur qu'il faut ajouter et retrancher à AC pour avoir les sommets de l'hyperbole dont l'axe est AC.

Séparation des régions du plan par chaque point desquelles passent des hyperboles réelles. — L'équation (1) dans laquelle nous remplaçons $\cos 2\varphi$ et $\sin 2\varphi$ par leurs valeurs en fonction de $\operatorname{tg}\varphi$ devient

$$x^2 - y^2(1 - \operatorname{tg}^2\varphi) + 4xy\operatorname{tg}\varphi - 2ax(1 + \operatorname{tg}^2\varphi) = 0$$

ou bien

$$(y^2 - x^2 - 2ax)\operatorname{tg}^2\varphi + 4xy\operatorname{tg}\varphi + x^2 - y^2 - 2ax = 0.$$

Si l'on suppose donnés x et y, cette équation détermine $\operatorname{tg}\varphi$, et à chaque valeur réelle de $\operatorname{tg}\varphi$ correspond une hyperbole réelle. Or, la condition de réalité des racines est

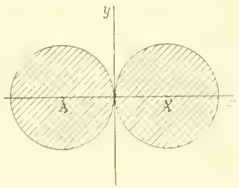
$$4x^2y^2 + (x^2 - y^2 + 2ax)(x^2 - y^2 - 2ax) \geqslant 0,$$

c'est-à-dire

$$(x^2 + y^2)^2 - 4a^2x^2 \geqslant 0,$$

ou enfin

$$(x^2 + y^2 - 2ax)(x^2 + y^2 + 2ax) \geqslant 0.$$



La ligne séparatrice se compose donc de deux cercles symétriques par rapport à Oy, ayant pour centres les points A et A', pour rayons a. Par tous les points extérieurs à ces cercles on peut faire passer deux hyperboles réelles; aucune d'elles ne passe par les points intérieurs. Ces cercles constituent l'*enveloppe* des hyperboles considérées.

E. D.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

ÉCOLE CENTRALE (1895)

Arithmétique (M. Combette).

222. — Trouver les nombres qui, divisés séparément par 36 et par 15, donnent des restes inférieurs à 3.

223. — Le nombre 5136 étant écrit dans le système de base 7, le transcrire dans le système de base 10.

224. — Divisibilité par 13, par 37.

225. — Dernier chiffre du produit $3714^{12} \times 2528^7$.

226. — Reste de la division de 7983^{28} par 11, de 3915^{32} par 7.

227. — Trouver 20 nombres consécutifs tels qu'aucun d'eux ne soit premier.

228. — Tout nombre premier supérieur à 3 est de la forme $6n \pm 1$. La réciproque est-elle vraie ?

229. — Si a et b sont deux nombres premiers entre eux, il existe deux nombres entiers α et β positifs ou négatifs, tels que l'on ait $a\alpha + b\beta = 1$, et réciproquement.

230. — A, B, C étant trois nombres entiers, Δ le plus grand commun diviseur des produits de ces nombres deux à deux, le plus petit commun multiple des trois nombres est $\frac{ABC}{\Delta}$. A quel caractère reconnaît-on le plus petit commun multiple de plusieurs nombres ?

231. — Quelle est la plus haute puissance de 7 qui divise le produit des 1000 premiers nombres, la plus haute puissance de 11 qui divise le produit des 10 000 premiers nombres ?

232. — Le produit de p nombres entiers consécutifs est divisible par le produit des p premiers nombres entiers.

233. — On considère le produit $P = 1.2.3...p$. Si $p+1$ est un nombre premier, P n'est jamais divisible par $p+1$.

234. — Condition pour qu'une fraction irréductible $\frac{a}{b}$ soit égale à une fraction dont le dénominateur est une puissance de 15.

235. — $\frac{a}{b}$ étant une fraction irréductible, $\frac{a^5}{b^5}$ est-elle irréductible ?

236. — $\frac{a}{b}$ $\frac{a'}{b'}$ étant deux fractions irréductibles, conditions pour que $\frac{ab' + ba'}{bb'}$ soit irréductible.

237. — a, b, c étant trois nombres entiers, conditions pour que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc + ca + ab}{abc}$ soit irréductible.

238. — n étant la racine carrée à une unité près par défaut du nombre N, on pose $N = n^2 + R$; limite supérieure de R.

239. — n désignant un nombre entier, montrer que n est la racine carrée à une unité près par défaut du produit $n(n+2)$.

240. — Extraire la racine cubique du nombre 75912. Faire la théorie sur cet exemple.

241. — On a les égalités $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''}$; en déduire $\sqrt{ab} + \sqrt{a'b'} + \sqrt{a''b''} = \sqrt{a + a' + a''}.\sqrt{b + b' + b''}$.

242. — Soit $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'} < \frac{a''}{b''}$. — Entre quelles limites est compris le rapport $\frac{a + a' + a''}{b + b' + b''}$?

243. — Escompte en dedans ; escompte commercial. Calculer la différence de deux escomptes.

244. — On va à la poste et on demande un mandat ; quelle est la somme portée sur le mandat sachant qu'on a versé 321f. Le droit perçu est de 1 0/0.

245. — Quelle somme retiendra-t-on sur un billet de Af payable à 35 jours si on veut le toucher aujourd'hui, l'escompte commercial étant de 4 1/2 0/0 ?

246. — Quelle est la valeur nominale d'un billet qui a été escompté à 4 1/2 0/0 sachant qu'il avait à courir 35 jours et qu'on a touché 2536f ?

247. — Calculer le produit de 14,73 par 132,83 à 0,01 près, par la multiplication abrégée.

248. Calculer à 0,01 près les produits suivants :

$$3{,}15 \times \sqrt{71}, \qquad 2{,}71 \times \sqrt{3{,}7}, \qquad 0{,}48 \times \sqrt{437{,}56}, \qquad 4{,}817 \times \sqrt{0{,}528}.$$

249. — Calculer le quotient $\frac{35{,}728}{0{,}45}$ à $\frac{3}{28}$ près.

250. — Calculer à 0,01 près les quotients :

$$\frac{\sqrt{27{,}38}}{3{,}46}, \qquad \frac{0{,}47 \times \sqrt{3{,}48}}{23}, \qquad \frac{14{,}17 \times \sqrt{83{,}01}}{3{,}21}, \qquad \frac{3{,}48}{\sqrt{5{,}12}}, \qquad \frac{\sqrt{31{,}5}}{\sqrt{21{,}2}},$$

$$\frac{\sqrt{13{,}43}}{\sqrt{7{,}03}}, \qquad \frac{3{,}821}{\sqrt[3]{2{,}15}}, \qquad \frac{15{,}318}{\sqrt[3]{2{,}35}}, \qquad \frac{75{,}13}{\sqrt[3]{10{,}28}}.$$

Algèbre (M. Combette).

251. — Rendre rationnels les dénominateurs des fractions $\frac{1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt{b}}$, $\frac{1}{\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{4}}$, $\frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt[4]{3}}$.

252. — Résoudre par la méthode de Bezout un système de trois équations du premier degré à trois inconnues.

253. — Résoudre les systèmes d'équations :

$$\begin{aligned} x + y + 3z &= 1, \\ 2x + 5y + 6z &= 2, \\ 4x + 9y + 12z &= 3 ; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x - 2y + z &= 11, \\ 5x + 3y - 2z &= 8, \\ 8x + y - z &= 19 ; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x + 2y - 52z &= 11, \\ 2x - y + 30z &= 12, \\ 5x + y - 22z &= 23. \end{aligned}$$

254. — Résoudre les équations $ax + by + cz + d = 0$, $a'x + b'y + c'z + d' = 0$.

255. — Limites des racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, quand a tend vers 0.

256. — Relation entre les coefficients de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ pour que le cube d'une racine soit égal au carré de l'autre ; — pour que les deux racines vérifient la relation $m + p\alpha + q\beta = 0$.

257. — Etant données les deux équations $ax^2 + bx + c = 0$, $a'x^2 + b'x + c' = 0$, conditions pour qu'une racine de la première soit double d'une racine de la seconde ; pour que α étant racine de la première, $\alpha + 2$ soit racine de la seconde ; — pour que α et β étant les racines de la première, $\alpha + 2$, $\beta + 2$ soient les racines de la seconde.

258. — Démontrer qu'on peut toujours décomposer un trinome bicarré en un produit de facteurs réels du second degré. Indiquer un procédé pratique.

259. — Résoudre les équations $x^6 - 1 = 0$, $x^{10} - 1 = 0$. Si α, β sont deux racines d'une pareille équation, $\alpha^2\beta^4$ est aussi racine de cette équation.

260. — Résoudre le système $x + y = a$, $x^3 + y^3 = ab^2$.

261. — Résoudre les inégalités $\dfrac{2}{x^2 - 4} - \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6} < \dfrac{3}{x + 3}$, $\dfrac{3}{x^2 - 9} - \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6} < \dfrac{5}{x + 3}$.

$\dfrac{x^3 - 1}{x^2 - x + 1} > 0$, $\dfrac{x^3 - 2x - 1}{x^3 + 1} > 0$.

262. — Résoudre les équations

$x + \sqrt{a^2 - x^2} = b$, $x + \sqrt{16 - x^2} = 7$, $3x - 1 = \sqrt{x - 5}$, $x - 1 = 2\sqrt{x + 3}$, $\sqrt{2x + 1} + \sqrt{x + 1} = 1$.

263. — Résoudre les inégalités $3x - 2 > \sqrt{x^2 - 1}$, $3x + 1 > \sqrt{2x + 1}$, $\sqrt{5x - 1} > x - 2$.

264. — Démontrer les formules $C_m^p = C_{m-1}^p + C_m^{p-1}$, $C_m = C_{m-2}^p + 2C_{m-2}^{p-1} + C_{m-2}^{p-2}$.

265. — Calculer la somme $C_m^p + C_{m-1}^p + C_{m-2}^p + \cdots + C_p^p$.

266. — Permutations avec répétition.

267. — Calculer la somme $S = 1 + 2q + 3q^2 + \ldots + nq^{n-1}$.

268. — Démontrer que la série $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{a+2} + \ldots + \dfrac{1}{a+n} + \ldots$ est divergente (comparer à la série harmonique).

269. — Etudier les séries $1 + \dfrac{1}{2^\alpha} + \dfrac{1}{3^\alpha} + \ldots + \dfrac{1}{n^\alpha} + \ldots$, $1 - \dfrac{1}{2^\alpha} + \dfrac{1}{3^\alpha} - \ldots \pm \dfrac{1}{n^\alpha} \ldots$

270. — Etudier les séries $1 + \dfrac{x}{1} + \dfrac{x^2}{1.2} + \cdots + \dfrac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \cdots$

$1 - \dfrac{x}{1} + \dfrac{x^2}{1.2} - \cdots \pm \dfrac{x^n}{1.2.3\ldots n} \cdots$

271. — Etudier les séries $1 + \dfrac{x}{1} + \dfrac{x^2}{2} + \cdots + \dfrac{x^n}{n} + \cdots$

$1 - \dfrac{x}{1} + \dfrac{x^2}{2} - \cdots \pm \dfrac{x^n}{n} \cdots$

272. — Développement de e^x en série.

273. — Limite de $(1 + x)^y$ pour $x = 0$ sachant que $\lim. xy = a$.

274. — Limite de $\left(1 + \dfrac{1}{5x^2}\right)^{2x^2+1}$ pour x infini.

275. — Résoudre le système $7^{xy} - \dfrac{6}{7^{xy}} - 1 = 0$, $x + y = 2$.

ECOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE (1895)

Algèbre.

78. — Étudier les séries

$$u_n = \operatorname{tg}(\alpha + n), \qquad u_n = \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}, \qquad u_n = \frac{2n}{4n^3 + 1};$$

pour cette dernière, trouver une limite de l'erreur en s'arrêtant au terme de rang p.

79. — On donne $y = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{a - x}{1 + ax}$, calculer la dérivée de x par rapport à $\cos y$.

80. — On donne $\rho = \sin e^{\frac{1}{\omega-1}}$; dérivée de ω par rapport à ρ.

81. — On donne $y^2 + \mathrm{L}y - \sin x = 0$, calculer y_x.

82. — Discuter les fonctions

$$y = e^{\sqrt{4x-3}}, \qquad y = e^{-\sqrt{2x-3}}, \qquad y = (1+x)^{\frac{1}{1x}}, \qquad y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x, \qquad y = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}},$$

$$y = \operatorname{tg}\frac{x^2-1}{x^2+x+1}, \qquad y = \sec\frac{1}{x^2+1}.$$

83. — Vraie valeur de $\dfrac{e^x - e^{\cos x}}{x - \sin x}$ pour $x = 0$.

84. — Vraie valeur de $\dfrac{\sqrt[10]{x} - \sqrt[10]{3}}{\sqrt[7]{x} - \sqrt[7]{3}}$ pour $x = 3$.

85. — Résoudre l'inégalité $\dfrac{x-1}{x^3+1} > 2x - 3$.

86. — Séparer les racines des équations

$$x^4 + x + 3 = 0, \qquad 3x^6 + x^3 - x + 1 = 0, \qquad 8^x - x = e, \qquad \frac{1}{x-3} + \frac{1}{3x-2} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

87. — Résoudre l'équation $x^4 + 3 = 0$.

Géométrie analytique.

88. — Construire les courbes

$$(x^2 - y^2)^2 - a^2(x^2 + y^2) = 0; \qquad x^5 + y^4 - x^3 + y^2 = 0;$$

$$x = \frac{t}{t^3-1}, \qquad y = \frac{t^2}{t^2+t+1}; \qquad \rho^2 = \operatorname{tg}\frac{\omega}{2} \qquad \omega = \rho^2 - 3\rho - 1; \qquad \rho = \sin\omega + \sqrt{1 - \sin\omega};$$

$$\rho = \frac{\cos\omega}{\sin 3\omega}; \qquad \rho^2 = \sec\frac{\omega}{3}; \qquad \rho = \frac{\sin\omega}{\cos 2\omega}.$$

89. — Etant donnée la courbe $y^2 = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$, trouver un point tel que la normale en ce point soit tangente à la courbe en un autre point.

90. — On donne un angle et on considère un cercle variable inscrit dans l'angle. D'un point extérieur P on mène des tangentes au cercle. Trouver le lieu des points de contact. Voir sans calcul si le lieu a des points à l'infini.

91. — Equation générale des hyperboles ayant une droite donnée pour directrice et passant par un point donné.

92. — On donne une parabole fixe P et une tangente variable. On considère la parabole homofocale à la parabole P et ayant pour directrice la tangente. Lieu des points de contact des tangentes parallèles à une direction donnée; lieu des sommets. On mène une tangente commune aux deux paraboles, lieu des points de contact avec la parabole mobile.

93. — Equation générale des coniques bitangentes à un cercle et passant par deux points. Lieu des foyers.

94. — On donne une parabole et une corde variable AB passant par le foyer. On construit le cercle de diamètre AB et l'on demande le lieu des points de contact des tangentes au cercle parallèles à la directrice de la parabole. Prévoir la nature du lieu. Lieu du centre du cercle. Le lieu a-t-il des branches infinies?

95. — Une droite rencontre une conique au point A et une autre conique au point B. Lieu du milieu de AB quand la droite se déplace parallèlement à elle-même.

96. — On considère les hyperboles équilatères tangentes à une droite fixe en un point donné et passant par un autre point donné. Lieu des points de contact des tangentes issues d'un point pris sur la droite donnée. Lieu des centres. Construire l'hyperbole équilatère considérée connaissant le point où l'une des asymptotes rencontre la droite donnée.

97. — On donne deux axes rectangulaires, et l'on considère les coniques ayant l'origine pour foyer et passant par un point sur Ox et un point sur Oy. Lieu du deuxième foyer.

98. — Etant données deux coniques concentriques, trouver un système de diamètres conjugués communs.

99. — Par le centre d'une hyperbole on mène deux droites faisant un angle constant et rencontrant la courbe en A et B. Lieu du milieu de AB.

100. — Connaissant trois points d'intersection d'une conique et d'un cercle, trouver le quatrième. Quel est le théorème sur lequel on s'appuie?

101. — Lieu d'un point tel que les tangentes issues de ce point à une parabole soient parallèles à deux diamètres conjugués d'une conique donnée.

102. — Lieu des foyers des coniques circonscrites à un parallélogramme.

103. — Dans un trièdre les plans menés par chaque arête perpendiculairement à la face opposée passent par une même droite.

ÉCOLE NAVALE (*)

532. — On donne un cercle ayant pour centre l'origine et un point A sur Ox. Par les points O et A, on fait passer un second cercle auquel on mène la tangente en A. Lieu du point de rencontre de cette tangente avec l'axe radical des deux cercles.

(*) Les solutions de ces 15 questions seront publiées succinctement dans la *Revue*; nos lecteurs peuvent nous les envoyer.

533. — Lieu des centres des hyperboles équilatères tangentes à l'origine à Ox et dont l'axe transverse a pour longueur $2a$.

534. — Lieu des sommets des hyperboles équilatères qui ont pour centre l'origine et qui passent par un point A de Ox.

535. — Les parallèles aux asymptotes menées par deux points A et B d'une hyperbole se coupent sur le diamètre conjugué des cordes parallèles à AB.

536. — Construire une hyperbole équilatère connaissant deux tangentes et les points de contact.

537. — On donne deux points A, A', sur l'axe des x, à égale distance de l'origine et un point B sur l'axe des y. Equation d'une parabole passant par les points A et A' et tangente à la parallèle à l'axe des x menée par le point B. Lieu du point de rencontre : 1° des tangentes, 2° des normales à la parabole en A et A'.

538. — On considère un angle de grandeur constante ayant son sommet en un point d'une parabole donnée. Lieu du point de rencontre des tangentes à la courbe en ses points d'intersection avec les deux côtés de l'angle.

539. — On donne la parabole $y^2 = 2px$ et un point P. Lieu du point de rencontre des normales à la parabole en ses points de rencontre avec la polaire du point P, lorsque le paramètre p varie.

540. — Lieu des foyers des paraboles tangentes en O à Ox et de paramètre donné p.

541. — Former l'équation générale des paraboles de paramètre p, tangentes à l'axe des x et dont la directrice passe par l'origine. Construire le foyer et le sommet pour une position donnée de la directrice. Lieu du foyer et du sommet.

542. — Former l'équation générale des paraboles ayant pour sommet l'origine et passant par un point A donné sur Ox. Construire le foyer d'une pareille parabole pour une direction donnée de l'axe. Lieu du foyer. Lieu du point de rencontre de l'axe et de la normale en A à la parabole.

543. — Former l'équation générale des paraboles circonscrites à un triangle rectangle OAB : 1° Combien de ces paraboles passent par un point donné du plan ; quel lieu doit décrire ce point pour que les axes des deux paraboles correspondantes soient rectangulaires ? 2° Par un point donné du plan passent trois axes de ces paraboles ; quel lieu doit décrire ce point pour que deux des axes soient rectangulaires ? Construire les trois axes qui passent par un point pris sur ce lieu. 3° Lieu des projections de l'origine O sur les axes de ces paraboles.

544. — Former l'équation générale des hyperboles ayant l'origine pour sommet et la droite $x = a$ pour asymptote : 1° Combien de ces hyperboles passent par un point donné M du plan ? Construire la seconde asymptote pour une position donnée du point M. 2° Lieu du second sommet. 3° Lieux des projections des deux sommets sur la seconde asymptote. 4° Lieu des foyers.

545. — On considère l'hyperbole équilatère passant par deux points A et B donnés sur Ox et admettant pour asymptote la droite $y = mx$. Lieux du centre et des sommets quand m varie.

546. — On considère les hyperboles ayant un foyer à l'origine, passant par un point donné M et admettant une asymptote parallèle à Oy. Déterminer géométriquement les hyperboles qui correspondent à une direction donnée de l'axe transverse. Construire la directrice qui correspond au foyer O et les sommets situés sur l'axe transverse. Lieux du centre et des sommets, quand on fait tourner l'axe autour du point O. Construire ces deux lieux en supposant le point M situé sur Ox.

BIBLIOGRAPHIE

Leçons sur la résolution algébrique des équations, par H. Vogt, professeur adjoint à la faculté des sciences de Nancy. Paris, *Nony et Cie*.

Voici un bon livre, court et très clair. Ceux qui voudront s'initier aux belles théories de la résolution des équations algébriques, sans craindre de s'égarer en de trop longues et trop difficiles lectures, l'étudieront avec fruit. M. Vogt présente d'abord les points essentiels de la théorie des substitutions, donne la notion de groupes, de sous-groupes, de groupes simples et composés. Il montre qu'à chaque fonction rationnelle correspond un groupe composé de toutes les substitutions qui laissent la fonction invariable ; réciproquement, étant donné un groupe, on peut former des fonctions rationnelles appartenant à ce groupe. Les fonctions rationnelles des mêmes variables se distinguent en *genres*, les fonctions d'un même genre étant exprimables rationnellement en fonction de l'une *quelconque* d'entre elles appartenant au même groupe. Après une étude détaillée des fonctions cycliques et métacycliques, l'auteur aborde la question de la réductibilité des fonctions entières dans un domaine de rationalité donné : une fonction irréductible dans un domaine peut devenir réductible dans un autre domaine obtenu en adjoignant au premier certaines fonctions algébriques. Vient ensuite la notion du groupe d'une équation donnée, la manière pratique de la former. Suit une étude détaillée des équations du 2e, 3e et 4e degré, et des recherches de Lagrange. Après, l'auteur aborde la question de la résolution algébrique des équations, montre que l'équation générale de degré supérieur à 4 n'est pas résoluble, étudie la nature des équations spéciales résolubles. Les équations abéliennes, et, comme cas particulier, les équations binomes l'occupent ensuite. Puis il cherche quelles sont les équations irréductibles résolubles, de degrés premiers, et montre que leurs racines sont exprimables rationnellement en fonction de deux d'entre elles (équations de Gabois). Suivent des considérations sur le groupe d'une équation.

Comme on voit, le plan est simple. Le livre est attrayant et très instructif.

R. Le Vavasseur, Professeur au Lycée de Toulouse

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

6e Année. N° 11. Août 1896

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR L'ÉQUATION BINOME

Une fonction symétrique

(1) $$\Sigma x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}$$

des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dans laquelle les exposants $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sont entiers (positifs, nuls ou négatifs), s'annule quand on y remplace les variables par les n racines de l'équation binome

$$x^n - 1 = 0,$$

toutes les fois que son degré M n'est pas divisible par n.

1° Si d'abord aucun des exposants $m_1, m_2, \ldots, m_n$ n'est négatif, la fonction (1) est entière, et on sait qu'en appelant $-p_1, p_2, -p_3, \ldots, (-1)^n p_n$ la somme des variables, celles de leurs produits deux à deux, trois à trois, ..., leur produit, elle peut se mettre sous la forme d'un polynome entier en $p_1, p_2, \ldots, p_n$,

$$\Sigma A_{\mu_1\mu_2\mu_3\ldots\mu_n} p_1^{\mu_1}, p_2^{\mu_2}, \ldots, p_n^{\mu_n},$$

dans chaque terme effectif duquel on a

$$1.\mu_1 + 2.\mu_2 + \cdots + n\mu_n = M.$$

Si M n'est pas divisible par n, dans aucun terme de ce polynome les exposants $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$ ne sont tous nuls ; car autrement, M se réduirait à $n\mu_n$, contrairement à l'hypothèse. Chaque terme de ce polynome contient donc comme facteur une au moins des quantités $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$, qui se réduisent toutes à zéro quand $x_1, x_2 \ldots, x_n$ représentent les n racines de l'équation binome.

2° Si le plus petit des exposants $m_1, m_2, \ldots, m_n$ est un nombre négatif $-m$, en multipliant la fonction (1) par $(x_1 x_2 \ldots x_n)^m$, on en obtient une autre

(2) $$\Sigma x_1^{m_1+m} x_2^{m_2+m} \ldots x_n^{m_n+m},$$

dans laquelle aucun exposant n'est négatif. Or, lorsqu'on remplace les variables par les racines de l'équation binome, le produit $(x_1 x_2 \ldots x_n)^m$ se réduisant à $(-1)^{nm}$, les deux fonctions (1) et (2) sont en même temps nulles ou non nulles ; de plus, leurs degrés, M et $M + nm$ sont aussi en même temps divisibles ou non par n. E.

LEÇON DE CINÉMATIQUE

Sur le mouvement des planètes; application au rayon de courbure de l'ellipse,

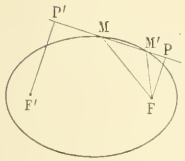
par M. J. **Richard**, Professeur au lycée de Tours.

Képler a démontré les trois lois suivantes :

1° *Les planètes décrivent des ellipses dont le soleil occupe un foyer* F;

2° *L'aire décrite par le rayon vecteur* MF *est proportionnelle au temps ;*

3° *Les carrés des temps des révolutions de deux planètes sont proportionnels aux cubes des demi-grands axes de leurs orbites.*



On propose de calculer l'accélération de la planète placée en M.

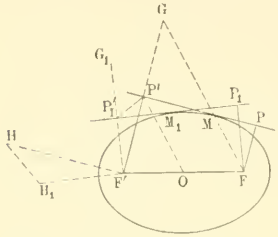
Soient M' une position voisine occupée par la planète à l'époque $t + h$; F' l'autre foyer de l'ellipse, FP, F'P' des perpendiculaires sur MM', a et b les demi-axes. On a

$$\text{Surface } MFM' = MM' \times \frac{FP}{2},$$

et par conséquent

$$\underset{(h=0)}{\text{limite}} \frac{\text{surf. MFM}'}{h} = \lim \left(\frac{\text{MM}'}{h} \times \frac{\text{FP}}{2} \right).$$

Le premier membre est constant, d'après la 2e loi, donc le second l'est aussi : or $\frac{\text{MM}'}{h}$ a pour limite la vitesse v, et FP a pour limite la distance de F à la tangente. Donc dans la 2e figure le produit $\text{FP} \times v$ est constant. Soit F'P' la perpendiculaire abaissée du deuxième foyer sur cette tangente; on a



$$\text{F'P'} \times \text{FP} = b^2, \qquad \text{d'où} \qquad \text{FP} = \frac{b^2}{\text{F'P'}};$$

donc $\frac{b^2 v}{\text{F'P'}}$ est constant.

Soit $v \times \text{FP} = 2\text{K}$ on aura $\frac{b^2 v}{\text{F'P'}} = 2\text{K}$,

ou $$v = \frac{2\text{KF'P'}}{b^2};$$

F'P' est donc proportionnel à v, d'ailleurs il est perpendiculaire à la direction de la vitesse. Pour avoir la vitesse en grandeur et en direction, il faut prendre F'H perpendiculaire à F'P' et égal à $\frac{2\text{KF'P'}}{b^2}$.

Supposons qu'au temps $t+h$, M vienne en M_1, que P et P' viennent en P_1 et P_1', et H en H_1; HH_1 sera perpendiculaire à $P'P_1'$; l'accélération, qui est en grandeur et direction la limite de $\frac{HH_1}{h}$, sera perpendiculaire à la limite de $P'P_1$, c'est-à-dire à la tangente au lieu du point P'. Comme ce lieu est un cercle de centre O, l'accélération sera parallèle au rayon P'O, c'est-à-dire à MF. Elle est donc dirigée vers le point F.

La grandeur de l'accélération est la limite de $\frac{HH_1}{h}$ ou de $\frac{2\text{K}}{b^2} \cdot \frac{\text{PP}_1'}{h}$, puisque

$$\frac{HH_1}{P'P_1} = \frac{\text{F'H}}{\text{F'P'}} = \frac{v}{\text{F'P'}} = \frac{2\text{K}}{b^2}.$$

Si on prend les symétriques de F' par rapport aux deux tangentes, on a, en appelant G et G_1 ces deux points :

$\text{PP}_1' = \frac{\text{GG}_1}{2}$, et arc $\text{GG}_1 = \text{FG} \times \alpha$, α étant l'angle MFM_1; l'accélération est donc la limite de

$$\frac{\text{K}}{b^2} \cdot \frac{\text{GG}_1}{h} \qquad \text{ou de} \qquad \frac{\text{K}}{b^2} \times \frac{\alpha \times \text{FG}}{h},$$

et, comme $\text{FG} = 2a$, l'accélération est la limite de

$$2a \frac{\text{K}}{b^2} \cdot \frac{\alpha}{h};$$

dans le triangle infiniment petit MM_1F on a

$$\text{aire MM}_1\text{F} = \frac{\text{MF} \times \text{MF}_1 \sin \alpha}{2},$$

donc $\frac{\text{aire MM}_1\text{F}}{h} = \frac{\text{MF} \times \text{MF}_1 \sin \alpha}{2h}$ et, en passant à la limite, on a

$$\text{K} = \frac{\overline{\text{MF}}^2}{2} \times \lim \frac{\alpha}{h}; \qquad \text{donc} \qquad \text{limite } \frac{\alpha}{h} = \frac{2\text{K}}{\overline{\text{MF}}^2},$$

ce qui donne finalement pour l'expression de l'accélération

$$\gamma = \frac{2a\text{K}}{b^2} \cdot \frac{2\text{K}}{\overline{\text{MF}}^2} = \frac{4\text{K}^2 a}{b^2 \overline{\text{MF}}^2}.$$

Calculons K. L'aire de l'ellipse est πab. Soit T la durée de la révolution ; on a

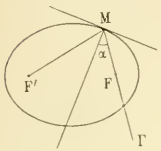
$$K = \frac{\pi ab}{T},$$

par suite

$$\gamma = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2 \times \overline{MF}^2}.$$

L'accélération est donc en raison inverse du carré de la distance. La 3e loi de Kepler montre que $\frac{a^3}{T^2}$ est constant ; la constante d'attraction est donc la même pour toutes les planètes.

Nous allons appliquer ce qui précède à la recherche du rayon de courbure de l'ellipse.



Soient MΓ l'accélération, α l'angle de MF avec la normale; la projection MΓ cos α de l'accélération sur la normale est égale à $\frac{v^2}{R}$; on a donc

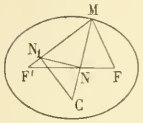
$$\frac{v^2}{R} = \frac{4\pi a^3}{T^2} \frac{\cos \alpha}{MF^2}.$$

D'autre part on a trouvé $v = \frac{2K}{FP} = \frac{2\pi ab}{T \times FP} = \frac{2\pi ab}{T \times MF \cos \alpha}$;

en portant cette valeur de v dans l'égalité précédente, on a, toutes réductions faites,

$$R = \frac{b^2}{a \cos^3 \alpha}.$$

Je dis que l'on obtient R par la construction suivante :



Au point N où la normale MN coupe le grand axe, menons NN_1 perpendiculaire à la normale. Au point N_1 où NN_1 coupe MF menons N_1C perpendiculaire sur MF'. C est le centre de courbure.

Pour vérifier, calculons MC; nous avons

$$MN_1 = \frac{MN}{\cos \alpha}, \qquad MC = \frac{MN_1}{\cos \alpha} = \frac{MN}{\cos^2 \alpha};$$

la formule qui donne la longueur d'une bissectrice

$$\left[\alpha^2 = \frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2} \right]$$

donne ici :

$$\overline{MN}^2 = \frac{4MF.MF'(a+c)(a-c)}{4a^2} = \frac{b^2 MF.MF'}{a^2};$$

d'autre part la formule de trigonométrie

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{p(p-a)}{bc}$$

donne

$$\cos^2 \alpha = \frac{b^2}{MF.MF'},$$

de sorte que

$$MN = \frac{b^2}{a \cos \alpha},$$

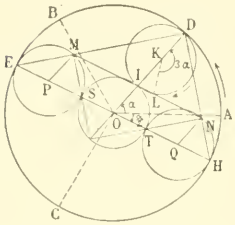
et par suite

$$MC = \frac{b^2}{a \cos^3 \alpha} = R.$$

C. Q. F. D.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

475. — *Une tangente quelconque à une hypocycloïde à trois rebroussements rencontre la courbe en deux points autres que le point de contact. Démontrer que les tangentes à la courbe en ces deux points sont rectangulaires.*



Soient : A, B et C les points cuspidaux,
R le rayon du cercle générateur K,
3R le rayon du cercle fixe,
$\alpha = \widehat{AOD}$.

En prenant arc DL = arc DA, L est un point de l'hypocycloïde et HL est la tangente en ce point. Cela posé, nous allons établir le théorème suivant :

Théorème. — *Si on prend* HM = HN = 2R, *les points* M *et* N *sont les intersections de la tangente* HL *avec l'hypocycloïde.*

Menons le diamètre ESTH parallèle à HL et prenons OP = OQ = 2R ; nous aurons d'abord $\widehat{AOH} = \frac{\alpha}{2}$; puis les figures OIMP, OINQ étant des parallélogrammes, nous aurons aussi PM = QN = R ; il en résulte que les cercles décrits sur ES et sur TH comme diamètres passent le premier par M et le second par N.

Pour montrer que M et N sont deux points de l'hypocycloïde, il suffit donc de prouver que arc EM = arc EB et que arc HN = arc HA, ou, ce qui est la même chose, que

$$\widehat{EPM} = 3\widehat{EOB}, \qquad \widehat{HQN} = 3\widehat{HOA}.$$

Or

$$EPM = EOI = \pi - \frac{3\alpha}{2}, \qquad EOB = \pi - \frac{\alpha}{2} - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2},$$

$$HQN = HOI = \frac{3\alpha}{2}, \qquad HOA = \frac{\alpha}{2}.$$

La proposition est donc établie. On peut l'énoncer comme il suit :

La portion de tangente à l'hypocycloïde comprise dans la courbe est constante et égale à quatre fois le rayon du cercle générateur.

La proposition de M. Goulard est dès lors évidente :

EM, normale en M, et HN, normale en N, passent par D ; elles sont par suite rectangulaires et il en est de même des tangentes MS, NT.

La proposition sur laquelle nous nous appuyons est peut-être connue ; notre excuse d'en donner une démonstration est de ne l'avoir rencontrée nulle part.

(Enrique VALDÈS.)

Autre solution : M. H. MALLARD, collège Stanislas.

Seconde solution. — Les coordonnées d'un point de l'hypocycloïde rapportée à des axes convenablement choisis sont données par

$$x = -R \sin 2\alpha \cos^2 \alpha,$$
$$y = -R \cos 2\alpha \sin^2 \alpha,$$

le coefficient angulaire de la tangente au point (x, y) étant $\operatorname{tg} \alpha$. (V. Tisserand, *Recueil d'Exercices*, p. 74.)

Cela posé, soit $\operatorname{tg} \theta$ le coefficient angulaire d'une tangente : l'équation de cette tangente est

$$(x + R \sin 2\theta \cos^2 \theta) \operatorname{tg} \theta - y + R \cos 2\theta \sin^2 \theta) = 0.$$

Les valeurs de α correspondant aux points de rencontre de cette tangente avec la courbe sont données par l'équation

$$(-\sin 2\alpha \cos^2 \alpha + \sin 2\theta \cos^2 \theta) \operatorname{tg} \theta - (-\cos 2\alpha \sin^2 \alpha + \cos 2\theta \sin^2 \theta) = 0.$$

Après avoir tout exprimé en fonction de $\operatorname{tg}\alpha$ et $\operatorname{tg}\theta$, et supprimé le facteur $1+\operatorname{tg}^2\theta$, cette équation devient

$$\operatorname{tg}^4\alpha-(3\operatorname{tg}^2\theta+1)\operatorname{tg}^2\alpha+2\operatorname{tg}\theta(1+\operatorname{tg}^2\theta)\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^2\theta=0.$$

Elle admet la racine double $\operatorname{tg}\theta$, et les deux autres racines vérifient la relation

$$\operatorname{tg}^2\theta.\operatorname{tg}\alpha'.\operatorname{tg}\alpha''=-\operatorname{tg}^2\theta;$$

d'où

$$\operatorname{tg}\alpha'.\operatorname{tg}\alpha''=-1.$$

Cette relation montre que les tangentes aux points d'intersection de la courbe avec une tangente quelconque sont rectangulaires.

Note. — On a aussi

$$2\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}\alpha'+\operatorname{tg}\alpha''=0.$$

Donc l'équation du second degré qui donne $\operatorname{tg}\alpha'$ et $\operatorname{tg}\alpha''$ est

$$\operatorname{tg}^2\alpha+2\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\alpha-1=0.$$

On en déduit

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\pm 1-\sin\theta}{\cos\theta},$$

et les valeurs de x et de y deviennent alors

$$x=\frac{R}{2}(\mp 1-\sin\theta)\cos\theta,$$

$$y=\frac{R}{2}(\mp 1+\sin\theta)\sin\theta.$$

Ces expressions peuvent encore représenter la courbe; mais alors $\operatorname{tg}\theta$ est le coefficient angulaire de la tangente menée du point (x, y).

A. GOULARD.

Solution analogue : M. Barré.

Autre solution. — L'équation tangentielle de l'hypocycloïde peut se ramener à la forme simple

$$u(u^2-3v^2)+a(u^2+v^2)=0.$$

En posant $-\frac{u}{v}=t$, on trouve

$$u=-a\frac{1+t^2}{t^2-3}\qquad\text{et}\qquad v=a\frac{1+t^2}{t(t^2-3)}.$$

Les coordonnées du point de contact sont données par les équations

$$\frac{x}{3(u^2-v^2)+2au}=\frac{y}{-6uv+2av}=\frac{1}{a(u^2+v^2)},$$

ou, en remplaçant u et v par leurs valeurs,

$$\frac{x}{t^4+6t^2-3}=\frac{y}{8t^3}=\frac{1}{a(t^2+1)^2}.$$

A chaque valeur de t correspond un point de la courbe, et le coefficient angulaire de la tangente en ce point est égal à t.

Cela posé, soit $\alpha x+\beta y+1=0$ l'équation d'une droite quelconque. Les coefficients angulaires des tangentes aux points d'intersection de cette droite avec la courbe sont donnés par l'équation du quatrième degré.

$$\alpha(t^4+6t^2-3)+8\beta t^3+a(t^2+1)^2=0.$$

Si la droite est tangente à la courbe, cette équation admet une racine double θ, et l'on a, en désignant les deux autres racines par t' et t'',

$$\theta^2t't''=\frac{a-3\alpha}{a+\alpha}.$$

Mais

$$\alpha=-a\frac{1+\theta^2}{\theta^2-3},\qquad\text{donc}\qquad\frac{a-3\alpha}{a+\alpha}=-\theta^2;$$

par suite

$$t't''=-1;$$

ceci montre que les tangentes aux points d'intersection d'une tangente avec la courbe sont rectangulaires.

(A. GOULARD, professeur au lycée de Marseille.)

Solutions analogues : MM. G. Sugot ; Auzeram (Montpellier) ; Vasnier ; J. L. (à Paris).

Remarque. — L'hypocycloïde à trois rebroussements est une courbe de troisième classe doublement tangente à la droite de l'infini aux points cycliques. Si donc on rapporte cette courbe à deux axes rectangulaires quelconques, elle aura pour équation tangentielle

$$Au^3+Bu^2v+Cuv^2+Dv^3+w(u^2+v^2)=0;$$

un simple déplacement d'origine permet de faire disparaître le terme en u^3 et le terme en v^3 et de ramener

l'équation à la forme

$$ux\,(au + bv) + v\,(u^2 + v^2) = 0\,;$$

l'axe des x et l'axe des y sont alors deux tangentes rectangulaires quelconques à l'hypocycloïde; le point de contact de Ox avec la courbe a pour coordonnées b, 0, 1; le point de contact de Oy avec la courbe a pour coordonnées 0, a, 1; par conséquent la corde des contacts a pour équation $ax + by - ab = 0$, et il est visible qu'elle satisfait à l'équation tangentielle de l'hypocycloïde.

Nous avons reçu de MM. Lhériaud (lycée de Toulouse) et Hugon (Nîmes) d'intéressantes solutions géométriques; celle de M. Lhériaud repose sur les propriétés des droites de Simson; celle de M. Hugon sur une transformation par polaires réciproques; une solution de ce genre encore, mais achevée par le calcul, nous a été envoyée par M. Blazy-Lacombe (lycée de Toulouse). Enfin, d'après M. Lhériaud, le théorème établi par M. Enrique Valdès se trouve déjà dans le *Journal de Mathématiques spéciales* de M. G. de Longchamps (année 1884).

---

479. — *Soit* O *un point pris sur l'intersection de deux plans* P *et* P'; *étudier le complexe des droites* Δ *qui percent respectivement les plans* P *et* P' *en des points* A *et* A' *tels que* $OA = OA'$.

Prenons les deux plans P et P' pour plans des xz et des yz et pour plan des xy, un plan perpendiculaire mené par le point O.

Les équations de la droite mobile sont

$$\begin{aligned} qz - ry &= p', \\ rx - pz &= q', \\ py - qx &= r', \end{aligned} \qquad \text{avec} \qquad pp' + qq' + rr' = 0.$$

Les coordonnées du point A sont $x = -\dfrac{r'}{q}$, $y = 0$, $z = \dfrac{p'}{q}$; celles du point A' sont $x = 0$, $y = \dfrac{r'}{p}$, $z = -\dfrac{q'}{p}$; et, comme dans chacun des plans xOz, yOz, les coordonnées sont rectangulaires, la relation $\overline{OA}^2 = \overline{OA'}^2$ se traduit par

$$\frac{p'^2 + r'^2}{q^2} = \frac{r'^2 + q'^2}{p^2},$$

ou

$$(p^2 - q^2)(r'^2 + p'^2) - q^2q'^2 = 0;$$

mais on a

$$p^2p'^2 - q^2q'^2 = (pp' + qq')(pp' - qq')$$

ou

$$p^2p'^2 - q^2q'^2 = -rr'(pp' - qq');$$

par conséquent la relation se décompose en

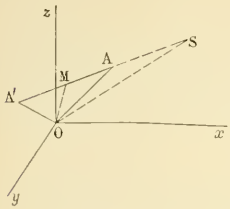
$$(1) \qquad r' = 0 \qquad \text{et} \qquad (p^2 - q^2)\,r' - r(pp' - qq') = 0.$$

La première équation $r' = 0$ exprime que la droite Δ rencontre l'axe des z; la seconde représente un complexe du troisième ordre. La première solution est évidente *a priori*, car pour toute droite rencontrant Oz, les deux points A et A' coïncident et on a $OA = OA'$; le complexe total devait donc renfermer un complexe linéaire spécial ayant pour axe Oz.

Nous aurons le cône du complexe qui reste à étudier, en exprimant que la droite Δ passe par un point fixe x_0, y_0, z_0, et en calculant les coordonnées de cette droite, p, q, r, p', q', r', en fonction des coordonnées de ce point et de celles d'un point courant de la droite; nous trouvons ainsi immédiatement que les six coordonnées de la droite sont proportionnelles aux nombres $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, $yz_0 - zy_0$, $zx_0 - xz_0$, $xy_0 - yx_0$, et nous n'avons plus qu'à porter ces expressions dans l'équation du complexe pour obtenir le cône cherché

$$(2) \qquad (xy_0 - yx_0)(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 - (z - z_0)(x - x_0)(yz_0 - zy_0 - (y - y_0)(zx_0 - xz_0)) = 0.$$

On peut voir géométriquement que le cône du complexe doit être du troisième degré. En effet,



soient S le point choisi et SAA′ une des droites du complexe passant en ce point; abaissons du point O, OM perpendiculaire sur SAA′; la droite OM tombe au milieu de AA′, et, par suite, les milieux M des droites du complexe qui passent en S sont situées sur la sphère ayant OS pour diamètre ; ils sont aussi sur le lieu des milieux des cordes issues de S et limitées aux deux plans; ce lieu est un cylindre hyperbolique ayant pour plans de directions asymptotiques les deux plans donnés, contenant l'axe des z et ayant pour axe une parallèle à Oz menée par le milieu de OS; une des génératrices de ce cylindre passe par le point S. Le lieu des milieux des droites du complexe qui passent en S est donc la quartique d'intersection de ces deux surfaces; par suite, le cône qui a pour sommet le point S est le cône qui projette cette quartique du point S; ce cône est du troisième ordre en général, puisque le point S est sur la quartique.

Pour que le cône se décompose, il faut ou bien que le cylindre hyperbolique se décompose, ou bien que le point S d'où l'on projette la quartique soit un point double de cette quartique, c'est-à-dire que la sphère et le cylindre soient tangents en S.

Le cylindre ne se décompose que quand le point S est situé dans l'un des plans P ou P′. Supposons, par exemple, le point S dans le plan xOz ou P; alors les droites du plan des xz passant en S appartiennent au complexe, puisque chacune coupe le plan P′ en un point A′ unique et le plan P en tous ses points; les autres droites du complexe qui passent en S s'obtiennent en coupant le plan P′ par une sphère de centre O et de rayon OS et en joignant le point S aux points du cercle ainsi obtenu dans le plan P′. On voit donc que dans ce cas le cône du complexe se décompose en un cône oblique à base circulaire et le plan P.

Pour que la sphère et le cylindre aient même plan tangent en S, il faut et il suffit que OS soit l'axe d'une section droite du cylindre, c'est-à-dire que OS soit dans le plan des xy et y soit une bissectrice de l'angle des axes, Ox et Oy. Pour un point quelconque des deux bissectrices de cet angle, le cylindre et la sphère sont doublement tangents en O et S, aux extrémités du diamètre OS de la sphère ; ils se coupent donc suivant deux courbes planes imaginaires passant par OS et, par suite, le cône qui projette la quartique se réduit ici à deux plans imaginaires conjugués passant par OS. L'autre partie du cône total est le plan tangent commun en S, c'est-à-dire le plan parallèle au second plan bissecteur du dièdre (P, P′) Il est d'ailleurs évident géométriquement *a priori* que ce plan doit faire partie du cône total du complexe.

On peut aisément retrouver tous ces résultats par le calcul. En effet, portons les axes parallèlement à eux-mêmes au point (x_0, y_0, z_0); nous aurons, pour équation nouvelle du cône du complexe,

$$(xy_0 - yx_0)(x^2 - y^2) - z(2xyz_0 - xzy_0 - yzx_0) = 0 ;$$

la section de ce cône par le plan $z = 1$ a pour équation

$$(xy_0 - yx_0)(x^2 - y^2) - 2xyz_0 + xy_0 + yx_0 = 0$$

et nous avons à exprimer qu'elle se décompose en une droite et une conique, c'est-à-dire que le premier membre contient en facteur le premier membre de l'équation d'une parallèle à une direction asymptotique.

Faisons d'abord le calcul pour une parallèle à une des deux bissectrices de l'angle des axes, $x - y = 0$, par exemple ; nous aurons à déterminer A, B, C et λ de façon que l'on ait identiquement

$$(x - y + \lambda)[xy_0 - yx_0](x + y) + Ax + By + C] \equiv (xy_0 - yx_0)(x^2 - y^2) - 2xyz_0 + xy_0 + yx_0 ;$$

ceci nous donne

$$(3)\quad \begin{cases} \lambda y_0 + A = 0, & \lambda x_0 + B = 0, & \lambda(y_0 - x_0) + B - A = -2z_0, \\ A\lambda + C = y_0, & B\lambda - C = x_0, & \lambda C = 0. \end{cases}$$

Supposons d'abord $C = 0$: alors $\lambda = 0$, et la quatrième et la cinquième équation nous donnent de suite $A = \frac{y_0}{\lambda}$, $B = \frac{x_0}{\lambda}$; les deux premières deviennent $y_0(\lambda^2 + 1) = 0$ et $x_0(\lambda^2 + 1) = 0$; puis, la troisième se réduit à

$$\lambda^2(y_0 - x_0) + 2\lambda z_0 + x_0 - y_0 = 0.$$

Nous voyons de suite que ces trois équations ne peuvent être compatibles que si $x_0 = y_0 = z_0 = 0$; pour l'origine en effet le cône du complexe est identiquement nul, et, par suite, improprement divisible par $x - y + \lambda$; mais c'est là une solution singulière, exceptionnelle.

Il faut donc supposer $\lambda = 0$; alors A et B sont nuls et l'on a $z_0 = 0$, puis $C = y_0 = -x_0$, c'est-à-dire $x_0 + y_0 = 0$. On trouve ici tous les points de la seconde bissectrice des axes Ox et Oy ; pour chacun d'eux le cône se compose du plan $x - y = 0$ et du couple de plans imaginaires conjugués $(x + y)^2 + z^2 = 0$. Ce sont les résultats aperçus à l'aide de considérations géométriques.

Passons maintenant à la troisième direction asymptotique $xy_0 - xy_0 = 0$.

Nous devons avoir ici l'identité

$$(xy_0 - yx_0 + \lambda)(x^2 - y^2 + Ax + By + C) = (xy_0 - yx_0)(x^2 - y^2) - 2xyz_0 + xy_0 + yx_0,$$

ce qui nous donne

$$(4)\quad \begin{cases} \lambda + Ay_0 = 0, & \lambda + Bx_0 = 0, & By_0 - Ax_0 + 2z_0 = 0, \\ A\lambda + Cy_0 = y_0, & B\lambda - Cx_0 = x_0, & C\lambda = 0. \end{cases}$$

En supposant $C = 0$, on est encore conduit à une solution particulière déjà trouvée, l'origine des coordonnées. Il faut donc prendre $\lambda = 0$; le système (4) devient alors

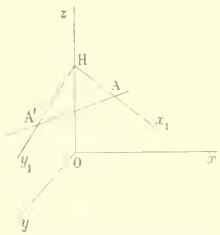
$$Ay_0 = 0, \qquad Bx_0 = 0, \qquad By_0 - Ax_0 + 2z_0 = 0,$$
$$(C - 1)y_0 = 0, \qquad (C + 1)x_0 = 0,$$

et oblige à prendre ou $x_0 = 0$ ou $y_0 = 0$, par exemple $y_0 = 0$: on a alors $B = 0$, $A = \frac{2z_0}{x_0}$, $C = -1$.

On retrouve donc ainsi les points des deux plans P et P′ et, pour chacun d'eux, la décomposition qui a été aperçue géométriquement.

Il nous reste à parler maintenant de la courbe du complexe.

Il est évident d'abord que cette courbe est de 3e classe ; car soit Hx_1y_1 un plan quelconque donné ; les droites du complexe situées dans ce plan rencontrent les deux droites du plan qui sont situées dans les plans P et P′ en des points A et A′, tels que $OA = OA'$; on voit donc que si A est donné, deux points A′ lui correspondent, les points de rencontre de Hy_1 avec un cercle de rayon $OA' = OA$; de même deux points A correspondent à un point A′ donné. La correspondance entre les séries A et A′ est donc (2, 2) ; par suite, quatre droites AA′ passent par un point quelconque du plan donné ; mais le point H sur les deux droites Hx_1 et Hy_1 se correspond évidemment à lui-même, de sorte que l'enveloppe des droites AA′, qui est de 4e classe, se compose du point H et d'une courbe de 3e classe.



Cette courbe de 3e classe est tangente aux deux droites de support Hx_1 et Hy_1 ; elle est aussi tangente deux fois à la droite de l'infini du plan Hx_1y_1, car la droite AA′ s'éloigne à l'infini dans deux directions parallèles aux bissectrices de l'angle x_1Hy_1. Cette courbe est donc une projection oblique d'hypocycloïde à trois rebroussements.

Pour que cette courbe se décompose, il faut que l'une des séries de droites AA′ passe par un point fixe du plan donné, S ; il faut donc qu'il y ait dans ce plan un point S, pour lequel le cône du com-

plexe contienne le plan lui-même. Les points de ce plan qui peuvent jouer le rôle du point S sont donc ceux de Hx_1, Hy_1 et les points de rencontre avec les deux bissectrices des axes Ox et Oy, puis aussi les points à l'infini ; il est vrai que nous n'avons pas rencontré ces points, mais notre méthode, basée sur un transport d'axes au point S, ne s'applique pas aux points à l'infini et il faut voir directement ce qu'il advient du cône du complexe pour un point du plan de l'infini ; or pour un pareil point $(x_0, y_0, z_0, 0)$, le cône du complexe se compose du plan de l'infini compté deux fois et du plan

$$(xy_0 - yx_0)(x_0^2 - y_0^2) + z_0(2zx_0y_0 - xz_0y_0 - yz_0x_0) = 0.$$

Ce plan n'est indéterminé que pour les points à l'infini sur Oz et sur les bissectrices de l'angle des axes Ox et Oy ; pour tout autre point à l'infini, il contient l'origine et la direction dans laquelle est le point à l'infini, de plus cette direction est une bissectrice de l'angle suivant lequel ce plan est coupé par les plans P et P'.

Il résulte de ce que nous venons de dire que, pour tout plan passant à l'origine, la courbe du complexe se décompose en trois points : l'origine et deux points à l'infini sur les bissectrices de l'angle des droites d'intersection avec les plans P et P' ;

Pour tout plan parallèle à Oz ou à l'une des deux bissectrices de l'angle xOy, il y a aussi décomposition. Chacune de ces décompositions donne une conique et le point à l'infini sur Oz ou sur la bissectrice considérée. Quand le plan est perpendiculaire à l'une des deux bissectrices de l'angle xOy, la conique elle-même se décompose en deux points, dont l'un à l'infini, et l'autre sur la bissectrice envisagée. Enfin quand la décomposition donne une conique, cette conique est une parabole, puisque la droite de l'infini est tangente double de la courbe totale.

Tous ces résultats se vérifient d'ailleurs par des considérations géométriques plus élémentaires que celles employées précédemment. C'est un exercice utile que nous recommandons à nos lecteurs.

On peut aussi les vérifier aisément par le calcul. Si on exprime, en effet, que la droite est dans un plan donné u_0, v_0, w_0, s_0 et dans le plan courant de l'espace u, v, w, s, on trouve que les coordonnées de la droite sont proportionnelles à (vw_0), (wu_0), (uv_0), (us_0), (vs_0), (ws_0), chacune des abréviations telles que (vw_0) représentant le déterminant correspondant $vw_0 - wv_0$; l'équation tangentielle de la courbe du complexe est donc

$$(ws_0)[(vw_0)^2 - (wu_0)^2] - (uv_0)[(vw_0)(us_0) - (wu_0)(vs_0)] = 0.$$

Si on fait dans cette équation $w = 0$, on a la projection de la courbe sur le plan de xy ; on voit de suite que s n'y entre qu'au premier degré ; la courbe est donc doublement tangente à la droite de l'infini ; celle de l'espace est donc doublement tangente au plan de l'infini (évident d'ailleurs directement pour une raison toute semblable).

Si on y fait $s_0 = 0$, on obtient d'abord $s = 0$, qui représente l'origine des coordonnées, puis une équation du second degré homogène en u, v, w, qui représente deux points à l'infini. Cette vérification s'achève aisément et celles qui restent à faire sont tout aussi simples.

B. LACOMBE (Lycée de Toulouse).

CONCOURS DE 1896 (*Suite*).

Agrégation des sciences mathématiques.

Mathématiques élémentaires.

On considère une sphère variable Σ orthogonale à une sphère fixe S et tangente à une autre sphère fixe S_1.

1° Lorsque la sphère Σ est assujettie à la condition d'avoir son centre dans un plan P, le lieu du point de contact de Σ et de S_1 est un cercle.

Démontrer que, si le plan P est tangent à la sphère S, le lieu du centre de la sphère Σ est une section conique ayant pour foyer le point de contact de S et de P.

Examiner le cas où le plan P est tangent à la sphère S en un point du cercle d'intersection de S et de S_1.

2° On peut déterminer sur la ligne des centres de S et de S_1 un point f tel que la sphère Σ_0 concentrique à Σ et passant par f reste toujours, quand Σ varie, tangente à une sphère fixe D ayant pour centre le point f_1, centre de S_1.

3° Soient m le centre de Σ_0 et m' le point de contact de Σ_0 et de D. Lorsque le point m' décrit un cercle de D, le point m reste dans un plan et décrit, dans ce plan, une ellipse, une hyperbole ou une parabole.

Discuter, en supposant que le plan du cercle considéré sur D se déplace parallèlement à lui-même.

4° Soit T le plan perpendiculaire au milieu du segment qui joint le point f à un point m' pris sur la sphère D; lorsque le plan T passe par un point fixe q, le lieu du point m' est un cercle γ_q.

Si le point q vient à se déplacer dans un plan fixe, le cercle γ_q reste orthogonal à un cercle fixe de la sphère D. Examiner le cas où le point q décrit une droite fixe.

5° Soit c le milieu de ff_1, prouver que les droites cm et fm' se coupent en un point qui demeure dans un plan fixe lorsqu'on fait varier la sphère Σ_0.

(*2 juillet, de 7 h. à 2 h.*)

Mathématiques spéciales.

547. — Étant donnés, en coordonnées rectangulaires, l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

et la sphère concentrique

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0,$$

on prend les plans polaires d'un même point M par rapport à ces deux surfaces. Ces plans se coupent suivant une droite Δ.

1° On demande quel lieu Σ engendre la droite Δ quand le point M décrit une droite quelconque D de l'espace.

2° Quel lieu doit décrire le point M pour que la droite Δ passe par un point fixe P? Quel est le degré du cône décrit par la droite Δ?

3° On demande quelle relation géométrique doit exister entre deux points M, M′ pour que les droites correspondantes Δ, Δ' se coupent.

4° Quel lieu Γ doit décrire le point M pour que la droite Δ demeure dans un plan fixe Π,

$$ux + vy + wz + p = 0.$$

Les coordonnées du point M s'expriment alors rationnellement en fonction d'un paramètre.

Trouver l'enveloppe E de la droite Δ dans le plan Π.

5° Quel est le lieu de cette enveloppe quand le plan Π se meut parallèlement à lui-même?

6° D'après la 4e partie, à tout plan Π se trouve attachée une ligne Γ, qui est le lieu des points pour lesquels la droite Δ correspondante se trouve dans le plan Π et, dans ce plan, ces droites Δ enveloppent une certaine courbe E. On suppose maintenant qu'un point M décrive le plan Π : montrer que la droite Δ correspondante s'appuie constamment en deux points sur la ligne Γ et que réciproquement, toute corde de Γ correspond à un point M du plan Π.

7° Quel lieu décrit Δ quand le point M se déplace sur une tangente de la ligne E, ou bien quand le point M se meut sur la ligne E elle-même?

(*3 juillet, de 7 h. à 2 h.*)

Composition sur l'analyse et ses applications géométriques.

On considère la courbe définie en coordonnées cartésiennes rectangulaires par l'équation

$$(x^2 + y^2)^2 - 7y^2 - ax^2 - 2x - a + 3 = 0,$$

où a désigne une constante.

I. — La constante a étant supposée quelconque :

1° Déterminer le genre de la courbe;

2° Écrire, à l'aide du théorème d'Abel, les conditions nécessaires et suffisantes pour que quatre points de la courbe soient en ligne droite;

3° Écrire, à l'aide du même théorème, la condition nécessaire et suffisante pour que quatre points de la courbe soient sur un cercle;

4° Conclure de cette dernière condition le nombre des sommets de la courbe, un sommet étant, par définition, un point où le cercle osculateur a un contact du troisième ordre avec la courbe;

5° Conclure de la même condition le nombre des systèmes de cercles bitangents à la courbe;

6° Déterminer le nombre des cercles osculateurs qu'on peut mener à la courbe par un point pris sur la courbe et étudier la disposition des points de contact de ces cercles;

7° On mène en un point M_1 le cercle osculateur à la courbe : ce cercle coupe la courbe en un point M_2; en M_2 on mène le cercle osculateur qui coupe la courbe en un point M_3, ... et ainsi de suite; en M_n on mène le cercle osculateur qui coupe la courbe en M_{n+1}; de combien de manières peut-on choisir la position du point M_1 de telle façon que M_{n+1} coïncide avec M_1; application à $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ et $n = 6$.

II. — On donne à a la valeur 1. Démontrer que le genre s'abaisse et reprendre pour ce cas les questions précédentes, en exprimant les coordonnées d'un point de la courbe en fonctions rationnelles d'un paramètre. Déterminer, dans ce cas particulier, les paramètres des points de contact des tangentes doubles.

(*4 juillet, de 7 h. à 2 h.*)

Mécanique rationnelle.

Dans un plan vertical est fixé un disque circulaire A dont la circonférence est dépolie.

I. — Un point pesant P est placé sans vitesse initiale sur la circonférence du disque A, dans le voisinage du point le plus haut du disque A.

1° On demande de déterminer l'angle minimum α que doit faire le rayon qui passe par le point P avec la verticale dirigée vers le haut pour que le point P cesse d'être en équilibre; 2° si le point P est placé sur le disque sans vitesse initiale de manière que le rayon qui passe par le point P fasse avec la verticale un angle un peu plus grand que α, le point P glisse d'abord sur le disque, puis quitte le disque. On demande de former l'équation qui donne l'angle de la verticale avec le rayon qui passe par P, lorsque ce point P se détache du disque pour tomber librement.

II. — Sur le disque circulaire A, dans le plan de ce disque, on place un deuxième disque circulaire pesant B qui est homogène et dont le rayon est égal à la moitié du rayon du disque A. La circonférence de B est dépolie, en sorte que les deux disques frottent l'un sur l'autre; on néglige la résistance au roulement.

A l'origine le disque B est sans vitesse et le rayon du disque A aboutissant au point de contact des deux disques fait avec la verticale ascendante un angle aigu β.

Entre quelles limites doit être compris β pour que le disque B roule d'abord sans glisser sur le disque A?

En admettant que le disque B commence par rouler, étudier son mouvement et former les équations qui donnent: 1° l'angle que fait avec la verticale ascendante le rayon de A qui passe par le centre de B à l'instant où cesse le roulement simple sans glissement; 2° l'angle analogue à l'instant où le disque B se détache de A.

Dans les deux questions, on désignera par f le coefficient du frottement de glissement.

(*6 juillet, de 7 h. à 2 h.*)

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Épure.

On prendra comme origine le centre de la feuille, comme axe des x ou ligne de terre le petit axe de la feuille, comme axe des y une ligne de bout, l'axe des z étant vertical. On donne :

1° Un hyperboloïde de révolution S à axe vertical o ($x = 0$, $y = 10^{cm}$) ayant pour génératrice principale la droite AA′ passant par a, a' ($x = 0$, $y = 14$, $z = 10$) et par α, α' ($x = -10$, $y = 14$, $z = 0$);

2° Un hyperboloïde S_1 ayant pour directrices : 1° AA′; 2° BB′ qui passe par o, o' ($x = 0$, $y = 10$, $z = 10$) et par β, β' ($x = 10$, $y = 10$, $z = 0$); 3° la ligne de bout CC′ ($x = -2$, $z = 6$).

Représenter la surface opaque de l'hyperboloïde de révolution S contenue dans l'hyperboloïde S_1.

On vérifiera numériquement les directions des asymptotes de l'intersection, en calculant les angles de leurs projections horizontales avec la ligne de terre.

(*23 juillet, de 7 h. à 11 h.*)

BOURSES D'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

Bourses de licence ès sciences mathématiques.

548. — On considère les deux paraboles (P), (Q) qui ont respectivement pour équations

$$y^2 - 2x = 0, \qquad x^2 - 2y + m = 0;$$

combien ont-elles de points d'intersection réels?

En un point d'intersection A, on mène la tangente à la parabole (P) ; cette tangente rencontre la parabole (Q) en un point A′ distinct du point A ; trouver le lieu du point A′ quand m varie.

Les deux paraboles (P), (Q) ont trois tangentes communes ; on formera l'équation qui a pour racines les abscisses des points de contact sur la parabole (Q) et l'on montrera comment, en supposant connues les racines de cette équation, on peut déterminer les coordonnées des points de contact des tangentes communes sur les deux paraboles, ainsi que les sommets du triangle circonscrit aux deux paraboles.

Trouver, en supposant que m varie, le lieu du point de contact avec la parabole (Q) d'une tangente commune aux deux paraboles (P), (Q) et le lieu du point d'intersection de deux tangentes communes à ces deux paraboles.

Quelle relation doit-il exister entre les abscisses de deux points de la parabole (R) dont l'équation est

$$y = 2x^2$$

pour que la droite qui joint ces deux points soit tangente à la parabole (P) ? Démontrer qu'il y a une infinité de triangles circonscrits à la parabole (P) et inscrits dans la parabole (R).

(30 juin, de 8 h. à midi.)

Bourses de licence ès sciences physiques.

Physique.

I. — Mesure de l'altitude au moyen du baromètre.

Établir la formule de Laplace et donner la valeur du coefficient numérique, en ayant soin d'indiquer les unités employées.

II. — **549**. — Un pendule est formé de deux sphères homogènes de même rayon r et de même nature, réunies par une tige rigide qui passe par leurs centres. L'axe de suspension horizontal est perpendiculaire à la tige. La masse de cette tige et celle de l'axe de suspension sont négligeables vis-à-vis des masses des sphères. Une de ces sphères a son centre à une distance invariable b de l'axe de suspension, l'autre à une distance variable x au-dessous ou au-dessus de cet axe.

Quelle doit être la valeur de x pour que les oscillations simples infiniment petites de ce pendule se fassent en un temps t ?

Faire une application numérique en prenant pour la durée d'oscillation 3 secondes, pour la distance à l'axe de suspension du centre de la sphère fixe 1 mètre et pour rayon des sphères 1 décimètre, l'intensité de la pesanteur valant 981 C.G.S.

Chimie.

I. — Azote.

II. — **550**. — Dans une dissolution de chlorure ferreux additionnée d'un excès d'acide chlorhydrique, on introduit $0^{gr},5$ d'un mélange salin que l'on sait ne renfermer que de l'azotate et du chlorure de potassium. Un gaz se dégage qui, mesuré sec et dans les conditions normales de température et de pression, occupe un volume de 100 centimètres cubes.

Calculer en centièmes la composition du mélange d'azotate et de chlorure.

Quel est le poids minimum de fer qu'il faudrait dissoudre dans un excès d'acide chlorhydrique pour réaliser la réaction ?

$$Az = 14, \qquad K = 39, \qquad Cl = 35{,}5, \qquad Fe = 56.$$

(30 juin, de 8 h. à midi.)

QUESTIONS PROPOSÉES

551. — On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy, et on considère les paraboles P tangentes en O à Ox.

1° Déterminer la relation qui doit exister entre les deux paramètres restant dans l'équation de P, de telle façon, qu'à chaque instant, les axes des paraboles P touchent leur enveloppe au foyer correspondant. Cette relation dépend d'une constante arbitraire qu'on fixera pour la suite de la question.

2° Lieu commun qui constitue le lieu des foyers et l'enveloppe des axes des paraboles P.

3° Lieu des projections de O sur les axes des paraboles P.

4° Lieu des sommets et enveloppe des tangentes aux sommets des paraboles P. Déterminer les points d'inflexion du premier de ces lieux.

5° Enveloppe des directrices des paraboles P.

G. Lapointe.

552. — On considère l'hyperbole équilatère (H) $xy - k^2 = 0$, une droite fixe (D) $x - d = 0$ et une droite mobile (D_1) $y - x + \rho = 0$.

1° Équation générale de la famille des coniques (C) qui passent par l'origine, par les points communs à (H) et à (D_1) et dont l'une des asymptotes est la droite fixe (D).

2° Déterminer les coniques singulières de la famille.

3° Déterminer et construire l'enveloppe des coniques (C). Le degré de l'enveloppe peut-il s'abaisser ?

4° Déterminer et construire l'enveloppe de la seconde asymptote (Δ).

5° Par un point M du plan passent deux coniques (C) et (C'), de centres ω et ω', auxquelles correspondent deux asymptotes (Δ) et (Δ') se coupant en en point μ. Connaissant les coordonnées de M, trouver celles de μ, et réciproquement ; définir géométriquement la correspondance entre μ et M.

6° Lieu des points μ tels que le quadrilatère $\mu\omega\omega'$ soit inscriptible dans une circonférence.

7° Dans cette hypothèse, construire le lieu du point M.

HÉNET.

553. — On considère trois points O, A, B et une droite Δ.

1° Trouver sur cette droite les deux points M et M' tels que la parabole tangente aux deux couples de droites MA, MB et M'A, M'B ait pour foyer le point O.

2° Quand on suppose fixe l'un des points M ou M' et que l'on fixe en outre l'un des points A ou B, l'autre décrit une droite ; cette droite est la polaire de l'autre point par rapport à une certaine conique (S).

3° Trouver, quand le point fixé sur la droite Δ décrit cette droite, les lieux des sommets et des foyers de la conique (S).

E. BERTHELOT.

DEUXIEME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

506. — *On donne un cercle de centre* O, *un diamètre fixe de ce cercle et un point* P *fixe sur ce diamètre ; par le point* P *on mène une sécante quelconque* PMM', *et on demande l'équation générale des hyperboles équilatères qui passent au point* P *et qui admettent pour diamètres conjugués les droites qui joignent le centre du cercle aux points de rencontre de ce cercle avec la sécante mobile ; on demande en outre le lieu des sommets et le lieu des foyers de ces hyperboles.*

Toute hyperbole équilatère qui a pour diamètres conjugués les droites OM, OM' admet pour asymptotes les bissectrices de l'angle MOM' ; quand la sécante PMM' tourne autour du point P, les directions des asymptotes varient, et l'on voit que les hyperboles considérées sont simplement assujetties à avoir leur centre au point O et à passer au point P.

En prenant le point O pour origine, OP pour axe des x, et une perpendiculaire pour axe des y, l'équation générale des hyperboles est

$$x^2 + 2\lambda xy - y^2 - a^2 = 0,$$

a étant l'abscisse du point P.

L'ensemble des axes a pour équation

$$\lambda(y^2 - x^2) + 2xy = 0 ;$$

en éliminant λ entre ces deux équations, on obtient l'équation du lieu des sommets.

Le résultat de l'élimination est

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0 ;$$

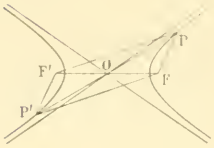
cette équation représente une lemniscate de Bernoulli

En désignant par S et F un sommet et un foyer situés d'un même côté du centre, on a $\frac{OF}{OS} = \sqrt{2}$; il en résulte que le lieu des foyers est une courbe homothétique du lieu des sommets, le rapport d'homothétie étant $\sqrt{2}$, et le centre d'homothétie étant l'origine.

Remarque. — On peut d'ailleurs obtenir ce dernier lieu par des considérations géométriques.

Soient F et F′ les foyers d'une des hyperboles, et P′ le point diamétralement opposé au point P. On a

$$(\overline{F'P} - \overline{FP})^2 = \frac{\overline{FF'}^2}{2}$$



ou, puisque $\overline{FP} = \overline{P'F}$,

$$\overline{PF}^2 + \overline{P'F}^2 - 2\overline{PF}.\overline{P'F} = 2\overline{OF}^2;$$

d'autre part, dans le triangle PFP′, on a

$$\overline{PF}^2 + \overline{P'F}^2 = 2\overline{OF}^2 + 2\overline{OP}^2.$$

On déduit immédiatement de ces deux relations

$$\overline{PF} \times \overline{P'F} = \overline{OP}^2;$$

il en résulte que le lieu du point F est la lemniscate qui a pour foyers les points P et P′.

AUZERAM.

Bonnes solutions par MM. Blazy-Lacombe, lycée de Toulouse ; J. Blandin, à Melay ; E. de Bonneville, à Saint-Etienne ; L.-J. Gorjon, Villagnier, Verchère, élèves au pensionnat de Valbenoite à St-Etienne.

---

507. — *On considère le faisceau de coniques ayant pour foyer un point donné* F *et passant par deux points donnés* A *et* B, *et on demande :*

1° *L'enveloppe des directrices qui correspondent au foyer* F ;

2° *Le lieu du centre de cette conique variable ;*

3° *Le lieu du second foyer ;*

4° *D'indiquer la construction de la conique particulière du faisceau qui a une excentricité donnée.*

Prenons pour axe des x la droite AB, et pour axe des y une perpendiculaire à AB en son milieu ; désignons par a l'abscisse du point A et par x_0, y_0 les coordonnées du point F.

Une conique de foyer F a pour équation

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \lambda(ux + vy + w)^2;$$

pour que cette conique passe par les points A et B, il faut qu'en faisant $y = 0$ dans son équation, on obtienne une équation du second degré en x qui ait pour racines $+a$ et $-a$. On a ainsi les conditions

$$x_0 + \lambda uw = 0,$$

$$a^2 + x_0^2 + y_0^2 - \lambda(u^2a^2 + w^2) = 0.$$

1° Eliminons λ entre ces deux équations, nous avons

$$x_0(u^2a^2 + w^2) + uw(a^2 + x_0^2 + y_0^2) = 0.$$

Posons $-\frac{w}{u} = p$; cette équation devient

$$p^2x_0 - p(a^2 + x_0^2 + y_0^2) + a^2x_0 = 0 \quad (1)$$

or p est l'abscisse du point de rencontre de la directrice $ux + vy + w = 0$ et de l'axe des x. Il en résulte que la directrice d'une conique quelconque du faisceau passe par l'un ou l'autre des points fixes de Ox dont les abscisses sont racines de l'équation (1). Ces racines sont réelles et séparées par x_0 ; leur produit est égal à a^2, par conséquent les points correspondants divisent harmoniquement le segment AB.

L'enveloppe des directrices se compose donc de deux points.

2° En faisant $w = -up$ dans la relation $x_0 + \lambda uw = 0$, on a $\lambda = \frac{x_0}{u^2p}$, et l'équation générale des coniques devient

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{x_0}{u^2p}(ux + vy - up)^2,$$

ou

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{x}{p}(x + \mu y - p)^2,$$

μ désignant un paramètre variable, et p étant racine de l'équation (1).

Le centre est déterminé par les équations

$$x - x_0 = \frac{x_0}{p}(x + \mu y - p),$$

$$y - y_0 = \frac{x_0}{p}\mu(x + \mu y - p);$$

en éliminant μ entre ces deux équations, nous aurons l'équation du lieu.

On a immédiatement $\mu = \frac{y - y_0}{x - x_0}$, et en remplaçant μ par cette valeur dans la première des équations du centre, on a

$$x - x_0 = \frac{x_0}{p}\left[x + \frac{y(y - y_0)}{x - x_0} - p\right],$$

ou

$$(2) \qquad (x_0 - p)x(x - x_0) + x_0 y(y - y_0) = 0.$$

Cette équation représente une conique circonscrite au rectangle formé par les axes de coordonnées et par les parallèles à ces axes menées par le point F. Le centre de cette conique est alors le point C, milieu de OF, et en transportant l'origine en ce point, l'équation de la courbe devient

$$(x_0 - p)x'^2 + x_0 y'^2 - \frac{x_0^2(x_0 - p) + x_0 y_0^2}{4} = 0.$$

Par rapport à ce nouveau système d'axes, les coordonnées des foyers de cette conique sont

$$y' = 0,$$

$$x'^2 = \frac{x(x_0^2 + y_0^2 - px_0)}{4}\left[\frac{1}{x_0 - p} - \frac{1}{x_0}\right] = \frac{p(x_0^2 + y_0^2 - px_0)}{4(x_0 - p)};$$

comme p est racine de l'équation (1), on a

$$\frac{-p^2 x_0 + p(x_0^2 + y_0^2)}{x_0 - p} = a^2,$$

et par suite les coordonnées des foyers sont

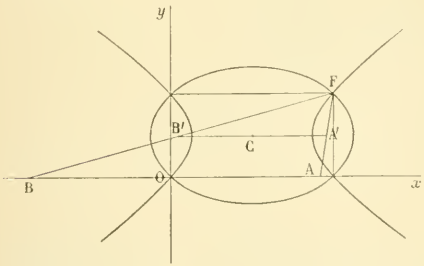
$$x' = \pm\frac{a}{2}, \qquad y' = 0,$$

et par rapport au premier système d'axes

$$x = \frac{x_0 \pm a}{2}, \qquad y = \frac{y_0}{2}.$$

On en conclut que les foyers de cette conique sont les points A' et B' milieux de FA et FB.

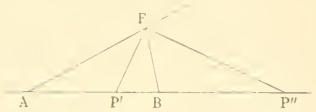
Comme p a deux valeurs, racines de l'équation (1), on voit que le lieu se compose de deux coniques homofocales qui passent au point F et ont pour foyers les points A' et B'; l'une de ces coniques est une ellipse, l'autre une hyperbole, comme le montre d'ailleurs l'équation (2), puisque x_0 est compris entre les racines de l'équation (1).



3° Le lieu du second foyer est homothétique du lieu des centres, le centre d'homothétie étant le point F et le rapport d'homothétie étant égal à 2; par conséquent le lieu du deuxième foyer se compose d'une ellipse et d'une hyperbole homofocales passant au point F et ayant pour foyers les points A et B.

Nous traiterons la quatrième partie à la suite de la solution géométrique.

Solution géométrique. — 1° Soient P′ et P″ les points de rencontre de la droite AB avec les bissectrices de l'angle AFB. On sait que la directrice d'une conique passant aux points A et B et ayant pour foyer le point F passe par l'un des points P′ ou P″ ; l'ensemble de ces deux points constitue l'enveloppe demandée.



2° et 3° Nous allons déterminer d'abord le lieu du deuxième foyer F′.

I. Supposons que la conique variable soit une ellipse ; on a

$$AF + AF' = BF + BF',$$

ou

$$AF' - BF' = BF - AF = \text{constante}.$$

Cette égalité montre que le point F′ appartient à l'hyperbole H qui admet pour foyers les points A et B et qui passe par le point F. De plus le point F′ est situé sur la branche de cette hyperbole qui ne contient pas le point F.

II. Supposons maintenant que la conique variable soit une hyperbole ; on a, soit

$$AF - AF' = BF - BF', \qquad (\alpha)$$

soit

$$AF - AF' = BF' - BF, \qquad (\beta)$$

selon que les points A et B sont sur la même branche ou sur des branches différentes.

La première égalité (α) peut s'écrire :

$$AF' - BF' = AF - BF ;$$

elle montre que le point F′ est situé sur la branche de l'hyperbole H qui contient le point F.

L'égalité (β) donne d'autre part

$$AF' + BF' = AF + BF ;$$

le lieu du point F′ est dans ce cas l'ellipse E, qui a pour foyers les points A et B et qui passe par le point F.

En résumé, le lieu du deuxième foyer des coniques ayant pour foyer le point F et passant par les points A et B se compose des coniques H et E.

Les points de l'ellipse E sont foyers des hyperboles pour lesquelles les points A et B appartiennent à des branches différentes. La branche de H qui passe au point F contient les foyers des hyperboles pour lesquelles les points A et B appartiennent à la même branche. Enfin la branche de H qui ne passe pas au point F est le lieu des foyers des ellipses du faisceau.

Le lieu des centres des coniques du faisceau est homothétique du lieu des deuxièmes foyers F′, le centre d'homothétie étant le point F et le rapport d'homothétie étant égal à $\frac{1}{2}$.

4° Soit e l'excentricité donnée ; la directrice relative au foyer F de la conique cherchée doit passer par l'un des points P′ ou P″ et être tangente à un cercle de centre A et de rayon $\frac{AF}{e}$.

On a aussi quatre solutions obtenues en menant à ce cercle les tangentes des points P′ et P″.

En supposant $AF > BF$, on a

$$AP' = \frac{AF.AB}{AF + BF}, \qquad AP'' = \frac{AF.AB}{AF - BF}.$$

Pour que les tangentes issues du point P′ soient réelles, il faut qu'on ait

$$\frac{AF}{e} < \frac{AF.AB}{AF + BF}, \qquad \text{ou} \qquad e > \frac{AF + BF}{AB}.$$

Pour que les tangentes issues du point P″ soient réelles, il faut qu'on ait

$$\frac{AF}{e} < \frac{AF \times AB}{AF - BF}, \qquad \text{ou} \qquad e > \frac{AF - BF}{AB}.$$

En conséquence,

si l'on a	le problème admet
$e < \frac{AF - BF}{AB}$,	0 solution ;
$\frac{AF - BF}{AB} < e < \frac{AF + BF}{AB}$,	2 solutions ;
$e > \frac{AF + BF}{AB}$,	4 solutions.

Edmond LACOMBE, lycée Louis-le-Grand.

Bonnes solutions analytiques et géométriques : MM. Auzeram ; E. Barré, à Valenciennes ; A. Corriol, pensionnat Saint-Louis, à Saint-Etienne ; M. Malplat, pensionnat de Valbenoite à Saint-Etienne ; Verchère, à Saint-Etienne.

508. — *On donne un cercle* (C) *et une droite* (D), *et l'on considère un cercle variable* (Γ) *orthogonal au cercle* (C) *et tangent à la droite* (D).

1° *Trouver le lieu du centre du cercle* (Γ).

2° *Trouver l'enveloppe du cercle* (Γ) *et montrer qu'elle se décompose en deux parties que chaque cercle touche simultanément; indiquer, en outre, la correspondance qui existe entre les deux points de contact du cercle* (Γ) *avec son enveloppe.*

3° *Trouver le lieu du point de rencontre de la normale à l'une des parties de l'enveloppe en l'un des points de contact, avec la tangente à l'autre partie en l'autre point de contact. Construire ce lieu.*

Prenons pour axes de coordonnées deux diamètres rectangulaires du cercle (C), l'un d'eux, Oy, étant parallèle à la droite (D); l'équation du cercle (C) est $x^2+y^2-R^2=0$, celle de la droite (D), $x-a=0$.

Soit alors $x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\gamma=0$ l'équation du cercle variable (Γ); en exprimant que ce cercle est orthogonal au cercle (C) on obtient de suite $\gamma=R^2$. Coupons alors ce cercle par la droite $x=a$ et exprimons que l'équation aux ordonnées a une racine double ; nous obtenons une nouvelle condition $\alpha=\dfrac{a^2+R^2-\beta^2}{2a}$, et l'équation du cercle (Γ) est définitivement

$$x^2+y^2-\frac{a^2+R^2-\beta^2}{a}x-2\beta y+R^2=0.$$

1° Le lieu du centre du cercle (Γ) est fourni par la condition précédente; son équation s'obtient en y remplaçant α par x et β par y; on a ainsi

$$y^2+2ax-a^2-R^2=0. \tag{1}$$

Cette équation représente une parabole ayant Ox pour axe, dont le paramètre est $-a$, doublement tangente au cercle (C) aux deux points où la droite (D) le rencontre et dont le foyer est le point de Ox d'abscisse égale à $\dfrac{R^2}{2a}$.

2° L'enveloppe du cercle (Γ) s'obtient en cherchant le lieu des points du plan par où il passe deux cercles du système confondus, c'est-à-dire en exprimant que l'équation du second degré en β a une racine double. On trouve ainsi

$$\frac{x}{a}\left(x^2+y^2-\frac{a^2+R^2}{a}x+R^2\right)-y^2=0,$$

équation qui se décompose en deux,

$$\left\{\begin{aligned} &x-a=0,\\ &x^2+y^2-\frac{R^2}{a}x=0.\end{aligned}\right. \tag{2}$$

La première représente la droite (D), solution évidente *a priori*; la seconde représente un cercle qui a son centre au foyer de la parabole précédente et qui passe à l'origine des coordonnées.

Appelons M le point de contact du cercle mobile avec la droite (D) et M′ son point de contact avec le cercle (2); la droite qui joint ces points s'obtient immédiatement en prenant la dérivée du premier membre du cercle (Γ) par rapport à β; on trouve ainsi $\dfrac{\beta x}{a}-y=0$; les deux points de contact sont donc déjà en ligne droite avec le point O. D'autre part, les coordonnées du point M sont $x=a$, $y=\beta$; celles du point M′ se déduisent immédiatement de l'équation du cercle (2) et de celle de la droite des contacts et ont pour expressions $x=\dfrac{aR^2}{a^2+\beta^2}$, $y=\dfrac{\beta R^2}{a^2+\beta^2}$. On voit de suite que $\overline{OM}^2\,.\,\overline{OM'}^2=R^4$, et, comme les abscisses des points M et M′ ont le même signe, $OM.OM'=R^2$. Le lieu de M′ est donc la figure inverse du lieu de M par rapport au point O, R^2 étant la puissance d'inversion.

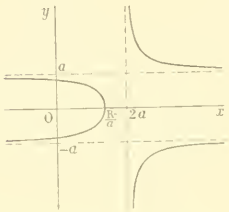
3° Si l'on prend la tangente à la première partie de l'enveloppe, c'est la droite (D) elle-même et, par suite, le lieu demandé est cette droite. Prenons la tangente à la seconde partie; c'est évidemment l'axe radical des cercles (2) et (Γ); cette droite a donc pour équation

$$\frac{a^2-\beta^2}{a}x+2\beta y-R^2=0;$$

d'ailleurs la normale à la droite (D) au point M est $y=\beta$. Le lieu s'obtient donc de suite en remplaçant β par y dans l'équation précédente. On trouve ainsi

$$(3)\qquad a^2-y^2)x+2ay^2-aR^2=0.$$

Cette équation représente une courbe du troisième degré symétrique par rapport à Ox, et dont les asymptotes sont parallèles aux axes. Pour construire cette courbe, il suffit d'étudier la fonction x de y lorsque y varie de 0 à $+\infty$.



$$x=a\frac{R^2-2y^2}{a^2-y^2}$$

En nous plaçant dans le cas où $R^2<2a^2$, nous voyons de suite que cette fonction est continuellement décroissante, qu'elle décroît de $\frac{R^2}{a}$ à $-\infty$, quand y croît de 0 à a, et de $+\infty$ à $2a$, quand y croît de a à $+\infty$. La forme de la courbe résulte immédiatement de ce que nous venons de dire.

G. Laederich.

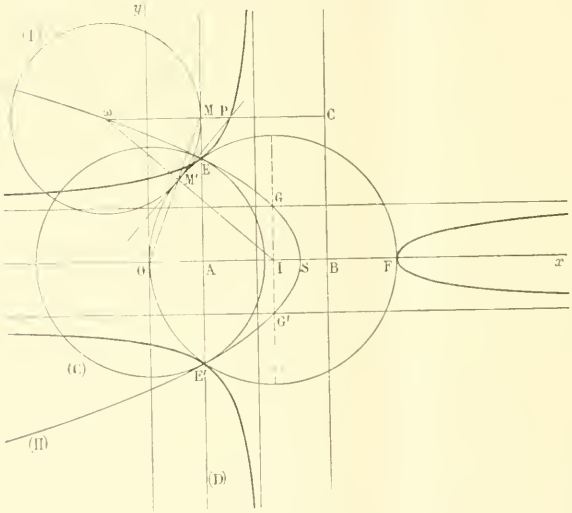
Bonnes solutions : MM. P. Ollaguier (pensionnat de Valbenoite, à Saint-Etienne); J. Blandin (à Melay); E. Lacombe (Louis-le-Grand).

Ont résolu la question : MM. Malplat (pensionnat de Valbenoite, à Saint-Etienne ; Verchère (à Saint-Etienne) ;

Solutions imparfaites : MM. E. Auzeram (Montpellier) ; G.-A. Pouilliart (Auxerre).

Solution géométrique. — Tous les cercles (Γ) étant orthogonaux au cercle (C) ont même puissance par rapport au point O, le nombre R^2. L'axe radical de deux d'entre eux passe donc en ce point; il en est ainsi en particulier de l'axe radical de deux cercles infiniment voisins, et, par suite, la droite qui porte les deux points de contact de l'un des cercles (Γ) avec son enveloppe passe au point O; d'ailleurs on a

$$OM.OM'=R^2.$$



La première partie de l'enveloppe étant donc sûrement la droite (D), la seconde est la figure inverse de cette droite par rapport au point O, en prenant R^2 pour puissance d'inversion. On obtient ainsi un cercle ayant son centre sur la perpendiculaire Ox abaissée de O sur la droite (D) et passant au point O.

Soit I le centre de ce cercle; si l'on porte à partir du point M, $MC=MI$, le lieu du point C est une droite BC parallèle à la droite (D); par suite le lieu du point ω est le lieu des points équidistants du point I et de la droite BC; c'est donc une parabole ayant pour foyer le point I et pour directrice la droite BC.

Le dernier lieu est le lieu du point de rencontre de la normale en M à la droite (D) avec la tangente au cercle (I) en M'. Sur chaque parallèle à Ox il n'y a évidemment qu'un point de ce lieu, P, à distance finie. Mais quand le point ω vient en l'un des deux points G ou G' où la perpendiculaire à Ox en I rencontre la parabole, la tangente au cercle (I) est perpendiculaire à la droite D et le point P est à l'infini sur Ox; l'asymptote correspondante est la parallèle à Ox menée par le point G ou G', et le point à l'infini sur Ox est un point double. Le lieu du point P est donc une cubique ayant deux asymptotes parallèles à Ox. D'autre part, quand le point ω s'éloigne à l'infini sur la parabole, le cercle (I) tend vers Oy, le point M s'éloigne à l'infini sur la droite (D) et le point P est rejeté à l'infini sur Oy; il y a donc une nouvelle asymptote parallèle à Oy. Enfin quand le point ω vient en E ou E', le cercle (I) devient nul et le point P coïncide avec le point E ou E'; quand le point ω vient en S, le point P vient en F. Cette courbe est à présent suffisamment connue.

Remarquons encore, pour terminer, qu'il est facile de démontrer que cette courbe est du 3e ordre, en s'appuyant sur le principe de correspondance de Chasles. E. AUZERAM.

TRIGONOMÉTRIE

468. — *Résoudre le triangle* ABC *dans lequel on donne les côtés* b, c *ainsi que l'aire* S' *du triangle qui a pour côtés les longueurs des médianes du triangle* ABC.

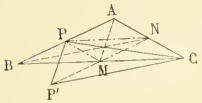
On choisira, parmi les solutions qui répondent aux données numériques, celle pour laquelle la hauteur issue du sommet A *a la moindre valeur.*

$$S' = 9431760^{\text{ares}}, \qquad b = 49728^{\text{m}},7, \qquad c = 67917^{\text{m}},8.$$

On prouvera que S' *est égal aux* $\frac{3}{4}$ *de la surface* S *du triangle* ABC.

(*Ecole Centrale, 1895, 2e session.*)

1° Le triangle PNM ayant pour sommets les pieds des médianes du triangle ABC, a une surface égale à $\frac{S}{4}$, car elle est la moitié de celle de chacun des parallélogrammes équivalents ANMP, PNCM et MNPB. Si l'on construit, en PCP', le triangle ayant pour côtés les médianes de ABC, on voit aisément que PCP' est formé de trois triangles : PMC, CMP' et P'MP qui ont même surface que PNM. On en déduit $S' = \frac{3S}{4}$.



2° *Calcul de* A. — Des formules $S = \frac{bc \sin A}{2} = \frac{4S'}{3}$, on tire $\sin A = \frac{8S'}{3bc}$.

Si l'on a $8S' \leqslant 3bc$, on trouvera pour $\sin A$ une valeur positive, et pour A deux valeurs, A_1 et A_2 telles que $A_1 \geqslant 90^0$, $A_2 \leqslant 90^0$.

Il faut choisir entre ces deux valeurs celle qui correspond à la plus petite hauteur issue du sommet A, c'est-à-dire à la plus grande valeur du côté a ou encore de l'angle opposé A. On prendra donc l'angle obtus A_1.

On est ramené à résoudre un triangle connaissant A, b et c.

Calcul numérique.

Données.
$$\begin{cases} S' = 9431760^{\text{ares}} \\ b = 49728^{\text{m}},7 \\ c = 67917^{\text{m}},8 \end{cases}$$

Résultats.
$$\begin{cases} S = 12575680^{\text{ares}} \\ A = 131^0 52' 05'',64 \\ B = 20^0 06' 57'',36 \\ C = 28^0\ 0' 57'',00 \\ a = 107676^{\text{m}},1. \end{cases}$$

Formules à employer.

$$S = \frac{4S'}{3}, \qquad \sin A = \frac{8S'}{3bc}, \qquad \frac{C+B}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}, \qquad \operatorname{tg}\frac{C-B}{2} = \frac{c-b}{c+b}\operatorname{cotg}\frac{A}{2}, \qquad a = \frac{c \sin A}{\sin C},$$

Calculs auxiliaires.

$$c + b = 117646{,}5$$
$$c - b = 18189{,}1$$

Calcul de log S'.

94317	9745900
6	27,6

$\log S' = 8{,}9745927$

Calcul de log b.

49728	6966010
7	60,9

$\log b = 4{,}6966071$

Calcul de log c.

67917	8319785
8	51,2

$\log c = 4{,}8319836$

Calcul de $\log (c + b)$.

11764	0705550
6	221,4
5	18,45

$\log (c+b) = 5{,}0705790$

Calcul de $\log (c - b)$.

18189	2598088
1	23,9

$\log (c - b) = 4{,}2598112$

Calcul de $\log \operatorname{cotg} \frac{A}{2}$.

65°56′10″	1,6498851
— 7″	396,2
— 0″,1	5,66
— 0″,08	4,528

$\log \operatorname{cotg} \frac{A}{2} = 1{,}6499257$

Calcul de log sin C.

28°00′50″	1,6718072
7″	277,2

$\log \sin C = 1{,}6718349$

Calculs définitifs.

$$4S' = 37727040^{\text{ares}}$$
$$S = \frac{4S'}{3} = 12575680^{\text{ares}}$$

Calcul de A.

$$\log S = 0{,}9030900$$
$$\log S' = 8{,}9745927$$
$$\operatorname{colog} 3 = 1{,}5228787$$
$$\operatorname{colog} b = 5{,}3033929$$
$$\operatorname{colog} c = 5{,}1680164$$
$$\log \sin A = 1{,}8719707$$

48°07′50″	625
	82
4″	75,2
	6,8
0″,3	5,64
0″,06	1,16

$A_2 = 48^\circ 07' 54'',36$
$A_1 = 131^\circ 52' 05'',64$

Calcul de B et C.

$$\log (c - b) = 4{,}2598112$$
$$\log \operatorname{cotg} \frac{A}{2} = \bar{1}{,}6499257$$
$$\operatorname{colog} (c+b) = \bar{6}{,}9294210$$
$$\log \operatorname{tg} \frac{C-B}{2} = \bar{2}{,}8391579$$

3°56′50″	88568
	3011

$$\frac{30110}{3065} = 9{,}82$$
$$\frac{C-B}{2} = 3^\circ 56' 59'',82$$
$$\frac{C+B}{2} = 24^\circ 03' 57'',18$$
$$C = 28^\circ 00' 57'',00$$
$$B = 20^\circ 06' 57'',36$$

Calcul de a.

$$\log c = 4{,}8319836$$
$$\log \sin A = 1{,}8719707$$
$$\operatorname{colog} \sin C = 0{,}3281651$$
$$\log a = 5{,}0321194$$

10767	0947
	247

$$\frac{247}{403} = 0{,}61$$
$$a = 107676^{\text{m}},1$$

CONCOURS DE 1896 (*Suite*).

ÉCOLE CENTRALE

Première session.

Géométrie analytique.

554. — Soient S l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, rapportée à ses axes, et S′ le cercle de centre I (α, β) et de rayon R :

1° Trouver le nombre des points M réels ayant même polaire par rapport aux coniques S et S′.

2° Construire le lieu géométrique V des points M quand R varie, le point I restant fixe. Reconnaître, et démontrer *a priori*, une propriété remarquable des points communs aux lignes S et V.

3° Trouver le lieu géométrique U des centres I des cercles S′ de rayon R donné, quand la droite qui joint deux des quatre points communs à S et à S′ est perpendiculaire sur la droite qui joint les deux autres. Discuter suivant les valeurs de R.

4° Deux cordes (d'un même couple) communes aux coniques S et S′ étant rectangulaires et le rayon R étant variable, on assujettit le centre I à parcourir S ; construire le lieu W de l'intersection P de ces deux cordes ; indiquer la correspondance graphique des points I et P.

5° Suivant les positions occupées sur S par le centre I de S′, discuter le nombre des points réels communs à S et à S′ lorsque deux cordes d'un même couple sont rectangulaires.

(*1er juillet, de 7 h. à 11 h.*)

Physique et Chimie.

I. — **555.** — Chercher la température x à laquelle il faut porter de l'air sec à la pression H pour qu'il prenne la densité de l'air humide sous la même pression à température t et à l'état hygrométrique e.

$$H = 75^{cm},2 \qquad e = \frac{2}{3}, \qquad t = 19^{\circ},4.$$

Tension maxima F_t de la vapeur d'eau, $1^{cm},68$.

Coefficient de dilatation des gaz, $\alpha = 0,00367$.

Densité de la vapeur d'eau, $\frac{5}{8}$.

II. — **556.** — Quelle position et quelle hauteur minimum doit avoir un miroir plan vertical pour qu'une personne placée debout à distance d puisse s'y voir de la tête aux pieds ?

III. — Acide borique.

IV. — **557.** — Dans un ballon, on chauffe 1284^{gr} d'iodate de potassium. On recueille le gaz qui se dégage, et on arrête l'expérience quand le volume mesuré est $167^{lit},25$ dans les conditions normales. Après refroidissement du ballon, on dissout dans l'eau le résidu qu'il contient, et on ajoute un excès d'acide sulfurique étendu. Il se forme un précipité.

On demande :

1° Le poids et la nature du gaz recueilli dans la première phase de l'expérience ;

2° Le poids et la nature du précipité obtenu dans la seconde. On le supposera d'ailleurs complètement insoluble dans la liqueur où se fait la réaction.

$$\delta = 0,0695 ; \qquad H = 1, \qquad O = 16, \qquad K = 39, \qquad I = 127.$$

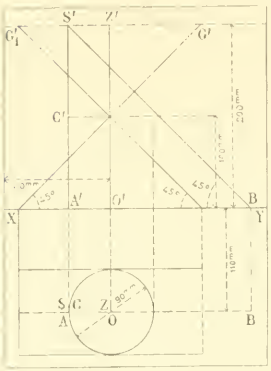
(*1er juillet, de 2 h. à 5 h.*)

Épure.

INTERSECTION D'UN HYPERBOLOÏDE DE RÉVOLUTION ET D'UN CÔNE.

558. — On considère : 1° Un hyperboloïde de révolution à axe vertical (oz, o′z′) dont le cercle de gorge situé dans le plan horizontal de cote 100^{mm} a 90^{mm} de diamètre. Les génératrices de cet hyperboloïde font avec le plan horizontal un angle de 45°. L'axe de la surface est à 110^{mm} en avant du plan vertical.

2° Un cône à base horizontale circulaire défini de la manière suivante : Le sommet ss′ du cône est situé dans le plan de front de l'axe oz, o′z′ de l'hyperboloïde. La cote de ce point est fixée à 200mm. L'une des génératrices de front du cône est la verticale (SA, S′A′) qui passe par l'extrémité de gauche du rayon du cercle de gorge, l'autre génératrice de front est la droite (SB, S′B′) inclinée à 45° sur le plan horizontal.



Cela posé, on demande :

1° De tracer les projections de l'intersection du cône et de l'hyperboloïde, en ayant soin de déterminer les points et tangentes remarquables des courbes ainsi obtenues ;

2° De définir la direction des plans donnant des sections anti-parallèles à la base du cône ;

3° De représenter complètement le solide formé par le cône et l'hyperboloïde, les deux surfaces étant limitées de la manière suivante :

(*a*) au plan horizontal de projection ;

(*b*) au plan horizontal passant par le sommet du cône ;

(*c*) au plan tangent au cône suivant la génératrice (SB, S′B′) ;

(*d*) au plan de section anti-parallèle à la base, passant par le point (A, A′) trace horizontale de la génératrice verticale du cône.

Titre extérieur : GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Titre intérieur : HYPERBOLOÏDE ET CÔNE.

Cadre de 0,27 sur 0,45. Ligne de terre parallèle au petit côté du cadre et au milieu de la feuille.
La droite o′z′ est à 110mm du côté de gauche du cadre.

(*2 juillet, de 7 h. à 11 h.*)

Calcul trigonométrique.

559. — Résoudre un triangle connaissant un angle A, le périmètre $2p$ et la somme s des sinus des angles. On donnera les conditions de possibilité de ce triangle.

$$A = 62^\circ 11' 17'', \qquad 2p = 793^{\text{m}},075, \qquad s = 2,422.$$

(*2 juillet, de 2 h. 1/2 à 4 h. 1/2.*)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

ÉCOLE CENTRALE (1895) *Suite*

276. — Dérivées des fonctions suivantes :

$$y = \sqrt[3]{3x^2+1}, \qquad y = \text{arc sin } 2x\sqrt{1-x^2}, \qquad y = \text{L arc tg } \frac{1}{x}, \qquad y = \sin^3(x+1),$$

$$y = \cos^3(x^2+3), \qquad y = 5\cos^3(2y^2+1), \qquad y = \sqrt{\text{tg}(x^2-1)}, \qquad y = (x^2-2)^{x^2+1},$$

$$y = (3x^2+1)^{x^3+1}, \qquad y = (5x^2-3x+1)^{x^3+2}, \qquad y = (\sin x)^{\cos x}, \qquad y = (\sin 3x)^{\cos 3x},$$

$$y = (\sin x)^{\text{tg}\,x}, \qquad y = (\text{tg}\,x)^{\cot x}, \qquad y = (\cos x)^{\text{tg}^2 x}, \qquad y = [\text{L}(x+2)]^{x+1},$$

$$y = (\text{arc tg}\,x)^{\text{L}\frac{1}{x}}.$$

277. — Dérivée n^e de la fonction $y = \sin x$.

278. — Dérivée par rapport à x de la fonction y définie par l'équation $x^y = y^x$.

279. — Maximum du produit $(x-2)(x+3)(5-2x)$.

280. — Maximum du produit $x^m y^n z^p$ sachant que $x+y+z=a$.

281. — Variations de la fonction $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$. Calcul du maximum et du minimum. Conditions pour que cette fonction soit indépendante de x.

282. — Étudier les variations des fonctions suivantes :

$$y = \frac{x}{x^2-3}, \qquad y = \frac{x^2-3}{(x-1)(x+4)},$$

$$y = \frac{x^2-4}{(x-1)(x-3)}, \qquad y = \frac{x^2-9}{(x-2)(x-5)},$$

$$y = \frac{(x-2)(x+3)}{(x-1)(x+2)}, \qquad y = \frac{(x-1)(x+5)}{(x-2)(x+6)},$$
$$y = \frac{x^2+5x-3}{x^2-2x-1}, \qquad y = \frac{x^2-x-1}{x^2+x+1}.$$

283. — Démontrer que $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

284. — Trouver les fonctions primitives des fonctions suivantes :

$$y' = \frac{3}{(x-1)^5}, \qquad y' = \frac{x^3}{x^4+1}, \qquad y' = \frac{1}{x^2+3x+5}, \qquad y' = \frac{x-1}{x^2+x+2}.$$

285. — Calculer les intégrales

$$\int \sin x \cos x\, dx, \qquad \int \sin^3 x \cos x\, dx, \qquad \int \sin 2x \cos 2x\, dx$$
$$\int \operatorname{tg} x\, dx, \qquad \int \frac{dx}{\sin x}, \qquad \int x^5 \mathrm{L}x\, dx.$$

286. — Trouver le quotient de $5x^4 - 3x^2 + 1$ par $x+2$ sans effectuer la division.

287. — Diviser le polynome $x^3 - 3abx + a^3 + b^3$ par $x + (a+b)$. En déduire les racines de l'équation $x^3 - 3abx + a^3 + b^3 = 0$.

288. — Condition pour que l'équation $x^3 + px^2 + q = 0$ ait une racine double.

289. — Sachant que l'équation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ admet une racine triple, trouver cette racine.

290. — Résoudre l'équation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ connaissant : 1° la somme ; 2° le produit de deux racines.

291. — Trouver la relation qui doit exister entre les coefficients de l'équation $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ pour que le produit de deux racines soit égal à un nombre donné k.

292. — Résoudre l'équation $x^3 + px + q = 0$ en faisant disparaître le terme du premier degré au moyen d'une transformation homographique.

293. — Abaissement des équations réciproques. Appliquer à l'équation $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$.

294. — Discuter les racines de l'équation $mx^4 - (2m+1)x^2 + m - 1 = 0$.

295. — Même question pour l'équation $x^4 + (m-3)x^2 + m - 3 = 0$. Calculer la somme des puissances cinquièmes des racines de cette équation.

296. — Somme des puissances quatrièmes des racines de l'équation $3x^3 + 9x - 7 = 0$.

297. — Somme des puissances cinquièmes des racines de l'équation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$.

298. — Somme des puissances $p^{\text{ièmes}}$ des racines de l'équation $x^m - 1 = 0$. Montrer que $S_p = 0$, si p n'est pas un multiple de m.

299. — Etant donnée l'équation $x^4 + px^3 + q = 0$, calculer la fonction symétrique des racines $\Sigma a^2 b$.

300. — Appliquer le théorème de Descartes aux équations $4x^4 - 2x + 1 = 0$, $x^5 - 2x^4 + x^2 - 1 = 0$.

301. — Condition de réalité des racines de l'équation $x^3 + px^2 + q = 0$. Vérifier le résultat au moyen de l'équation aux inverses.

302. — Trouver le nombre des racines réelles des équations

$$x^3 + x^2 - 1 = 0, \qquad 5x^4 - 4x^3 + 1 = 0, \qquad 5x^4 - 3x^2 - 1 = 0,$$
$$5x^4 - 2x + 1 = 0, \qquad 5x^5 - 4x^4 + 1 = 0, \qquad x^5 - x^3 - 1 = 0,$$
$$x^5 - x^4 + 1 = 0, \qquad x^6 - x^3 + 1 = 0, \qquad x^7 - 2x^4 + x - 1 = 0.$$

303. — Trouver le nombre des racines réelles de l'équation $x^4 + 3x^3 + 5x^2 + x - 2 = 0$. Déterminer les racines commensurables.

304. — Calculer, par approximation, la racine positive de l'équation $x^3 - 2x - 1 = 0$. Même question pour l'équation $3x^3 - 5x - 1 = 0$.

305. — Formule de Moivre. Application à la résolution des équations binomes $x^6 - 1 = 0$, $x^7 - 1 = 0$.

306. — Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)}, \qquad \frac{2x-3}{(x-2)(x-4)}, \qquad \frac{1}{x^2+8x}, \qquad \frac{1}{x^2+4x}, \qquad \frac{1}{x^2+4x-3},$$
$$\frac{1}{x(x-2)(x-3)}, \qquad \frac{2x^2-1}{x(x-1)(x-3)}, \qquad \frac{x^2+1}{(x^2+3x-1)(x+1)}, \qquad \frac{1}{x^2(x-3)}, \qquad \frac{x-1}{x^2(x-2)},$$
$$\frac{x-2}{x(x-1)^2}, \qquad \frac{1}{x^3(x+1)}, \qquad \frac{x-1}{x^3(x-2)}, \qquad \frac{1}{x^3(x-1)^2}, \qquad \frac{1}{(x-2)(x^2+x+1)},$$
$$\frac{1}{x^2(x^2+x+1)}, \qquad \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}.$$

En déduire les fonctions primitives.

Trigonométrie (M. Gouilly).

307. — Résoudre les équations

$$\operatorname{tg}(a+bx)\,.\,\operatorname{cotg}(c+dx)=1,\qquad \operatorname{tg}(a+bx)\,.\,\operatorname{tg}(c+dx)=1,\qquad \operatorname{tg}^2 x+\sec^2 x=1,$$
$$a\operatorname{tg}^2 x+b\sec^2 x=c,\qquad \operatorname{tg}(a+bx)-\operatorname{tg}(c+dx)=1.$$

308. — Démontrer que l'on a $\sin a\,.\,\sin(b-c)+\sin b\sin(c-a)+\sin c\sin(a-b)=0$.

309. — Trouver la relation qui existe entre a, b, c sachant que l'on a

$$\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b+\operatorname{tg} c=\operatorname{tg} a\operatorname{tg} b\operatorname{tg} c,$$
$$\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c\pm 2\cos a\cos b\cos c=1,$$
$$\sin^2 a+\sin^2 b+\sin^2 c\pm 2\sin a\sin b\sin c=1.$$

310. — Rendre calculables par logarithmes les expressions suivantes :

$$\sin a+\sin b\pm\sin(a+b),\qquad \frac{a\sin\alpha+b\cos\alpha}{a\sin\alpha-b\cos\alpha},$$
$$\cos a+\cos b\pm\sin(a+b),$$
$$1\pm\cos a\pm\sin a,$$
$$\frac{\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a-\operatorname{tg} b},\qquad \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\pm\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$$

311. — Limite du rapport d'un arc de cercle de longueur donnée à sa corde quand le rayon du cercle augmente indéfiniment.

312. — Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases}\sin x\pm\sin y=a,\\ \sin x.\sin y=b.\end{cases}\quad \begin{cases}\operatorname{tg} x\pm\operatorname{tg} y=a,\\ x\pm y=b.\end{cases}\quad \begin{cases}\sin x+\cos y=a,\\ x-y=b.\end{cases}\quad \begin{cases}\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=a,\\ \sin x+\sin y+b,\end{cases}$$

313. — Déduire des relations $a=b\cos C+c\cos A,\ldots$ qu'un triangle n'est pas déterminé dès qu'on donne ses trois angles. Même question en se servant des relations $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,\ldots$

314. — Établir la formule $S=p^2\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$.

315. — Résoudre un triangle rectangle connaissant le rayon du cercle inscrit et : 1° le périmètre (ou la surface), 2° l'hypoténuse ; 3° un côté de l'angle droit.

316. — Résoudre un triangle rectangle connaissant la hauteur et : 1° un angle aigu ; 2° un côté de l'angle droit ; 3° l'hypoténuse (ou la surface).

317. — Résoudre un triangle connaissant : 1° la surface et les angles ; 2° le rayon du cercle circonscrit, un côté et un angle adjacent ; 3° la surface, un côté et un angle (deux cas) ; 4° les trois hauteurs ; 5° le périmètre et les angles ; 6° le périmètre, un côté et un angle (deux cas) ; 7° le rayon du cercle inscrit et les angles ; 8° le rayon du cercle inscrit, un angle et le périmètre (ou la surface) ; 9° le rayon du cercle inscrit, un côté et le périmètre (ou la surface) ; 10° la surface et les rayons rr' du cercle inscrit et d'un cercle ex-inscrit.

QUESTIONS PROPOSÉES

560. — On donne deux cercles O et O', le cercle O ayant son centre sur le cercle O', et on mène d'un point M du cercle O' les tangentes MA, MB au cercle O, qui rencontrent à nouveau le cercle O' en C et D. Montrer que, lorsque M décrit le cercle O' :

1° La droite CD conserve une direction fixe ;

2° Le point d'intersection des droites AB, CD décrit une droite ;

3° Le point d'intersection des deux autres tangentes au cercle O menées de C et D décrit le cercle O'.

Vasnier.

561. — Soit M un point variable sur une droite fixe D et soient en outre A et B les points de contact des tangentes menées de M à une parabole fixe P, située dans un plan contenant la droite D. On demande de trouver, quand le point M se meut sur la droite D :

1° Le lieu du centre de gravité du triangle MAB ;

2° Le lieu du point de concours des hauteurs de ce même triangle.

E.-N. Barisien.

562. — Soient M un point du plan d'une parabole P et AB la corde polaire de M par rapport à P.

1° Le lieu des points M tels que l'orthocentre du triangle MAB soit sur la parabole P se compose d'une cubique et d'une ligne droite ;

2° Dans les mêmes conditions, le lieu du centre de gravité du triangle MAB se compose d'une quartique et d'une parabole ;

3° Le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle MAB se compose d'une quartique et d'une parabole ;

4° Trouver aussi le lieu du centre du cercle des neuf points du triangle MAB.

E.-N. Barisien.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

6e Année. N° 12. Septembre 1896

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Par M. **Girod**, professeur de la classe de Centrale au lycée de Lyon.

Il existe une catégorie de problèmes de géométrie analytique qui présentent une application intéressante de la théorie des équations algébriques. Un premier cas, assez fréquemment proposé dans les concours est le suivant :

Supposons que l'équation générale $f(x, y, m) = 0$ d'un faisceau C de courbes dépendant d'un paramètre m contienne ce paramètre m au second degré. Imaginons qu'une autre courbe C', déduite de la courbe C d'après une loi déterminée, soit représentée par une équation rationnelle $\varphi(x, y, m) = 0$, où le même paramètre m figure aussi au second degré. Par tout point P, (x_0, y_0) du plan passent deux courbes du faisceau C, puisque l'équation $f(x_0, y_0, m) = 0$ a deux racines, m' et m''.

Il s'agit de trouver le lieu des points de rencontre des deux courbes correspondantes du faisceau C'

$$\varphi(x, y, m') = 0, \qquad \varphi(x, y, m'') = 0,$$

lorsque le point $P(x_0, y_0)$ décrit une courbe donnée $\psi(x, y) = 0$.

On voit que si x et y sont les coordonnées d'un point M commun à ces deux dernières, l'équation du second degré $\varphi(x, y, m) = 0$ a les mêmes racines que l'équation $f(x_0, y_0, m) = 0$. On exprimera donc que ces deux équations ordonnées par rapport à m ont leurs coefficients proportionnels, et on éliminera x_0, y_0 entre les deux relations obtenues et la condition $\psi(x_0, y_0) = 0$.

Deux exemples de ce genre se rencontrent dans les problèmes proposés au concours de l'école Centrale, sessions d'octobre 1893 et juillet 1895. Un autre exemple est dans la dernière partie du problème de l'École polytechnique, année 1889.

Voici un deuxième cas général, qui, à ma connaissance, ne s'est pas encore produit dans les concours.

On suppose que l'équation générale $f(x, y, m) = 0$ des courbes d'un faisceau C contienne le paramètre m au troisième degré et qu'à chaque courbe du faisceau C on en fasse correspondre une autre, $\varphi(x, y, m) = 0$, où ce paramètre m figure au second degré. Considérant les deux courbes du faisceau C qui correspondent aux deux courbes du deuxième faisceau assujetties à passer par un point $P(x_0, y_0)$, on demande le lieu de leurs points de rencontre lorsque le point $P(x_0, y_0)$ décrit une courbe donnée $\psi(x, y) = 0$.

Comme précédemment, si x, y sont les coordonnées d'un point de rencontre de deux courbes du faisceau C, deux des trois racines de l'équation du troisième degré $f(x, y, m) = 0$ sont racines de l'équation du second degré $\varphi(x_0, y_0, m) = 0$. On divisera donc le polynome $f(x, y, m)$, ordonné par rapport à m, par le polynome $\varphi(x_0, y_0, m)$, on écrira que le reste du premier degré en m est nul identiquement, et entre les deux relations obtenues et la condition $\psi(x_0, y_0) = 0$, on éliminera x_0 et y_0.

Comme exemple, on peut signaler le lieu des points de rencontre des axes des deux paraboles passant par quatre points, lorsque, trois de ces points étant fixes, on fait décrire au quatrième une courbe déterminée. Car l'équation de l'axe d'une parabole circonscrite à un triangle contient au troisième degré le coefficient angulaire m des diametres, et ce coefficient figure au second degré dans l'équation générale des paraboles.

Mais le problème peut être retourné d'une manière intéressante lorsque l'équation $\varphi(x, y, m) = 0$ est celle d'une droite. Alors si on considère les trois courbes du faisceau C qui passent par un point P, (x_0, y_0), à ces trois courbes correspond un triangle qui a pour côtés les trois droites associées. Il s'agit alors de trouver le lieu des sommets de ce triangle lorsque le point $P(x_0, y_0)$ décrit une courbe $\psi(x, y) = 0$. On exprime que le polynome du troisième degré $f(x_0, y_0, m)$ est divisible par le polynome du second degré $\varphi(x, y, m)$, et on élimine x_0, y_0 entre les deux conditions obtenues et la relation donnée, $\psi(x_0, y_0) = 0$.

Voici un exemple simple :

Etant donnés deux axes rectangulaires, on considère les paraboles tangentes à OY *en* O, *et normales à la droite* $x - a = 0$ *en un point variable. Il existe trois paraboles du faisceau dont les axes passent par un point* P *du plan. Trouver le lieu des sommets du triangle formé par les trois directrices, lorsque ce point* P *décrit la droite* $x - a = 0$.

Si on prend pour paramètre variable le coefficient angulaire m des diamètres, on trouve pour équation générale des paraboles

$$(y - mx)^2 - 4am^2x = 0.$$

Si l'on ordonne par rapport à m l'équation $mf_m - f' = 0$ de l'axe, on obtient

$$m^3(2a - x) + m^2y - mx + y = 0.$$

On peut remarquer en passant que la somme des angles que fait l'axe OX avec les trois axes issus d'un même point est égale à π.

L'équation de la directrice est

$$m^2a + my + x = 0.$$

Remplaçons dans l'équation de l'axe x par a, et y par une indéterminée y_0, et divisons le polynome ainsi obtenu

$$am^3 + y_0m^2 - am + y_0,$$

par

$$am^2 + ym + x.$$

On peut multiplier le dividende par a et l'opération se présente ainsi

$$\begin{array}{l|l}
a^2m^3 - ay_0m^2 - a^2m + ay_0 & am^2 + ym + x \\
\hline
-a^2m^3 - aym^2 - axm & am + y_0 - y \\
\hline
a(y_0 - y)m^2 - (a^2 + ax)m + ay_0 & \\
-a(y_0 - y)m^2 - y(y_0 - y)m - x(y_0 - y) & \\
\hline
-(ax + a^2 + y(y_0 - y))m + ay_0 - x(y_0 - y) &
\end{array}$$

On a donc les deux conditions

$$a(x + a) + y(y_0 - y) = 0,$$
$$ay_0 - x(y_0 - y) = 0.$$

Éliminant y_0, on obtient pour équation du lieu :

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

Au lieu de se donner la courbe $\psi(x, y) = 0$, que doit décrire le point $P(x_0, y_0)$, on peut, dans le cas où le paramètre m est un coefficient angulaire, déterminer cette courbe de manière que les trois directions définies par $f(x_0, y_0, m) = 0$ satisfassent à une certaine relation, par exemple que l'une d'elles soit bissectrice de l'angle des deux autres.

Cette relation se traduit d'une manière particulièrement simple à l'aide des coefficients (*). Le triangle des trois droites associées, dont les côtés ont pour équation générale $\varphi(x, y, m) = 0$, est alors isocèle, si, comme dans le problème précédent, m est le coefficient angulaire d'une perpendiculaire ou d'une parallèle à l'une d'elles.

Si on voulait que les trois directions définies par $f(x_0, y_0, m) = 0$ soient parallèles aux côtés d'un triangle équilatéral, et par conséquent que le triangle des trois droites associées soit aussi équilatéral, le point $P(x_0, y_0)$ ne décrirait pas en général une courbe $\psi(x, y) = 0$. Car il faudrait écrire que l'équation $f(x_0, y_0, m) = 0$ est équivalente à l'équation du troisième degré qui lie la tangente du tiers d'un angle à la tangente de cet angle, et qui est $\lambda = \dfrac{3m - m^3}{1 - 3m^2}$, en désignant par λ la tangente arbitraire de l'angle. Si on élimine λ entre les trois égalités qui expriment la proportionnalité des coefficients, on obtient en général deux relations entre x_0 et y_0.

ALGÈBRE

480. — *Dans le développement du carré de* $1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + px^p$, *le coefficient de* x^q, *pour* $q < p$, *est égal à* $\dfrac{q^3 + 11q}{6}$.

Si nous écrivons tous les termes du polynome donné, jusqu'à qx^q inclusivement, d'abord dans l'ordre donné, puis dans l'ordre inverse, sur deux lignes parallèles,

$$\begin{array}{lllll} 1, & x, & 2x^2, & \ldots, & qx^q, \\ qx^q, & (q-1)x^{q-1}, & \ldots, & 2x^2, & x, \quad 1, \end{array}$$

la somme des doubles produits des termes placés dans la même colonne nous donnera le double du terme en x^q. En désignant par N le coefficient de ce terme, nous aurons donc

$$2N = 2q + 2(q-1) + 4(q-2) + \ldots + 2(q-2)(q-q+2) + 2(q-1)(q-q+1) + 2q;$$

le premier et le dernier terme sont irréguliers, les autres sont tous compris dans la forme $2k(q-k)$; nous pouvons donc écrire

$$2N = 4q + \sum_{k=1}^{k=q-1} 2k(q-k),$$

ou

$$N = 2q + \sum_{k=1}^{k=q-1} k(q-k),$$

(*) En effet, soient m_1, m_2 et μ les trois racines de $Am^3 + Bm^2 + Cm + D = 0$, et supposons que μ soit le coefficient angulaire de celle des trois directions qui est bissectrice de l'angle des deux autres. On a : $\dfrac{2\mu}{1-\mu^2} = \dfrac{m_1 + m_2}{1 - m_1 m_2}$

ou $$\frac{2\mu}{1-\mu^2} = \frac{(m_1 + m_2 + \mu) - \mu}{1 - \dfrac{m_1 m_2 \mu}{\mu}}. \quad \text{Or,} \quad m_1 + m_2 + \mu = -\frac{B}{A}, \quad \text{et} \quad m_1 m_2 \mu = -\frac{D}{A}.$$

D'où résulte $$\frac{2\mu}{1-\mu^2} = \frac{-\dfrac{B}{A} - \mu}{1 + \dfrac{D}{A\mu}} = -\frac{(A\mu + B)\mu}{A\mu + D}.$$

Si on suppose $\mu \neq 0$, pour rester dans le cas général, on a :

$$\frac{2}{1-\mu^2} = -\frac{A\mu + B}{A\mu + D}, \qquad \text{ou} \qquad A\mu^3 + B\mu^2 + 3A\mu + 2D + B = 0.$$

Mais on a aussi, par hypothèse, $A\mu^3 + B\mu^2 + C\mu + D = 0$, d'où résulte, par soustraction $(3A - C)\mu + 3D + B = 0$. Il suffit d'exprimer que la racine de cette équation vérifie l'équation du troisième degré.

ou enfin, en décomposant cette somme en deux autres,

$$N = 2q + q\sum_{k=1}^{k=2q-1} k - \sum_{k=1}^{k=q-1} k^2.$$

A l'aide de formules très connues relatives à la somme des n premiers nombres et de leurs carrés, nous pouvons écrire de suite

$$N = 2q + q\,\frac{(2q-1)}{2} - \frac{(q-1)(2q-1)}{6}.$$

Il suffit de réduire le second membre pour obtenir l'expression demandée.

Solutions analogues : MM. J. Gouion et A. Langlois (pensionnat de Valbenoite, à Saint-Etienne) ; Auzeram (lycée de Montpellier).

---

481. — *Le nombre des manières dont on peut amener le point n avec p dés a jouer est le coefficient de x^n dans le développement de $(x + x^2 + x^3 + \ldots + x^6)^p$.*

En effet, désignons par α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 et α_6 les exposants affectés aux termes x, x^2, x^3, x^4, x^5 et x^6 dans un terme du développement supposé de degré n ; nous aurons

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 5\alpha_5 + 6\alpha_6 = n$$

et

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = p\,;$$

si on prend dans α_1 dés la face qui contient un point, dans α_2 dés la face qui contient deux points, etc., on obtient justement avec p dés le point n ; or en supposant chaque dé affecté d'un numéro d'ordre pris, par exemple, dans la suite 1, 2, ..., p, et tous les numéros d'ordre distincts, on voit qu'à chaque façon d'obtenir le terme de degré n avec les exposants partiels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_6$, correspond une manière unique de retourner les dés comme nous l'avons indiqué et, par suite, d'avoir le point n ; réciproquement, d'ailleurs, à toute manière d'avoir le point n comme nous l'avons dit correspond une manière unique d'avoir le terme en $x^{\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + 6\alpha_6}$ ou x^n. On voit, par le même raisonnement, que rien de particulier n'a été supposé concernant les exposants partiels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_6$, sauf qu'ils doivent vérifier les deux égalités écrites au début. Il y a donc exactement le même nombre de manières d'avoir le terme en x^n que de manières d'amener le point n avec p dés différents les uns des autres et dont les différences permettent de classer les points donnés par les faces retournées dans un ordre déterminé à chaque fois.

E. BALLY, Collège Stanislas.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

484. — *On considère une ellipse fixe de foyers F et F′ et un point M mobile sur cette ellipse; la tangente à l'ellipse au point M rencontre les directrices relatives aux foyers F et F′ respectivement en T et T′; par ces points on mène les deuxièmes tangentes TN et T′N, et on considère les paraboles inscrites dans les angles MTN et MT′N′ et ayant respectivement pour foyers F et F′. On demande alors :*

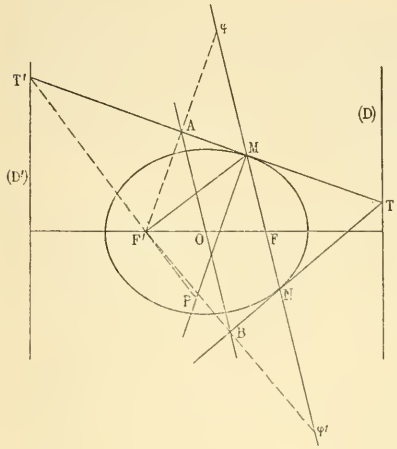
1° De démontrer qu'une des deux autres tangentes communes aux deux paraboles est fixe et que la seconde est la normale à l'ellipse en M ;

2° De démontrer que les tangentes aux sommets des deux paraboles sont respectivement parallèles à MF et MF′ et passent par un point fixe, et de déduire de là le lieu du point de rencontre des directrices ;

3° De démontrer que les axes des deux paraboles se coupent sur la parallèle au petit axe passant par le point M, et de trouver le lieu de leur point de rencontre ;

4° De trouver les lieux des points de contact de chacune des paraboles avec les tangentes communes aux deux paraboles et variables.

Nous allons donner de ce problème une solution mi-partie analytique, mi-partie géométrique.



La parabole qui a son foyer au point F′ est inscrite, ainsi que l'ellipse, dans le quadrilatère formé par les droites isotropes issues du point F′ et par les tangentes TM, TN (*fig.* 1); son équation tangentielle est donc une combinaison linéaire de celle de l'ellipse et de celle du couple de points F′ et T. Désignons alors par φ l'anomalie excentrique du point M; ses coordonnées sont $a \cos \varphi$, $b \sin \varphi$, et l'équation de la tangente en M est

$$\frac{x \cos \varphi}{a} + \frac{y \sin \varphi}{b} - 1 = 0;$$

celle de la directrice (D) du foyer F est $cx - a^2 = 0$; par conséquent le point T a pour coordonnées

$$x = \frac{a^2}{c}, \qquad y = \frac{b(c - a \cos \varphi)}{c \sin \varphi},$$

et, par suite, a pour équation tangentielle

$$a^2 u \sin \varphi + bv(c - a \cos \varphi) + cw \sin \varphi = 0;$$

l'équation tangentielle du point F′ est $cu - w = 0$, celle de l'ellipse,

$$a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 = 0;$$

donc l'équation tangentielle de la parabole envisagée est

$$\lambda(a^2u^2 + b^2v^2 - w^2) + (cu - w)[a^2u \sin \varphi + bv(c - a \cos \varphi) + cw \sin \varphi] = 0,$$

pour une certaine valeur de λ; on aura d'ailleurs cette valeur de λ en exprimant que le coefficient de w^2 est nul, ce qui donne $\lambda = -c \sin \varphi$. Il ne reste plus qu'à remplacer λ par $-c \sin \varphi$ dans l'équation précédente et à réduire pour avoir l'équation tangentielle de la parabole (F′); en changeant ensuite c en $-c$, on aura celle de la parabole (F); on trouve ainsi

$$(F') \qquad c(c - a \cos \varphi)uv - bc \sin \varphi . v^2 - b \sin \varphi . uw - (c - a \cos \varphi)vw = 0,$$

$$(F) \qquad c(c + a \cos \varphi)uv + bc \sin \varphi . v^2 - b \sin \varphi . uw + (c + a \cos \varphi)vw = 0.$$

1° Les coordonnées des tangentes communes s'obtiennent en cherchant les solutions communes aux deux équations (F) et (F′); en combinant ces deux équations par addition et soustraction, et les divisant par 2 et par $2c$, on obtient les deux équations plus simples

$$c^2uv - b \sin \varphi . uw + a \cos \varphi . vw = 0,$$

$$a \cos \varphi . uv + b \sin \varphi . v^2 + vw = 0.$$

La seconde se décompose en

$$v = 0 \qquad \text{et} \qquad a \cos \varphi . u + b \sin \varphi . v + w = 0;$$

si on prend d'abord $v = 0$, on a, d'après la première, $u = 0$ ou $w = 0$, c'est-à-dire les deux solutions (0, 0, 1) et (1, 0, 0); si on prend la deuxième équation fournie par la décomposition, on trouve aisément, en portant $w = -(a \cos \varphi . u + b \sin \varphi . v)$ dans la première équation, les deux équations $\dfrac{u}{b \cos \varphi} = \dfrac{v}{a \sin \varphi}$ et $\dfrac{u}{a \sin \varphi} = \dfrac{v}{-b \cos \varphi}$, d'où l'on déduit, par le calcul de w, les deux solutions

$$(b \cos \varphi, a \sin \varphi, -ab) \qquad \text{et} \qquad (a \sin \varphi, -b \cos \varphi, -c^2 \sin \varphi \cos \varphi).$$

La première solution (0, 0, 1) représente la droite de l'infini; la seconde, (1, 0, 0), donne l'axe des y, ce qui nous montre de suite que les deux paraboles ont une tangente commune fixe, l'axe des y, c'est-à-dire le petit axe de l'ellipse; la troisième solution représente la tangente à l'ellipse au point M; et la quatrième, la normale au même point.

Des considérations géométriques très simples permettent d'apercevoir ces résultats. En effet, la polaire du point T par rapport à l'ellipse passe au point F; les deux droites FM et FN coïncident

donc entre elles; d'ailleurs elles passent aux symétriques φ et φ' de F' par rapport aux deux tangentes; la droite MN est donc la directrice de la parabole, et, par suite, la droite AB qui joint les projections du foyer sur les deux tangentes, passe au point O, milieu de FF'; en outre, c'est évidemment la tangente au sommet. Il résulte de là que la perpendiculaire à la tangente en M est une tangente à la parabole, et qu'il en est de même de la perpendiculaire à F'O, en O. De même la seconde parabole a pour directrice FM et, pour tangente au sommet, une parallèle à F'M menée par le point O; elle est donc tangente aussi à la normale en M à l'ellipse et à l'axe OY.

2° La seconde partie est maintenant complètement évidente.

3° Les axes des paraboles sont les deux hauteurs du triangle MFF' relatives aux sommets F et F'; elles se coupent donc sur la troisième hauteur, c'est-à-dire sur la parallèle au petit axe menée par le point M. Le lieu du point de rencontre des axes s'obtiendra donc en cherchant le lieu du point de rencontre de la droite $x = a\cos\varphi$ avec la perpendiculaire abaissée du point F' sur MF, $y = \frac{c - a\cos\varphi}{b\sin\varphi}(x + c)$, c'est-à-dire en éliminant φ entre ces deux équations; on trouve ainsi la quartique

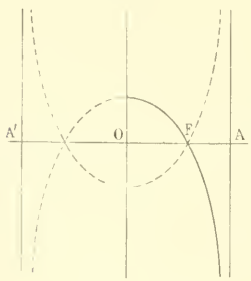
$$(1) \qquad b^2y^2(x^2 - a^2) + a^2(x^2 - c^2)^2 = 0;$$

on trouve tout aussi aisément les deux équations

$$(2) \qquad x = a\cos\varphi, \qquad y = \frac{a^2\sin^2\varphi - b^2}{b\sin\varphi},$$

qui représentent la courbe à l'aide d'un paramètre variable φ.

Les fonctions x et y ayant pour période commune 2π, il suffit de faire varier φ dans un intervalle total d'étendue égale à 2π, par exemple, de $-\pi$ à $+\pi$; d'autre part, si on change φ en $-\varphi$, x ne change pas, y change simplement de signe, la courbe est symétrique par rapport à Ox, et, en tenant compte de cette symétrie, il suffit de faire varier φ de 0 à π; si, en second lieu, on change φ en $\pi - \varphi$, x change simplement de signe, y ne change pas, la courbe est donc aussi symétrique par rapport à Oy, et, en tenant compte de cette nouvelle symétrie, il suffit de faire varier φ de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Or dans cet intervalle, le cosinus décroît constamment de 1 à 0, x décroît depuis a jusqu'à 0; y, que l'on peut écrire $y = \frac{a^2}{b}\sin\varphi - \frac{b}{\sin\varphi}$, croît depuis $-\infty$ jusqu'à $+\frac{c^2}{b}$ et s'annule pour $\sin\varphi = \frac{b}{a}$, pour cette valeur $\cos\varphi = \frac{c}{a}$, et $x = c$. Il est alors facile de tracer la courbe et de la placer à l'aide des données de l'ellipse (*fig.* 2).



4° Les points de contact de la parabole (F') avec la tangente et la normale en M à l'ellipse sont sur la polaire du point M par rapport à la parabole, c'est-à-dire sur la perpendiculaire au rayon F'M menée par le point F'; on sait que cette droite rencontre la tangente en M sur la directrice, au point T'; par conséquent le point de contact de la parabole avec la tangente à l'ellipse décrit la directrice du foyer F'. Pour obtenir ce lieu par le calcul, appliquons l'équation

$$u_0\frac{\partial f}{\partial u} + v_0\frac{\partial f}{\partial v} + w_0\frac{\partial f}{\partial w} = 0,$$

qui donne le point de contact de la tangente (u_0, v_0, w_0) avec la conique $f(u, v, w) = 0$, et prenons pour u_0, v_0, w_0 les nombres $b\cos\varphi$, $a\sin\varphi$, $-ab$, qui sont les coordonnées de la tangente à l'ellipse au point M; nous obtiendrons l'équation

$$a^2\sin\varphi u + b(a\cos\varphi + c)v + c\sin\varphi w = 0.$$

Cette équation nous montre immédiatement que le point de contact décrit la droite $x = -\frac{a^2}{c}$.

Quant au second lieu, nous l'obtiendrons soit en procédant de la même façon avec les coordonnées de la normale, soit en cherchant le lieu du point de rencontre de la normale en M avec la perpendiculaire en F′ au rayon vecteur F′M. Le premier procédé vaut mieux et donne immédiatement l'équation tangentielle du point de contact et, par suite, les coordonnées d'un point quelconque du lieu en fonction du paramètre φ. Nous trouvons ainsi, après avoir supprimé le facteur $a - c\cos\varphi$, qui se trouvait déjà dans l'équation tangentielle du premier point de contact,

$$bc\cos^2\varphi u + c\sin\varphi(c + a\cos\varphi)v - bw = 0;$$

le lieu du point P a donc pour équations

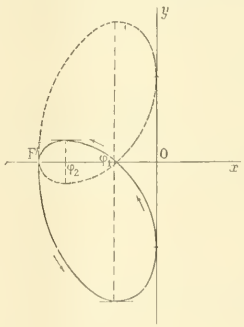
$$(3) \qquad x = -c\cos^2\varphi, \qquad y = -\frac{c}{b}\sin\varphi(c + a\cos\varphi).$$

Il est facile d'expliquer l'origine de ce facteur, $a - c\cos\varphi$; en effet la valeur de $\cos\varphi$ qui annule ce facteur est $\frac{a}{c}$, le sinus est $\pm\frac{bi}{c}$, par conséquent les points M de l'ellipse qui correspondent à cette solution particulière ont pour coordonnées $x = \frac{a^2}{c}$, $y = \pm\frac{b^2 i}{c}$; ce sont les points de rencontre de l'ellipse avec la directrice du foyer F et, par suite, les deux points en lesquels la tangente MT devient isotrope sans coïncider avec les tangentes isotropes issues du point F′; la normale en l'un de ces points coïncide avec la tangente. Si donc on prend, par exemple, le point qui donne la tangente parallèle à $y = ix$, la parabole (F′), pour ce point, devient un couple de points, l'un, à l'infini sur la direction isotrope, l'autre, sur Oy au second foyer imaginaire $(0, -ci)$; par suite, pour les coordonnées de la droite $y - i(x - c) = 0$, qui est une tangente double de cette parabole, l'équation du point de contact doit être indéterminée; c'est bien ce qui arrive, puisqu'elle contient le facteur $a - c\cos\varphi$, qui s'annule dans ces conditions.

Construisons rapidement la courbe représentée par les équations (3). Nous voyons de suite qu'il suffit de faire varier φ dans un intervalle d'étendue totale égale à 2π, par exemple, de $-\pi$ à $+\pi$; le changement de φ en $-\varphi$ montre une symétrie par rapport à Ox; il suffit donc de faire varier φ de 0 à π. Les variations de x sont évidentes; celles de y ne s'aperçoivent qu'après l'étude de la dérivée de y par rapport à φ; or celle-ci est

φ	x	y'	y
0	$-c$		0
		—	déc.
φ_1	croît	0	min. < 0
			croît
$\frac{\pi}{2}$	0 Max.	+	
φ'			0
	déc.		croît
φ_2		0	Max. > 0
		—	déc.
π	$-c$		0

$$y' = -\frac{c}{b}(2a\cos^2\varphi + c\cos\varphi - a);$$



ce trinome en $\cos\varphi$ a deux racines h_1 et $-h_2$, comprises entre 0 et 1 et -1 et 0; appelons φ_1 l'arc moindre que $\frac{\pi}{2}$ et tel que $\cos\varphi_1 = h_1$, φ_2 l'arc compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π et tel que $\cos\varphi_2 = -h_2$; appelons en outre φ' l'arc qui annule y et tel que $\cos\varphi' = -\frac{c}{a}$; nous voyons de suite que $\cos\varphi'$ est compris entre $\cos\varphi_2$ et 0; par conséquent $\frac{\pi}{2} < \varphi' < \varphi_2$, et le

tableau qui contient les variations de x et de y se construit dès lors sans peine. La branche de courbe que nous avions à construire s'ensuit, et, en traçant sa symétrique par rapport à Oy, nous avons le lieu total (*fig.* 3).

Si on envisage maintenant la seconde parabole (F), les lieux obtenus sont la directrice du foyer F et le symétrique par rapport à Oy de celui que nous venons de construire.

Bonnes solutions : MM. E.-N. Barisien ; Fatou (collège Stanislas) ; J. Lhériaud (lycée de Toulouse) ; G. Soumiou (lycée de Toulouse) ; A. Caussé, à Castres ; E. Barré, à Douai ; E. Bally (collège Stanislas).

Solutions imparfaites : MM. Auzeram (lycée de Montpellier) : erreur dans une courbe ; L. Martaud (lycée Hoche) ; A. Laureaux (lycée de Besançon).

---

485. — *On considère une conique variable homofocale à une ellipse fixe et une droite fixe. On demande :*

1° *Le lieu du point de rencontre des normales à cette conique aux points où elle est coupée par la droite fixe ;*

2° *L'enveloppe de la corde qui joint les pieds des deux autres normales concourantes avec les premières.*

1° Soient
$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}-1=0$$
et
$$Ax+By-1=0$$
les équations de la conique variable et de la droite fixe. Le pôle tangentiel de la droite a pour coordonnées $A(a^2+\lambda)$ et $B(b^2+\lambda)$; on en conclut que les coordonnées du pôle normal sont

$$x=-\frac{(a^2-b^2)A(a^2+\lambda)[B^2(b^2+\lambda)^2-(b^2+\lambda)]}{(b^2+\lambda)[A^2(a^2+\lambda)^2+(a^2+\lambda)B^2(b^2+\lambda)^2]},$$

$$y=+\frac{(a^2-b^2)B(b^2+\lambda)[A^2(a^2+\lambda)^2-(a^2+\lambda)]}{(b^2+\lambda)[A^2(a^2+\lambda)^2+(a^2+\lambda)B^2(b^2+\lambda)^2]},$$

ou
$$x=\frac{-c^2AB^2(b^2+\lambda)-1}{A^2(a^2+\lambda)+B^2(b^2+\lambda)},$$

$$y=\frac{c^2BA^2(a^2+\lambda)-1}{A^2(a^2+\lambda)+B^2(b^2+\lambda)},$$

c^2 étant égal à a^2-b^2.

On aura l'équation du lieu demandé en éliminant λ entre ces deux équations. On voit d'ailleurs immédiatement que ce lieu est une droite, puisque les termes des fractions qui figurent dans les seconds membres sont du premier degré par rapport à λ, et que le dénominateur est le même.

2° Le pôle tangentiel de la corde qui joint les pieds des deux autres normales a pour coordonnées $-\frac{a^2+\lambda}{A(a^2+\lambda)}$ et $-\frac{b^2+\lambda}{B(b^2+\lambda)}$, ou $-\frac{1}{A}$ et $-\frac{1}{B}$; l'équation de cette corde est donc

$$\frac{x}{A(a^2+\lambda)}+\frac{y}{B(b^2+\lambda)}+1=0,$$

ou
$$\lambda^2AB+\lambda(Bx+Ay+AB(a^2+b^2))+Bb^2x+Aa^2y+ABa^2b^2=0.$$

En écrivant que cette équation en λ a une racine double, nous aurons l'équation de l'enveloppe cherchée.

Nous obtenons
$$(Bx+Ay+AB(a^2+b^2))^2-4AB(Bb^2x+Aa^2y+ABa^2b^2)=0;$$
cette équation représente une parabole qui touche les axes de coordonnées aux points qui ont, l'un pour abscisse Ac^2, l'autre pour ordonnée $-Bc^2$.

J. BADARD, élève de l'École des Mines de Saint-Etienne.

Ont résolu cette question : MM. E. N. Barisien ; E. Barré, à Douai ; Auzeram, à Montpellier ; Blazy-Lacombe (lycée de Toulouse) ; A. Caussé, à Castres ; L. J. Goujon, pensionnat de Valbenoîte, à Saint-Etienne ; L. Martaud (lycée de Versailles).

486. — *Étant données une ellipse fixe et une ellipse de grandeur constante qui tourne autour de son centre, trouver le lieu du point de rencontre de deux tangentes communes à ces ellipses.*

Nous supposons les centres confondus. Prenons pour axes de coordonnées les axes de l'ellipse fixe; désignons par a, b les demi-longueurs d'axes de cette ellipse et par α, β celles de l'ellipse mobile. Les équations tangentielles de ces courbes sont alors

$$a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 = 0,$$
$$\alpha^2(u\cos\omega + v\sin\omega)^2 + \beta^2(u\sin\omega - v\cos\omega)^2 - w^2 = 0.$$

Les directions des tangentes menées d'un point (x, y) à chacune de ces coniques sont déterminées par les équations

$$a^2u^2 + b^2v^2 - (ux + vy)^2 = 0,$$
$$\alpha^2(u\cos\omega + v\sin\omega)^2 + \beta^2(u\sin\omega - v\cos\omega)^2 - (ux + vy)^2 = 0;$$

le point (x, y) appartiendra au lieu considéré si ces deux équations homogènes en u et v ont leurs coefficients proportionnels, c'est-à-dire si l'on a

$$\frac{\alpha^2\cos^2\omega + \beta^2\sin^2\omega - x^2}{a^2 - x^2} = \frac{\alpha^2\sin^2\omega + \beta^2\cos^2\omega - y^2}{b^2 - y^2} = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)\cos\omega\sin\omega - xy}{-xy}.$$

Nous aurons l'équation du lieu en éliminant ω entre ces équations. On peut les écrire

$$\frac{\alpha^2\cos^2\omega + \beta^2\sin^2\omega - a^2}{a^2 - x^2} = \frac{\alpha^2\sin^2\omega + \beta^2\cos^2\omega - b^2}{b^2 - y^2} = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)\sin\omega\cos\omega}{-xy} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2}{a^2 + b^2 - x^2 - y^2},$$

le dernier rapport étant obtenu en ajoutant les deux premiers terme à terme.

On obtient alors

$$\sin 2\omega = \frac{2xy(\alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2)}{(\alpha^2 - \beta^2)(x^2 + y^2 - a^2 - b^2)},$$

puis, en remplaçant dans les deux premiers rapports $\cos^2\omega$ par $\dfrac{1 + \cos 2\omega}{2}$ et $\sin^2\omega$ par $\dfrac{1 - \cos 2\omega}{2}$, on a

$$[\alpha^2(1 + \cos 2\omega) + \beta^2(1 - \cos 2\omega) - 2a^2](b^2 - y^2) = [\alpha^2(1 - \cos 2\omega) + \beta^2(1 + \cos 2\omega) - 2b^2](a^2 - x^2),$$

d'où

$$\cos 2\omega = \frac{x^2(\alpha^2 + \beta^2 - 2b^2) - y^2(\alpha^2 + \beta^2 - 2a^2) + (\alpha^2 + \beta^2)(b^2 - a^2)}{(\alpha^2 - \beta^2)(x^2 + y^2 - a^2 - b^2)}.$$

Portons maintenant ces valeurs de $\sin 2\omega$ et $\cos 2\omega$ dans l'égalité

$$\sin^2 2\omega + \cos^2 2\omega = 1;$$

nous avons pour équation du lieu

$$4x^2y^2(\alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2)^2 + [x^2(\alpha^2 + \beta^2 - 2b^2) - y^2(\alpha^2 + \beta^2 - 2a^2) + (\alpha^2 + \beta^2)(b^2 - a^2)]^2$$
$$= (\alpha^2 - \beta^2)^2(x^2 + y^2 - a^2 - b^2)^2.$$

Elle représente une courbe du quatrième degré, symétrique par rapport aux deux axes. On pourrait la discuter en ordonnant le premier membre de l'équation par rapport à y^2.

On peut aussi opérer de la façon suivante :

Faisons passer dans le second membre le deuxième terme du premier membre ; le second membre est alors une différence de deux carrés qu'on peut remplacer par un produit de deux facteurs ; on a

$$x^2y^2(\alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2)^2 = -[x^2(\alpha^2 - b^2) - y^2(\beta^2 - a^2) - (a^2\alpha^2 - b^2\beta^2)][x^2(\beta^2 - b^2) - y^2(\alpha^2 - a^2) + b^2\alpha^2 - a^2\beta^2],$$

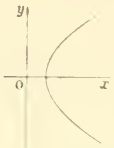
d'où

$$\frac{x^2(\alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2)}{x^2(\alpha^2 - b^2) - y^2(\beta^2 - a^2) - (a^2\alpha^2 - b^2\beta^2)} = \frac{x^2(\beta^2 - b^2) - y^2(\alpha^2 - a^2) + b^2\alpha^2 - a^2\beta^2}{-y^2(\alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2)} = t;$$

on obtient ainsi deux équations du premier degré permettant de calculer x^2 et y^2 rationnellement en fonction de t, mais la discussion est fort pénible.

E. BALLY, Collège Stanislas.

Autre solution par M. E. N. Barisien.



493. — *Étant donné une série de paraboles admettant l'axe des x comme axe et l'axe des y comme directrice, on demande :*

1° de déterminer l'enveloppe de ces courbes ;

2° de former l'équation différentielle de leurs trajectoires orthogonales ;

3° d'intégrer cette équation.

(École des Ponts et Chaussées, cours spéciaux, 1894.)

Si nous supposons d'abord la parabole rapportée à ses axes ordinaires, elle aura pour équation $y^2 - 2px = 0$; pour avoir son équation par rapport à son axe, Ox, et à sa directrice, Oy, il suffit de changer x en $x - \frac{p}{2}$; l'équation générale des paraboles considérées est donc $y^2 - 2px + p^2 = 0$, p étant un paramètre arbitraire.

1° L'enveloppe de ces paraboles s'obtient en exprimant que l'équation considérée comme étant du second degré en p a une racine double ; on obtient ainsi $x^2 - y^2 = 0$, équation qui représente les deux bissectrices de l'angle des axes. Ce résultat était évident *a priori*, car de tout point de la directrice d'une parabole on peut lui mener deux tangentes rectangulaires.

2° Soient x et y les coordonnées du point de rencontre de la parabole (p) avec l'une des trajectoires orthogonales. Le coefficient angulaire de la tangente à la parabole en ce point est $-\frac{f'x}{f'y} = \frac{p}{y}$; celui de la tangente à la trajectoire envisagée est $y' = \frac{dy}{dx}$, en appelant y la fonction de x que définit l'équation de cette trajectoire, et en prenant la valeur de y' au point (x, y). On doit donc avoir $\frac{py'}{y} = -1$, et l'on aura l'équation différentielle demandée en remplaçant p par $-\frac{y}{y'}$ dans l'équation de la parabole. On trouve ainsi sans peine

$$(1) \qquad yy'^2 + 2xy' + y = 0.$$

3° Pour intégrer cette équation, je pose $y = xz$, d'où : $y' = z + xz'$; en portant cette valeur dans l'équation (1) et tenant compte de $y = xz$, je trouve, après suppression du facteur x,

$$x^2zz'^2 + 2xz'(z^2 + 1) + z^3 + 3z = 0.$$

La solution $x = 0$ donne la solution évidente *a priori* $y = 0$. Pour intégrer l'équation qui reste, je regarde cette équation comme étant du second degré en xz', je la résous et j'en déduis

$$xz' = \frac{\sqrt{1 - z^2} - (1 + z^2)}{z},$$

ou

$$\frac{zz'}{\sqrt{1 - z^2} - (1 + z^2)} = \frac{1}{x}.$$

Les variables sont alors séparées et nous sommes ramenés aux quadratures. Posons $1 - z^2 = u^2$, nous aurons $zz' = -uu'$ et l'équation deviendra

$$\frac{uu'}{-(u^2 + u - 2)} = \frac{1}{x};$$

le premier membre se décompose immédiatement en fractions simples et nous sommes de suite conduits à l'intégration évidente de l'équation

$$\frac{du}{u - 1} + \frac{2du}{u + 2} = -3\frac{dx}{x}.$$

Nous obtenons ainsi

$$L(u - 1)(u + 2)^2 = L\frac{C}{x^3},$$

C désignant une constante arbitraire. L'équation générale des trajectoires orthogonales aux paraboles envisagées est donc

$$(u - 1)(u + 2)^2x^3 = C,$$

ou, en remontant à la fonction y,

$$(2) \qquad (\sqrt{x^2-y^2}-x)(\sqrt{x^2-y^2}+2x)^2 = C.$$

Solution incomplète : M. Pégorier, étudiant à la faculté des sciences de Toulouse.
Solutions imparfaites : MM. Malplat (pensionnat de Valbenoîte, à Saint-Etienne) ; E. Barré, à Douai.

PHYSIQUE ET CHIMIE

228. — *La combustion de* 1^{gr} *d'un carbure d'hydrogène solide dans un calorimètre clos en présence d'un excès d'oxygène, a dégagé* $9^{cal},688$. *Les produits de la combustion sont :* CO^2, $3^{gr},4375$; H^2O, $0^{gr},5625$. *Sachant que la densité de vapeur du carbure est* 4,432 ; *que la chaleur de combustion de* 12^{gr} *de charbon diamant est* $94^{cal},3$ *et que la chaleur de formation de* 18^{gr} *d'eau liquide est* 69^{cal} ; *on demande :* 1° *la composition centésimale du carbure ;* 2° *sa formule ;* 3° *la chaleur de combustion d'une molécule ;* 4° *la chaleur de formation à partir des éléments.*

(*Bourses de licence, 1892.*)

Les poids de carbone et d'hydrogène correspondant aux poids donnés d'anhydride carbonique et d'eau sont respectivement

$$3,4375 \times \frac{12}{44} \qquad \text{et} \qquad 0,5625 \times \frac{2}{18}.$$

Le poids d'hydrogène correspondant à 12 de carbone est donc

$$0,5625 \times \frac{2}{18} \times \frac{44}{3,4375} = \frac{4}{3};$$

par conséquent la formule la plus simple qui soit compatible avec la composition de la substance est C^3H^4, qui représente un poids égal à 64. Or le poids moléculaire résultant de la densité est

$$4,432 \times 28,8 = 127,64,$$

nombre sensiblement double de 64 ; le poids moléculaire exact est donc 128 et la formule $C^{10}H^8$ (naphtaline).

La chaleur de combustion d'une molécule est égale à $9,688 \times 128 = 1240$.

Ecrivons que cette chaleur est égale à la chaleur de *décomposition* du carbure augmentée de la chaleur de combustion de ses éléments, c'est-à-dire de 10 atomes de carbone et de 8 atomes ou 4 molécules d'hydrogène :

$$1240 = -x + 94,3 \times 10 + 69 \times 4,$$

d'où

$$x = -21^{cal}.$$

Remarque. — On aurait pu trouver la formule en calculant d'abord le poids moléculaire d'après la densité et cherchant ensuite, d'après l'analyse, combien ce poids moléculaire renfermait d'atomes de carbone et d'atomes d'hydrogène. Cette marche eût été moins correcte que celle qui a été indiquée : les mesures de densité de vapeur sont en effet moins précises, en général, que les analyses ; de plus, les densités de vapeur sont variables et les conditions dans lesquelles on les détermine peuvent être fort éloignées de celles qui correspondent aux densités dites théoriques ; pour ces raisons, le poids moléculaire résultant de la densité expérimentale peut n'être que grossièrement approché et ne doit servir qu'à déterminer, parmi les multiples de la formule la plus simple compatible avec la composition en poids, celui qui représente le poids moléculaire exact.

---

346. — *On admet comme démontré :*

1° *Que le coefficient de dilatation cubique est le triple du coefficient de dilatation linéaire ;*

2° *Que la dilatation d'une enveloppe est exactement celle qu'elle subirait si elle faisait partie d'une masse solide et continue de la même substance.*

Ceci posé, on détermine le coefficient de dilatation absolue du mercure par la méthode suivante :

Deux tubes de même verre, de 1 mètre de longueur et de 20 millimètres de diamètre environ, sont placés côte à côte dans une même étuve qu'on peut porter à diverses températures.

L'un est en communication avec un manomètre et constitue une espèce de thermomètre à air. On connaît le volume V du réservoir à 0° et le volume très petit v du tube de jonction jusqu'au repère α de la petite branche du tube manométrique. Ce tube porte vers ses extrémités deux traits dont on a mesuré la distance l_0 à 0°. Un appareil micrométrique extérieur permet de relever la variation de distance de ces deux traits aux diverses températures.

L'autre tube, dont le volume à 0° est V', est rempli de mercure et constitue un thermomètre à poids.

Une expérience consiste, les tubes étant à une température T, dans les opérations suivantes

1° *Relever la variation de distance des deux traits ;*

2° *Mesurer la pression H' donnée par le manomètre ;*

3° *Peser le mercure sorti de l'appareil.*

Application numérique :

$V = V' = 300$ *centimètres cubes*, $v = 1$ *centimètre cube.*

Température extérieure : $t = 0°$.

$\frac{l - l_0}{l_0} = \frac{1}{774}$. *Poids du mercure sorti :* $p = 91^{gr},936$.

$\frac{H'}{H} = 1,5407$ (H *étant la pression à* 0°).

Densité du mercure à 0° : $D_0 = 13,596$.

Coefficient de dilatation de l'air : $\alpha = \frac{1}{273}$.

(*Concours Général, 1894.*)

En appelant m le coefficient de dilatation cherché, k celui du verre et confondant le poids spécifique du mercure avec sa densité, on a pour équation du thermomètre à poids :

$$(1) \qquad \left(V' - \frac{p}{D_0}\right)(1 + mT) = V'(1 + kT).$$

La température T est donnée par l'équation du thermomètre à air :

$$(2) \qquad \left(V + \frac{v}{1 + \alpha t}\right)H = \left[V(1 + kT) + v\frac{1 + \alpha T}{1 + \alpha t}\right]\frac{H'}{1 + \alpha T}.$$

Enfin la dilatation kT du verre se déduit de la variation de distance des deux traits :

$$(3) \qquad kT = 3\frac{l - l_0}{l_0}.$$

La résolution de (2) et (3) avec les valeurs numériques donne

$$T = 150°.$$

De l'équation (1) on tire

$$mT = 0,027025$$

et, par suite, en remplaçant T par sa valeur,

$$m = 0,00018017 = \frac{1}{5550}.$$

Remarque. — Ce problème, qui n'offre aucune difficulté, présente néanmoins cet intérêt de rappeler les méthodes qui permettent de tenir compte d'une manière rigoureuse de la dilatation de l'enveloppe d'un thermomètre à air. Cette dilatation, en effet, que l'on suppose souvent proportionnelle à la variation de température, ne l'est pas exactement. Les résultats obtenus par Regnault dans l'étude de diverses sortes de verres et les formules empiriques qui les résument permettraient aujourd'hui de représenter avec une précision suffisante kT en fonction de T ; mais s'il s'agissait de verres nouveaux ou d'autres substances, on serait obligé de combiner la lecture du thermomètre à air avec celle du

thermomètre à poids, c'est-à-dire de résoudre les équations (1) et (2), m étant connu, ou bien de recourir à la mesure directe indiquée dans l'énoncé, c'est-à-dire de résoudre (2) et (3). C'est cette dernière méthode qui a été appliquée à la lecture du thermomètre normal installé au bureau international des poids et mesures ; c'est aussi la seule qui serait applicable aux températures élevées.

QUESTIONS PROPOSÉES

563. — On donne comme indices aux deux lettres x et X les n premiers nombres successifs : 1, 2, 3, ..., n et l'on forme ainsi les $2n$ quantités :

$$x_1 x_2 x_3 \ldots x_{n-1} x_n,$$
$$X_1 X_2 X_3 \ldots X_{n-1} X_n.$$

A l'aide de ces $2n$ quantités, on forme les N expressions algébriques suivantes classées en n groupes :

1er groupe constitué à l'aide de l'indice (1) et renfermant 2 expressions algébriques : $\left\{ \begin{array}{l} x_1 \\ X_1 \end{array} \right.$

2me groupe constitué à l'aide des indices (1 et 2) et comprenant 4 expressions algébriques : $\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 \\ x_1 + X_2 \\ X_1 + x_2 \\ X_1 + X_2 \end{array} \right.$

3me groupe constitué à l'aide des indices (1, 2 et 3) et renfermant 8 expressions algébriques : $\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + X_3 \\ x_1 + X_2 + X_3 \\ X_1 + X_2 + X_3 \\ X_1 + X_2 + x_3 \\ X_1 + x_2 + x_3 \\ X_1 + x_2 + X_3 \\ x_1 + X_2 + x_3 \end{array} \right.$

et ainsi de suite jusqu'au n^{me} groupe inclus et toujours suivant la même loi de formation ; c'est-à-dire qu'un groupe quelconque d'ordre L comprend toutes les sommes algébriques obtenues en combinant entre elles les 2L premières quantités :

$$x_1 x_2 \ldots x_L,$$
$$X_1 X_2 \ldots X_L, \text{ prises L à L},$$

en ne conservant expressément que les combinaisons dans lesquelles les indices représentent la suite naturelle des L premiers nombres.

On demande :

1° De démontrer que le nombre N des expressions ainsi formées a pour valeur

$$N = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n ;$$

2° De déterminer les valeurs *numériques*, *entières* et *positives*, que devront recevoir les $2n$ quantités

$$x_1 x_2 \ldots x_n,$$
$$X_1 X_2 \ldots X_n,$$

pour que les N expressions soient représentées par des nombres entiers, aussi petits que possible et tous différents les uns des autres. On admettra que les sommes *numériques* ainsi obtenues, *rangées en série croissante*, ont pour premier terme $x_1 = 1$. HYVERT.

564. — On donne une quadrique Q et deux points A et A′ diamétralement opposés sur Q, et on considère les deux cônes de sommets A et A′ et ayant pour directrice commune la section de Q par un plan variable P, passant par une droite donnée Δ. Ces deux cônes admettent une deuxième courbe plane située dans un plan P′. Trouver :

1° Le lieu de la droite d'intersection des plans P et P′ ;

2° Le lieu du centre de la section contenue dans le plan P′ ;

3° Le lieu des foyers de cette même section plane. VASNIER

565. — On donne les deux quadriques ayant pour équations

$$yz - ax = 0 \qquad \text{et} \qquad zx + a(y - z) = 0.$$

1° Démontrer qu'elles se coupent suivant une cubique gauche et former l'équation générale des quadriques passant par cette cubique.

2° Trouver le lieu des sommets des paraboloïdes passant par cette cubique.

3° Trouver l'équation générale des cônes passant par la cubique et l'enveloppe de leurs traces sur le plan $z = 0$.

4° Trouver le lieu des diamètres de ces cônes qui sont conjugués des sections faites parallèlement au plan $z = 0$. Ch. Biche.

566. — D'un point P on peut mener cinq normales à la cubique dont l'équation, en coordonnées rectangulaires, est

$$a^2y = x^3.$$

On considère la conique (C) inscrite dans le pentagone formé par les tangentes à la cubique aux pieds des cinq normales. En supposant que a^2 varie :

1° Trouver le lieu des pieds des normales.

2° Démontrer que la conique C est inscrite dans un rectangle fixe, et trouver le lieu de ses foyers.

3° La conique (C) et la cubique ont, en outre des côtés du pentagone, une tangente commune ; démontrer qu'elle passe par un point fixe. P. Puig, professeur au lycée d'Agen.

567. — Un ballon, complètement gonflé au départ, s'élève dans de l'air sec. Son poids est q, sans compter le poids du gaz qui le remplit. Au départ, la pression est p_1, la température t_1 et la force ascensionnelle F. A quelle hauteur le ballon montera-t-il ?

On supposera la variation de température de l'air proportionnelle à la variation d'altitude et d'un degré centigrade pour une variation d'altitude b. On négligera la différence entre le volume intérieur et le volume extérieur du ballon, ainsi que la variation de la gravité.

Application numérique :

$$q = 32^{kg}, \qquad F = 106^{kg}, \qquad t_1 = 14^\circ, \qquad b = 182^m,$$

densité par rapport à l'eau de l'air normal : $a_0 = 0{,}001293$,

» » » » » du mercure normal : $m_0 = 13{,}6$,

coefficient de dilatation des gaz : $\alpha = \frac{1}{273}$.

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

509. — *On donne une circonférence et deux tangentes fixes à cette courbe ; on considère deux autres tangentes variables se coupant sous un angle donné. Démontrer que le point de concours des diagonales du quadrilatère ainsi formé décrit une ligne droite. Traiter la question par le calcul.*

En prenant pour axes les deux tangentes fixes, l'équation de la circonférence peut s'écrire

$$x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0,$$

ou

$$(x + y - a)^2 - 4xy\sin^2\frac{\theta}{2} = 0,$$

ce qui permet de considérer cette courbe comme l'enveloppe de la droite

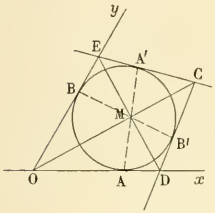
$$m^2x\sin\frac{\theta}{2} + m(x + y - a) + y\sin\frac{\theta}{2} = 0,$$

m désignant un paramètre variable.

En donnant à m deux valeurs λ et μ, nous aurons les équations de deux tangentes variables

$$\left.\begin{aligned} \lambda^2 x \sin\frac{\theta}{2} + \lambda(x+y-a) + y\sin\frac{\theta}{2} &= 0, \\ \mu^2 x \sin\frac{\theta}{2} + \mu(x+y-a) + y\sin\frac{\theta}{2} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Pour exprimer que ces deux droites font un angle constant, nous écrirons que leur point de rencontre C est situé sur un cercle fixe concentrique au cercle donné et ayant pour équation



$$(x+y-a)^2 - 4xy\sin^2\frac{\theta}{2} - k^2 = 0. \qquad (2)$$

En considérant les équations (1) comme des équations homogènes par rapport à $x\sin\frac{\theta}{2}$, $x+y-a$, $y\sin\frac{\theta}{2}$, on en déduit

$$\frac{x\sin\frac{\theta}{2}}{\lambda-\mu} = \frac{x+y-a}{\mu^2-\lambda^2} = \frac{y\sin\frac{\theta}{2}}{\lambda\mu(\lambda-\mu)},$$

ou

$$\frac{x\sin\frac{\theta}{2}}{1} = \frac{x+y-a}{-(\lambda+\mu)} = \frac{y\sin\frac{\theta}{2}}{\lambda\mu} = \frac{a\sin\frac{\theta}{2}}{1+(\lambda+\mu)\sin\frac{\theta}{2}+\lambda\mu},$$

le dernier rapport étant obtenu en multipliant le deuxième haut et bas par $-\sin\frac{\theta}{2}$, et en ajoutant ensuite les trois rapports termes à termes.

De ces égalités on tire

$$x = \frac{a}{1+(\lambda+\mu)\sin\frac{\theta}{2}+\lambda\mu},$$

$$y = \frac{a\lambda\mu}{1+(\lambda+\mu)\sin\frac{\theta}{2}+\lambda\mu},$$

$$x+y-a = \frac{-a(\lambda+\mu)\sin\frac{\theta}{2}}{1+(\lambda+\mu)\sin\frac{\theta}{2}+\lambda\mu},$$

et en portant ces valeurs dans l'équation (2) on a

$$a^2(\lambda+\mu)^2\sin^2\frac{\theta}{2} - 4a^2\lambda\mu\sin^2\frac{\theta}{2} - k^2\left[1+(\lambda+\mu)\sin\frac{\theta}{2}+\lambda\mu\right]^2 = 0,$$

ou

$$a^2(\lambda-\mu)^2\sin^2\frac{\theta}{2} - k^2\left[1+(\lambda+\mu)\sin\frac{\theta}{2}+\lambda\mu\right]^2 = 0.$$

Cette équation se décompose en deux ; l'une d'elles s'écrit

$$a(\lambda-\mu)\sin\frac{\theta}{2} + k\left[1+(\lambda+\mu)\sin\frac{\theta}{2}+\lambda\mu\right] = 0, \qquad (3)$$

l'autre s'en déduit en changeant k en $-k$.

Cela posé, l'équation de la diagonale OC est

$$\frac{y}{x} = \lambda\mu\,; \qquad (4)$$

d'autre part le point D où la tangente (λ) rencontre Ox a pour abscisse $\dfrac{a}{\lambda \sin \frac{\theta}{2} + 1}$, le point E où la tangente (μ) rencontre Oy a pour ordonnée $\dfrac{a\mu}{\mu + \sin \frac{\theta}{2}}$; par conséquent l'équation de la droite DE est

$$(5) \qquad \frac{x\left(\lambda \sin \frac{\theta}{2} + 1\right)}{a} + \frac{y\left(\mu + \sin \frac{\theta}{2}\right)}{a\mu} - 1 = 0.$$

En éliminant λ et μ entre les équations (3), (4) et (5), nous aurons l'équation du lieu.

L'équation (5) s'écrit

$$\mu x\left(\lambda \sin \frac{\theta}{2} + 1\right) + y\left(\mu + \sin \frac{\theta}{2}\right) - \mu a = 0;$$

en y remplaçant $\lambda\mu$ par $\dfrac{y}{x}$, on en déduit

$$\mu = -\frac{2y \sin \frac{\theta}{2}}{x + y - a},$$

et par suite

$$\lambda = -\frac{x + y - a}{2x \sin \frac{\theta}{2}};$$

il ne reste plus alors qu'à porter ces valeurs de λ et de μ dans l'équation (3); on obtient ainsi, toutes réductions faites,

$$a(x^2 + 2xy \cos \theta + y^2 - 2ax - 2ay + a^2) - k(x^2 + 2xy \cos \theta + y^2 - a^2) = 0. \qquad (C)$$

Cette équation représente un cercle (C) qui passe, quel que soit k, par l'intersection du cercle donné et du cercle qui a pour centre le point O et pour rayon OA.

Par conséquent le cercle (C) passe, quel que soit k, par les points A et B. On obtient un deuxième cercle (C') en remplaçant k par $-k$; on voit ainsi que le lieu se compose de deux cercles et non d'une droite comme l'indique l'énoncé.

Ce résultat peut s'obtenir géométriquement de la manière suivante. Les droites qui joignent les points de contact des côtés du quadrilatère circonscrit se coupent au point M; les arcs AB et A'B' ont une grandeur constante, par conséquent l'angle AMB est constant et le lieu du point M est un cercle passant par les points A et B. On trouve le deuxième cercle en considérant la troisième diagonale du quadrilatère ODCE, qui rencontre OC en un point M' tel que l'angle AM'B est aussi constant.

Ce sont les deux diagonales autres que celles qui passent au point O qui se coupent sur une droite fixe, et cela quel que soit l'angle que forment les deux tangentes mobiles. Cette droite est la polaire du point O par rapport au cercle.

AUZERAM.

---

517. — *Si une ellipse circonscrite à un triangle a pour centre le centre de gravité du triangle, les tangentes menées par les sommets du triangle sont parallèles aux côtés opposés.*

Soit $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ l'équation de l'ellipse et $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ les sommets du triangle inscrit; le centre de gravité du triangle étant au centre de l'ellipse, on a

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \qquad y_1 + y_2 + y_3 = 0.$$

D'autre part, en retranchant membre à membre les égalités

$$y_2^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_2^2),$$

$$y_3^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_3^2),$$

on a
$$y_2^2 - y_3^2 = \frac{b^2}{a^2}(x_2^2 - x_3^2),$$

ou
$$(y_2 - y_3)(y_2 + y_3) = -\frac{b^2}{a^2}(x_2 - x_3)(x_2 + x_3),$$

ou encore, en remplaçant $y_2 + y_3$ par $-y_1$ et $x_2 + x_3$ par $-x_1$,
$$\frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1},$$

ce qui montre que le côté BC est parallèle à la tangente au point A.

E.-N. BARISIEN.

Solution géométrique. — Comme la médiane issue du point A par exemple passe par le centre de la courbe et par le milieu de BC, cette médiane est le diamètre conjugué de la direction BC. Par conséquent la tangente au point A est parallèle à BC.

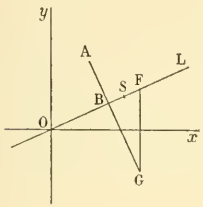
JORGE F. d'AVILLEZ et L.-J. GOUJON, pensionnat de Valbenoîte, à Saint-Etienne.

Autres solutions par MM. Auzeram et G.-A. Pouilliart.

---

516. — *Lieu des sommets des paraboles dont on donne une tangente, le point où cette tangente rencontre l'axe et un point de la directrice.*

Prenons pour axe des x la tangente donnée, pour origine le point où cette tangente rencontre l'axe et pour axe des y une perpendiculaire à Ox; désignons par a et b les coordonnées du point fixe A par lequel passe la directrice.



Soit $y = mx$ l'équation de l'axe OL d'une des paraboles considérées; abaissons du point A une perpendiculaire sur cet axe,

$$y - b = -\frac{1}{m}(x - a),$$

cette droite est la directrice de la parabole; elle rencontre l'axe en un point B dont les coordonnées sont

$$x = \frac{bm + a}{1 + m^2}, \qquad y = \frac{m(bm + a)}{1 + m^2}.$$

Cherchons les coordonnées x' et y' du foyer F; ce point est situé sur l'axe, donc $y' = mx'$. D'autre part, le symétrique du foyer par rapport à la tangente Ox doit être situé sur la directrice AB, ce qui donne

$$y' + b = \frac{1}{m}(x' - a);$$

on déduit de là
$$x' = \frac{mb + a}{1 - m^2}, \qquad y' = \frac{m(mb + a)}{1 - m^2}.$$

Le sommet S étant le milieu de BF, l'abscisse de ce point est

$$x = \frac{1}{2}\left[\frac{mb + a}{1 + m^2} + \frac{mb + a}{1 - m^2}\right],$$

ou
$$x = \frac{mb + a}{1 - m^4};$$

en éliminant m entre cette équation et la relation $y = mx$, on aura l'équation du lieu.

On obtient ainsi

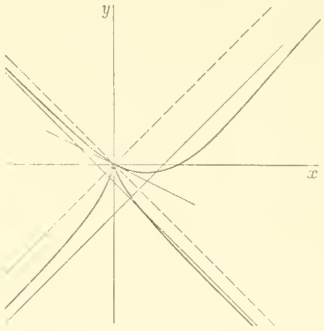
$$x^4 - y^4 - x^2(ax + by) = 0;$$

cette équation représente une courbe unicursale du quatrième degré qui a un point triple à l'origine.

Pour la construire nous nous servirons des formules

$$x = \frac{bm + a}{1 - m^4}, \qquad y = mx$$

qui donnent les coordonnées d'un point de la courbe en fonction du paramètre m.



On peut toujours choisir les directions positives des axes de coordonnées en sorte que a et b soient positifs.

En supposant $a < b$, le signe de x correspondant aux diverses valeurs de m est indiqué par le tableau suivant :

m	$-\infty$		-1		$-\frac{a}{b}$		0		1		$+\infty$
x	0	$+$ $+\infty$	$-\infty$	$-$	0	$+$	a	$+$	$+\infty$	$-\infty$ $-$	0

La courbe admet deux asymptotes

$$y + x = \frac{a - b}{4},$$

$$y - x = -\frac{a + b}{4};$$

la position de la courbe par rapport à la première dépend du signe de $3a - b$; nous avons construit la courbe dans le cas où l'on a $3a - b > 0$.

Ont résolu cette question : MM. E.-N. Barisien ; Malplat, pensionnat de Valbenoite, à Saint-Etienne ; G.-A. Pouilliart.

---

522. — *On considère un cercle de centre fixe* O, *de rayon* R *et un diamètre fixe de ce cercle rencontrant le cercle en un point* A ; *puis on considère les coniques passant aux points* O *et* A *et admettant pour directrice une droite fixe perpendiculaire à* OA. *On demande :*

1° *Le lieu des foyers de ces coniques quand* R *est fixe ;*

2° *Le lieu des points de rencontre de l'axe focal d'une hyperbole équilatère répondant à la question avec le cercle, quand* R *varie ;*

3° *Le lieu des sommets de ces hyperboles équilatères, dans les mêmes conditions ;*

4° *Le lieu du point de rencontre de l'axe focal avec la tangente en* O *à cette même hyperbole équilatère quand* R *varie. Construire ces divers lieux.*

Prenons pour origine le point O, pour axe des x le diamètre OA et pour axe des y une perpendiculaire à OA. Désignons par a l'abscisse de la directrice, par R le rayon du cercle. L'équation de la conique est

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - \lambda(x - a)^2 = 0,$$

α et β désignant les coordonnées du foyer et λ un paramètre variable ; on a en outre les relations

$$\alpha^2 + \beta^2 - \lambda a^2 = 0$$

et

$$R - 2\alpha = \lambda(R - 2a),$$

qui expriment que la conique passe à l'origine et au point A.

1° On obtient le lieu des foyers en éliminant λ entre les deux relations ; on a ainsi le cercle

$$(1) \qquad x^2 + y^2 - a^2 \frac{R - 2x}{R - 2a} = 0,$$

qui a son centre sur Ox. C'est le lieu du foyer relatif à la directrice donnée, $x - a = 0$.

On obtiendrait le lieu de l'autre foyer en exprimant que le centre de la conique est le milieu du

segment formé par les deux foyers. On trouve ainsi

$$x + \alpha = 2\frac{\alpha - \lambda a}{1 - \lambda} \qquad \text{et} \qquad y - \beta = 0\,;$$

ces deux équations, jointes aux deux relations trouvées antérieurement, permettent d'éliminer α, β et λ. On trouve d'abord

$$\alpha = \frac{R - \lambda(R - 2a)}{2},$$

et, comme $\beta = y$, on obtient de suite

$$x = \frac{(1 + \lambda)[R - \lambda(R - 2a)] - 4\lambda a}{2(1 - \lambda)},$$

$$y^2 = \frac{4\lambda a^2 - [R - \lambda(R - 2a)]^2}{4};$$

on éliminerait facilement λ entre ces deux équations qui sont du second degré en λ ; mais il vaut mieux garder ces deux équations qui définissent le lieu en fonction d'un paramètre λ et permettent de l'étudier. Elles montrent de suite, en particulier, que le lieu est du quatrième ordre et symétrique par rapport à l'axe des x ; nous ne l'étudierons pas davantage.

2° Dans le cas de l'hyperbole équilatère, on a $\lambda = 2$, et les deux conditions trouvées au début deviennent

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2a^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad 2\alpha + R - 4a = 0\,;$$

nous aurons le lieu demandé en éliminant α, β et R entre ces deux relations et les équations $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ et $y - \beta = 0$. Nous trouvons ainsi très aisément

$$(2) \qquad (x^2 - 5y^2)^2 + 16a^2(y^2 - 3x^2) + 64a^4 = 0.$$

Cette équation représente une quartique symétrique par rapport aux deux axes et fermée. Ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de y, elle s'écrit

$$25y^4 + (10x^2 + 16a^2)y^2 + x^4 - 48a^2x^2 + 64a^4 = 0\,;$$

la somme des racines de cette équation du second degré en x^2 est toujours négative ; les valeurs de y ne sont donc réelles que si le produit est négatif, et alors deux seulement sont réelles, égales et de signes contraires. Il est facile de voir en résolvant l'équation $x^4 - 48a^2x^2 + 64a^4 = 0$, que ceci a lieu seulement entre

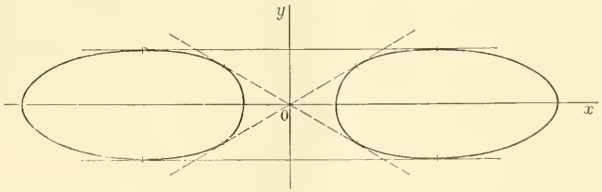
$$-a\sqrt{24 + 4\sqrt{32}} \qquad \text{et} \qquad -a\sqrt{24 - 4\sqrt{32}},$$

puis entre

$$a\sqrt{24 - 4\sqrt{32}} \qquad \text{et} \qquad a\sqrt{24 + 4\sqrt{32}}.$$

Cette même équation, ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de x, s'écrit

$$x^4 + (10y^2 - 48a^2)x^2 + 25y^4 + 16a^2y^2 + 64a^4 = 0\,;$$



le produit des racines de l'équation en x^2 est toujours positif ; donc il faut former la condition de réalité et exprimer en outre que la somme est positive. La condition de réalité montre que y doit être compris entre $-a\sqrt{2}$ et $a\sqrt{2}$, et, dans cet intervalle, la somme est positive et, par suite, les quatre valeurs de x sont réelles. La courbe est dès lors facile à construire. On peut d'ailleurs, pour s'aider, chercher les

valeurs de x qui répondent à $y = \pm a\sqrt{2}$ et chercher les tangentes menées de l'origine à la courbe; on trouve que ce sont les droites $y = \pm \frac{x}{\sqrt{3}}$.

3° L'équation de l'hyperbole équilatère est

$$-x^2 + y^2 - 2x(\alpha - 2a) - 2\beta y = 0,$$

celle de l'axe réel est

$$y = \beta;$$

en outre α, β, R vérifient les deux relations

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2a^2 = 0,$$

$$2\alpha + R - 4a = 0.$$

Nous aurons l'équation du lieu en éliminant α, β, R entre ces quatre équations. Les deux premières donnent α et β, en portant les valeurs obtenues dans la troisième, on obtient une équation indépendante de R qui représente le lieu.

C'est l'équation

$$\frac{(x^2 + y^2 - 4ax)^2}{4x^2} + y^2 = 2a^2,$$

qu'on peut écrire

$$(1) \qquad (x^2 + y^2 - 4ax)^2 = 4x^2(2a^2 - y^2),$$

et en ordonnant par rapport à y,

$$y^4 + 2y^2x(3x - 4a) + x^2(x^2 - 8ax + 8a^2) = 0.$$

La quantité sous le radical est

$$x^2(3x - 4a)^2 - x^2(x^2 - 8ax + 8a^2), \qquad \text{ou} \qquad 8a^2(x - a)^2;$$

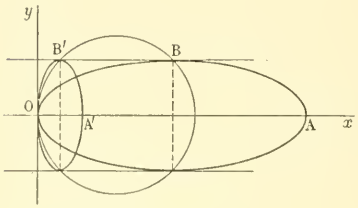
cette quantité étant carré parfait, l'équation du lieu se décompose. On a en effet en résolvant par rapport à y^2

$$(2) \qquad y^2 = -x(3x - 4a) \pm 2x(x - a\sqrt{2}),$$

ce qui donne les deux équations

$$y^2 + x^2(3 - 2\sqrt{2}) - 2ax(2 - \sqrt{2}) = 0,$$

$$y^2 + x^2(3 + 2\sqrt{2}) - 2ax(2 + \sqrt{2}) = 0.$$



Ces équations représentent deux ellipses tangentes à Oy au point O et admettant pour axe l'axe des x. Les longueurs d'axes OA et OA' sont respectivement égales à $2a(2 + \sqrt{2})$ et $2a(2 - \sqrt{2})$.

En se reportant à l'équation (1), on voit que ces ellipses sont tangentes aux droites $y^2 - 2a^2 = 0$, et que les points de contact sont situés sur le cercle $x^2 + y^2 - 4ax = 0$. On obtient ainsi les seconds axes de ces ellipses.

Enfin l'équation (2) montre que les deux ellipses ont deux points communs ayant pour coordonnées

$$x = a, \qquad y = \pm a.$$

4° L'équation du lieu s'obtient comme précédemment en éliminant α et β entre les équations

$$x(\alpha - 2a) + \beta y = 0,$$

$$y = \beta,$$

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2a^2 = 0,$$

ce qui donne

$$(1) \qquad (2ax - y^2)^2 = x^2(2a^2 - y^2),$$

ou

$$y^4 + xy^2(x - 4a) + 2a^2x^2 = 0.$$

Pour que les valeurs de y^2 soient réelles il faut qu'on ait

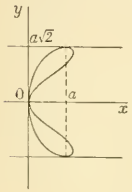
$$x^2(x-4a)^2 - 8a^2x^2 \geqslant 0,$$

ou

$$x^2(x^2 - 8ax + 8a^2) \geqslant 0,$$

ce qui exige que x soit extérieur à l'intervalle $[2a(2-\sqrt{2}),\ 2a(2+\sqrt{2})]$.

Le produit des racines étant positif, on ne peut avoir de valeurs positives pour y^2 que si la somme est positive, c'est-à-dire si l'on a



$$x(x-4a) < 0.$$

Il en résulte que x doit être compris entre 0 et $2a(2-\sqrt{2})$, et à chaque valeur de x correspondent quatre valeurs de y deux à deux égales et de signes contraires.

En se reportant à l'équation (1) on voit que la courbe est tangente aux droites $y^2 = 2a^2$, les points de contact ayant pour abscisse a.

O. MORILLOT, Collège Stanislas.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

ÉCOLE CENTRALE (1895) (*Suite*)

Géométrie analytique (M. Goully).

318. — Que représente l'équation $(x \sin \alpha + y \cos \alpha)^2 + (x \cos \alpha - y \sin \alpha)^2 = a^2$?

319. — Construire les coniques $xy + 2x + y = 0$; $y = x \pm \sqrt{4 - x^2}$; $y = x + 2 \pm \sqrt{3x - 5}$.

320. — Directions asymptotiques et asymptotes des coniques $x^2 - 2xy + 3x - 5y = 0$; $4x^2 + xy + 2x - 3y + 5 = 0$. Mettre le premier membre sous la forme d'une somme de carrés.

321. — Rapporter la parabole $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 7y = 0$ à son axe et à sa tangente au sommet. Même question pour la parabole $3x^2 - 6xy + 3y^2 + x + y = 0$.

322. — Que représente l'équation $P^2 + Q^2 = a$ P et Q étant deux polynômes du premier degré en x, y. Centre de cette courbe; équation de la tangente en un point. Appliquer à l'équation $(ax + by + c)^2 + (bx - ay + c')^2 = d^2$.

323. — Aire de l'ellipse $2x^2 + 4xy + 3y^2 - 5 = 0$, les axes des coordonnées étant supposés rectangulaires.

324. — Rapporter l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ à ses asymptotes. — Equation de la tangente en un point. — L'équation étant mise sous la forme $xy = k^2$, exprimer k^2 en fonction du demi-axe transverse a et de l'angle θ des asymptotes.

325. — Surface d'un segment de parabole. Surface comprise entre un arc de parabole et sa corde.

326. — Construire une parabole connaissant deux tangentes et leurs points de contact.

327. — Quelle est la courbe dans laquelle la sous-normale est constante?

328. — Quelle est la courbe dont toutes les normales passent par un point fixe?

329. — On donne une circonférence tangente aux axes de coordonnées; variations de la surface du triangle formé par une tangente avec les axes.

330. — On donne une ellipse rapportée à deux diamètres conjugués; variations de la surface du triangle formé par une tangente avec ces deux diamètres.

331. — On projette orthogonalement un point M en P et Q sur deux axes obliques; lieu du point M sachant que la longueur PQ est constante.

332. — Lieu du centre de gravité du triangle OAB déterminé par deux droites fixes et une sécante AB qui se déplace de façon que l'aire du triangle reste constante.

333. — Coordonnées du pôle d'une droite par rapport à une conique. Appliquer à l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ et à la droite $ux + vy + w = 0$. La droite tournant autour d'un point fixe (α, β), quel est le lieu du pôle?

334. — Etant données deux circonférences ayant leurs centres l'une à l'origine, l'autre en un point de l'axe de x, lieu des pôles des tangentes à la première par rapport à la seconde.

335. — Equation générale des coniques qui admettent pour centre le point de rencontre de deux droites données.

336. — Equation générale des coniques qui admettent une tangente donnée et pour diamètre conjugué une droite donnée. Cas particulier de la parabole.

337. — Équation générale des coniques pour lesquelles les deux droites $(x-a)^2+\lambda(y-b)^2=0$ forment un système de deux diamètres conjugués? Combien donne-t-on de conditions en donnant les directions de deux diamètres conjugués?

338. — Équation générale des coniques inscrites dans un parallélogramme. Centre de ces coniques.

339. — Équation générale des coniques admettant pour directrices deux droites données.

340. — Équation générale des coniques : circonscrites à un quadrilatère; — tangentes à deux droites données; — admettant deux droites données pour asymptotes. Déterminer λ de façon que l'équation $PQ+\lambda R^2=0$ représente une parabole.

341. — Que représente l'équation $Ax^2+2Bxy+Cy^2+\lambda(y-mx-q)=0$?

342. — Condition pour que l'équation $(y-mx-q)^2+x(\lambda x+\mu)=0$ représente une parabole. Par un point quelconque du plan passent trois axes des paraboles obtenues en faisant varier m.

343. — Équation générale des coniques passant par trois points, déduite de celle des coniques circonscrites à un quadrilatère. Tangente en l'un de ces points.

344. — Hyperbole équilatère circonscrite à un triangle. Cas particulier où le triangle est rectangle.

345. — On donne un cercle et une droite passant par un point fixe; équation générale des paraboles bitangentes au cercle, la droite donnée étant la corde des contacts. Lieu des sommets de ces paraboles lorsque la droite tourne autour du point fixe. — Même question en remplaçant les paraboles par des hyperboles équilatères.

346. — Équation générale des coniques tangentes en un point M à un cercle dont le centre est à l'origine.

347. — Étudier les branches infinies de la courbe $y=ax^2+bx+c+\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, $\varphi(x)$ étant un polynome de degré inférieur à celui de $\psi(x)$. Appliquer à la courbe $y=\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{x+p}$; condition pour qu'elle se décompose en une droite et une parabole. Construire la courbe $y=\dfrac{x(x-1)(x-3)}{x-2}$.

348. — Concavité et convexité. Appliquer à la courbe représentée par l'équation $y=x^3$.

349. — Construire les courbes représentées par les équations

$$y=x+\frac{x}{(x-1)^2},\qquad y=x^2\pm\sqrt{a^4-x^4},\qquad (y^2-x^2)^2=x^7,\qquad y=x\sqrt{\frac{a-x}{b+x}},$$

$$y=\frac{x^3}{x-1},\qquad y=x^2\pm\sqrt{x^4-a^4},\qquad (y^2-x^2)^3=x^4,\qquad y=x\sqrt{\frac{x-a}{x-b}},$$

$$y=x\pm\sqrt{x^3},\qquad y=x^2\pm\sqrt{(x^2-a^2)^2+b^4},\qquad y^4=a^2(x^2+y^2),\qquad y=\frac{1}{e^x},$$

$$y=x+1\pm\sqrt{\frac{1}{x-1}},\qquad y=x^2\pm\sqrt{\frac{1}{x^2-4}},\qquad y=x\sqrt{x^2-1},\qquad y=x^x,$$

$$y=x+1\pm\sqrt{\frac{1}{1-x}},\qquad y=x^2+\sqrt{x},\qquad y=\sqrt{(x^2-1)(x-3)},\qquad y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

350. — Construire les courbes représentées par les équations

$$\rho=a\cos\omega,\qquad \rho=a\sin 2\omega,\qquad \rho=\frac{1}{\sin^2\omega},\qquad \rho=\frac{1}{\sin^2\frac{\omega}{2}},\qquad \rho=e^{\omega},\qquad \rho=\frac{\omega}{\omega-1},\qquad \rho=\frac{\omega}{(\omega-1)(\omega-2)}.$$

351. — Condition pour que les deux équations $ax+by+c=0$, $a'x+b'z+c'=0$ représentent les traces d'un même plan sur les plans des xy et des xz. — Trouver l'équation de la trace de ce plan sur le plan des yz.

352. — Mener par le point $x=1$, $y=2$, $z=3$ un plan parallèle aux deux droites

$$y=2x+5,\qquad y=x-3,$$
$$z=3x-2,\qquad z=2x+4.$$

353. — Étant donné le plan $Ax+By+Cz+D=0$, déterminer une ligne de plus grande pente de ce plan, par rapport au plan des xy.

354. — Distance de l'origine à la droite $z=h$, $x+y=a$.

355. — Perpendiculaire commune et plus courte distance pour les deux droites

$$x=az+p,\qquad x=a'z+p',$$
$$y=bz+q,\qquad y=b'z+q'.$$

356. — Équation d'un cône ayant pour sommet l'origine et pour directrice l'ellipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$ dans le plan $z=h$.

357. — Équation d'un cône ayant pour sommet l'origine et circonscrit à la sphère

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-R^2=0.$$

358. — Sphère circonscrite et sphère inscrite au tétraèdre formé par les plans de coordonnées et le plan

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

359. — On donne les deux équations $xy = z$, $2x + 5y = 4z$. — Que représente l'ensemble de ces deux équations ? — Projection de l'intersection sur le plan des xy.

360. — Tangente en un point à la courbe $z = a \cos x$, $x^2 + y^2 = R^2$.

361. — On considère le plan tangent en un point à un ellipsoïde. — La trace de ce plan sur un plan diamétral est la polaire de la projection du point de contact sur ce plan diamétral par rapport à l'ellipse qu'il détermine dans la surface.

Géométrie (M. Lévi).

362. — La somme des perpendiculaires abaissées d'un point pris à l'intérieur d'un triangle équilatéral sur les trois côtés est constante.

363. — Lieu des points dont la somme des distances à deux droites fixes situées dans un plan est constante.

364. — Somme des carrés des côtés d'un quadrilatère. Cas particulier du parallélogramme.

365. — Construire sur une base donnée un triangle équivalent à un polygone donné.

366. — Lieu du milieu d'une horizontale qui s'appuie sur deux droites fixes. Étant donnés un plan et deux droites non situées dans un même plan, lieu du point qui partage dans un rapport donné le segment déterminé par ces deux droites sur une droite parallèle au plan et s'appuyant sur les deux droites données. Quelle est la surface engendrée par la droite mobile ?

367. — Si trois droites sont parallèles à un même plan, toutes les droites qui les rencontrent sont parallèles à un deuxième plan.

368. — Lieu du milieu d'une droite de longueur donnée dont les extrémités décrivent deux droites rectangulaires.

369. — Rapport anharmonique de quatre plans menés par une même droite. Le rapport anharmonique des quatre plans est égal au rapport anharmonique des quatre points déterminés par ces plans sur une sécante quelconque.

370. — Lieu du point de concours des médianes du triangle déterminé dans un angle trièdre par un plan qui se déplace parallèlement à lui-même.

371. — Si par le sommet d'un angle trièdre on mène dans chaque face la perpendiculaire à l'arête opposée, les trois droites obtenues sont dans un même plan.

372. — Propriété des projections sur un plan sécant des arêtes d'un trièdre trirectangle.

373. — Lieu des points d'un plan d'où on voit une droite donnée de l'espace sous un angle droit.

374. — Construire un triangle connaissant un côté, la hauteur correspondante et la somme des deux autres côtés (ou le périmètre).

375. — Lieu des sommets des angles droits circonscrits à une ellipse.

376. — Démontrer les théorèmes d'Apollonius en considérant l'ellipse comme projection d'un cercle.

377. — La portion PP′ d'une tangente à l'ellipse comprise entre les tangentes aux extrémités AA′ du grand axe est vue des foyers sous un angle droit. Le produit AP.AP′ est constant.

378. — Construire une conique connaissant trois tangentes et un foyer.

379. — Construire une parabole connaissant :
1° Deux points et la directrice ;
2° Le foyer, une tangente et un point.

380. — Lieu du foyer d'une parabole dont on donne la directrice et une tangente. Construire une parabole connaissant la directrice, un point et une tangente.

381. — Construire une parabole connaissant la tangente au sommet et deux autres tangentes. Déterminer les points de contact de ces deux tangentes.

382. — Lieu des foyers des paraboles tangentes à trois droites. Construire une parabole connaissant quatre tangentes.

Géométrie descriptive (M. Lévi).

383. — Mener une droite parallèle à la ligne de terre et s'appuyant sur deux droites données.

384. — Mener une droite parallèle à une direction donnée et s'appuyant sur deux droites données (géométrie cotée).

385. — Intersection de deux plans donnés par leurs lignes de plus grande pente, parallèles en projection.

386. — Distance d'un point à une droite (deux méthodes). Distance d'un point à une droite de front.

387. — On donne un plan par son échelle de pente et une droite dans ce plan ; mener dans le plan donné la perpendiculaire à cette droite : 1° par un point pris sur la droite ; 2° par un point quelconque du plan.

388. — On donne un plan défini par la ligne de terre et un point ; mener par une droite passant par ce point le plan perpendiculaire au plan donné.

389. — On donne un plan par son échelle de pente et une droite dans ce plan ; mener par cette droite le plan perpendiculaire au plan donné.

390. — Plus courte distance de deux droites, l'une du plan horizontal, l'autre du plan vertical.

391. — Plus courte distance de deux droites de profil. Plus courte distance d'une droite de profil : 1° à une droite du plan horizontal ; 2° à une droite quelconque.

392. — Plus courte distance entre deux arêtes opposées d'un tétraèdre régulier dont la base est dans le plan horizontal.

393. — Angle de deux droites qui ne se rencontrent pas, données par leurs projections cotées.

394. — On donne un plan par son échelle de pente et une droite dans ce plan ; mener par cette droite un plan qui fasse avec le plan horizontal un angle donné.

395. — Angle de deux plans donnés par leurs traces horizontales et la projection et la cote d'un point de leur intersection.

396. — Angle de deux plans déterminés par une droite AB et deux points C et D pris dans un même plan horizontal.

397. — Angle de deux plans donnés : 1° par leurs traces horizontales et leurs angles avec le plan horizontal ; 2° par leurs traces verticales et leurs angles avec le plan vertical.

398. — On donne deux droites dans un même plan de front ; angle de deux plans passant par ces droites et faisant des angles donnés avec le plan vertical.

399. — Plan bissecteur de l'angle dièdre formé par deux plans donnés par leurs traces.

400. — Par une droite d'un plan, mener un plan faisant un angle de 45° avec le premier.

401. — Un plan est défini par un axe vertical et un point ; on donne les projections d'un point invariablement lié à ce plan. Construire les nouvelles projections de ce point quand on a fait tourner le plan d'un angle α autour de l'axe.

402. — Etant données deux droites invariablement liées, les amener à être parallèles : 1° en projection horizontale ; 2° en projection verticale.

403. — Etant donnés un plan et une droite, amener par une rotation le plan à être parallèle à cette droite. Cas où le plan est donné par trois points.

404. — Amener par une rotation une droite quelconque à avoir sa projection verticale confondue avec une droite du plan vertical, trace d'un plan de bout.

405. — Amener : 1° à être verticaux ; 2° à être de bout, deux plans invariablement liés définis par leurs traces.

406. — Amener deux droites invariablement liées de l'espace à être simultanément horizontales ou de front.

407. — Amener un plan quelconque à être de front. — Un plan est défini par une droite de front et un point donné ; on considère un deuxième point invariablement lié à ce plan. Construire les nouvelles projections de ce point quand on a amené le plan à être de front.

408. — Un plan est défini par une horizontale H et un point A ; étant donné un point P dont la projection horizontale p se confond avec celle de A, construire les nouvelles projections du point P quand on a fait tourner le plan d'un angle de 45° autour de son horizontale H.

409. — Un plan est défini par une horizontale H et un point A ; trouver un point qui soit à une distance donnée de l'horizontale H et qui se projette sur le plan au point A.

410. — Etant donnés trois points aa', bb', cc', mener au cercle passant par ces trois points une tangente par un point pp' donné dans leur plan.

QUESTIONS PROPOSÉES

568. — Par un point quelconque M, d'une demi-circonférence on mène une tangente MT qui coupe le diamètre en T.

Trouver le lieu du point de rencontre P du rayon OM avec la perpendiculaire au diamètre élevée en T.

Construire la courbe représentant les variations de $\frac{\text{vol. PAT}}{\text{vol. MAT}}$, vol. PAT désignant le volume engendré par le triangle PAT tournant autour du diamètre OA et A l'extrémité du diamètre.

569. — On considère une parabole et une corde dont la projection sur l'axe soit égale à une longueur constante donnée.

1° Trouver le lieu de l'intersection des normales menées aux deux extrémités de cette corde.

2° Mener par un point quelconque du lieu trois normales à la parabole.

Que dire du cas où la projection de cette corde tend vers 0 ?

570. — On donne deux cercles C et C' ; trouver le lieu des centres des cercles orthogonaux à l'un et tangents à l'autre.

571. — On considère une parabole et un point fixe de l'axe de cette parabole. Par ce point, on mène une sécante variable PQ. On décrit un cercle passant aux points P et Q et au sommet.

1° Trouver le lieu du centre de ce cercle.

2° Trouver le lieu du point de concours des sécantes communes au cercle et à la parabole.

3° Trouver le lieu de la projection du quatrième point sur la corde PQ.

572. — Une parabole mobile a son axe perpendiculaire à celui d'une parabole fixe ; elle passe par le sommet de cette dernière.

Distinguer les régions du plan où se trouve le sommet de la parabole mobile suivant qu'elle a deux ou quatre points communs avec la parabole fixe.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE JACQUET.

TABLE DES MATIÈRES

ANNÉES 1894-95 ET 1895-96

ALGÈBRE

Nos des questions		Pages
480	Dans le développement de $(1+x+2x^2+\cdots+px^p)^2$ le coefficient de $x^q (q < p)$ est $\frac{q^3+11q}{6}$.	491
481	Le nombre de manières dont on peut amener le point n avec p dés à jouer est égal au coefficient de x^n dans $(x+x^2+\cdots+x^6)^p$.	492
461	Problème de combinaisons.	425
436	Démontrer l'inégalité $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \left(\frac{n}{a}\right)^n$ si $a < e$.	331
473	Etude d'une fraction algébrique.	425
453	Variations d'une fonction	387
380	Démontrer l'identité $2^{2n+1}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n+\frac{1}{2}}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}e^{\sqrt{x}}\right) = e^{\sqrt{x}}$.	82
391	Le plus grand entier contenu dans $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ est égal ou supérieur de une unité au plus grand entier contenu dans $L(n+1)$	117
408	Démontrer qu'une équation a ses racines en progression arithmétique.	219
409	Exercice sur un polynome du troisième degré.	196
410	Exercice sur un polynome du quatrième degré.	197

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A DEUX DIMENSIONS

366	Exercices sur les tangentes communes à deux cercles	50
509	Lieu du point de concours des diagonales d'un quadrilatère circonscrit à un cercle.	502
383	Par un point P on mène une sécante PCD dans un cercle, on joint AC, BD, A et B étant deux points fixes du cercle, lieu du point de rencontre.	107
395	Enveloppe de l'axe radical de deux cercles.	148
402	Exercices sur un cercle.	173
414	(Id.) (Lieu de l'orthocentre d'un triangle).	222
419	Exercices sur un rectangle	223
420	Lieu du sommet d'un rectangle variable.	245
451	Exercice sur un triangle	340
469	(Id.)	385
454	Mener une tangente à un cercle formant avec deux droites fixes un triangle maximum.	366
483	Exercices sur un triangle isocèle variable dont le sommet décrit un cercle et dont la base est tangente à ce cercle	409
508	Lieu du centre et enveloppe d'un cercle orthogonal à un cercle fixe et tangent à une droite.	481
397	Exercices divers sur une ellipse.	149
359	(Id.)	262
517	(Id.)	504
332	Enveloppe des paraboles tangentes à deux droites rectangulaires et dont le foyer décrit un cercle tangent à ces droites	1
373	Triangle inscrit dans une parabole, deux côtés étant normaux ; exercices.	47
367	Coniques tangentes à deux droites et passant par un point	51
372	Un angle droit tourne autour d'un point P, ses côtés rencontrent deux droites fixes en des points A et B. Enveloppe de AB	68
378	Equation générale des coniques tangentes à une droite D en un point A, à une droite D′ parallèle à D et à une droite Δ perpendiculaire à D et D′. Lieu des foyers, etc.	76
381	Condition pour qu'il existe un quadrilatère inscrit à une conique et circonscrit à une autre conique.	86
382	Points conjugués par rapport à une hyperbole équilatère. Exercices.	92
353	Coniques variables : lieux géométriques.	97
387	Lieu du sommet d'un triangle rectangle.	109
388	Lieu des points de rencontre des normales à une parabole aux points où elle est coupée par les tangentes à un cercle	110
389	Coniques osculatrices à un cercle et dont le foyer est sur le cercle. Exercices	137
352	Triangle circonscrit à une ellipse tel que les normales aux points de contact se coupent sur l'ellipse	141
396	Propriétés de deux ellipses.	147
338	Triangle inscrit dans une ellipse et circonscrit à un cercle concentrique	185
401	Une ellipse tourne autour de son centre. Lieu du point de rencontre des tangentes aux points où deux droites perpendiculaires passant par le centre les rencontrent.	219
407	Hyperboles équilatères passant par trois des sommets d'un rectangle. Lieux géométriques	221
399	Propriétés des points communs à un cercle et à une hyperbole équilatère	233
405	Coniques circonscrites à un parallélogramme et tangentes à une droite. Exercices.	250
411	Exercices sur une parabole.	257

N° des questions		Pages
431	Exercices sur une parabole	336
412	Id.	348
400	Paraboles circonscrites à un triangle rectangle	264
417	Mener entre deux droites données un segment parallèle à une droite donnée et qui soit vu d'un point donné sous un angle donné	266
415	Exercice sur un cercle et une hyperbole équilatère	307
448	Coniques bitangentes à une ellipse, tangentes à une droite et vues d'un point P sous un angle droit. Exercices	331
432	Enveloppe de la polaire d'une droite et lieu du pôle d'un point par rapport à une conique qui tourne autour de son centre	338
446	Lieu du milieu d'une corde de longueur constante inscrite dans une parabole	339
447	Un cercle roule sur un cercle égal. Exercices	340
452	Lieu du sommet d'une parabole variable	342
434	Exercices sur une hyperbole équilatère	349
435	Coniques circonscrites à un triangle et tangentes à une droite. Exercices	351
442	Hyperboles ayant une directrice et une asymptote données. Lieux géométriques	362
450	Coniques ayant un foyer donné et tangentes à deux droites	364
470	Coniques ayant des directions asymptotiques données et un foyer donné	386
456	Etudier un réseau de coniques	401
490	Paraboles inscrites dans un angle	412
489	Coniques passant par quatre points et tangentes à une droite. Lieux géométriques	435
460	Exercices relatifs à trois coniques ayant un foyer commun, tangentes deux à deux	447
474	Coniques passant par deux points fixes et rencontrant une conique fixe en deux points fixes et en deux points variables	451
506	Lieu des sommets et des foyers des hyperboles équilatères ayant un centre donné et passant par un point	477
507	Exercices sur des coniques passant par deux points et ayant un foyer donné	478
484	Exercices sur une ellipse et deux paraboles	492
485	Exercices sur des coniques homofocales	496
486	Lieu du point de concours des tangentes communes à deux ellipses	497
516	Lieu du sommet d'une parabole dont on donne une tangente, le point où elle rencontre l'axe et un point de la directrice	505
522	On donne un cercle de rayon OA. Coniques passant par les points O et A et ayant une directrice perpendiculaire à OA	506
475	Propriété de l'hypocycloïde à trois rebroussements	468
413	Exercices sur la courbe $y^4 - x^4 + 2ax^2y = 0$	242
416	Etude d'une transformation	311
385	Exercices sur le folium de Descartes	403
404	Exercices sur une courbe d'ordre n	187

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A TROIS DIMENSIONS

N° des questions		Pages
340	Calcul d'un rayon de courbure	4
374	Exercices sur la cubique gauche	83
375	(Id.)	86
389	Exercices sur des quadriques homofocales	3
343	(Id.)	10
342	Lieu des foyers des sections d'un paraboloïde par des plans passant par une droite parallèle à l'axe	9
379	Normales à l'ellipsoïde en tous les points d'une section plane	100
390	Normales à une quadrique en tous les points d'une section circulaire	116
384	Normales issues d'un point à un ellipsoïde	113
398	Normales au paraboloïde	163
403	Exercices sur les normales à une surface du troisième ordre	239
443	Propriétés de la surface $\frac{z^2}{2k^2} = \text{arc cot}\,\frac{y}{x} + \Phi(x^2+y^2)$	356
444	Propriétés de la surface $\frac{z^3}{3k^4} = \text{arc cot}\,\frac{y}{x} + \Phi(x^2+y^2)$	357
449	Exercices sur l'ellipsoïde	375
479	Etude d'un complexe	470

DIVERS

245	Exercice de cinématique	73
503	Solide commun à deux cônes	406
386	On donne un disque et une lentille, calculer un éclairement	105
406	Evaluer la pression au centre du globe terrestre	145
463	Etudier la distribution des pressions dans une masse liquide	335
504	Calculer la durée d'oscillation d'un pendule	453

NOTES ET MÉMOIRES

Sur un théorème d'Algèbre	67
Sur les fonctions hyperboliques	183
Note sur l'intégrale définie	249
Note sur les fonctions croissantes	276
Note sur les fonctions implicites	321
Invariant de la forme cubique (leçon d'agrégation)	370
Sur l'équation binome	418
(Id.)	465
Sur les fonctions symétriques	177
Sur le résultant de deux équations entières	201
Sur la résolution trigonométrique de l'équation du troisième degré	300
Résumé des propriétés des faisceaux de coniques	49
Sur le principe des signes appliqué aux aires	65
Quadrature de la cycloïde	82
Etude d'une courbe autour d'un de ses points	130
Sur les courbes unicursales	153

Pages

Enveloppe d'un cercle orthogonal à un cercle fixe et dont le centre décrit une conique. 158
Leçon sur les enveloppes. 202
Sur la construction de certaines courbes en coordonnées polaires 345
(Id.) 393
Sur l'hyperbole d'Apollonius 397
Note sur l'intersection de deux coniques. 17
Note sur la théorie des coniques 441
Sur un problème de géométrie analytique 489
Sur le cylindroïde 129
(Id.) 181
Points d'inflexion dans le développement d'une section plane d'un cône 180
Intersection de deux quadriques dont les axes se rencontrent. 273
Intersection d'une droite et d'une quadrique admettant des sections elliptiques. 297
Sur le complexe des droites de moment nul par rapport à un système de forces. 225
Sur le mouvement des planètes. 465
Sur les formules générales des lentilles 190
Nécrologie 369

BIBLIOGRAPHIE

Leçons d'arithmétique (J. Tannery) 96
Leçons de cinématique (G. Kœnigs). 96
Abrégé de la théorie des fonctions elliptiques (Ch. Henry). 152
Essai d'une théorie élémentaire des surfaces du troisième ordre (F. Dumont) 176
La géométrie réglée et ses applications (G. Kœnigs) 296
Questions de mécanique (Laisant et Antomari). . 320
Questions d'algèbre (G. Maupin) 320
Leçons sur certaines questions de géométrie élémentaire (F. Klein) traduit par J. Griess. . . . 440
Leçons sur la résolution algébrique des équations (H. Vogt) 464

EXAMENS ET CONCOURS

Agrégation des sciences mathématiques :

Année 1894 . . . . . 40.
— 1895 . . . . . 192, 324, 358.
— 1896 . . . . . 473.

Agrégation de l'enseignement secondaire spécial :

Année 1893 . . . . . 124.

Concours général :

(Classe de Mathématiques spéciales.)

Année 1891. — Physique. . . . 144.
— 1894. — Mathématiques. 12.
— 1894. — Physique. . . . 500.
— 1895. — Mathématiques. 165, 277.
Année 1895. — Physique. . . . 166, 360.
— 1896. — Mathématiques. 431.
— 1896. — Physique. . . . 454.

Bourses de Licences :

Année 1892. — Physique. . . . 499.
— 1894. — Mathématiques. 19.
— 1894 — Physique. . . . 55.
Année 1895. — Mathématiques. 284, 426.
— 1895. — Physique. . . . 284, 382.
— 1896. — Mathématiques. 475.
— 1896. — Physique. . . . 476.

ÉCOLES

Ecole Normale supérieure :

Année 1891 . . . . . 281.
— 1893 . . . . . 71.
— 1894 . . . . . 33, 428.
— 1895 . . . . . 168, 214, 260, 302.
— 1896 . . . . . 456, 475.

Ecole Polytechnique :

Année 1895 . . . . . 167, 210, 380.
— 1896 . . . . . 455.

Ecole centrale des Arts et Manufactures :

Année 1894. — 1re session . . . 24, 57.
— 1894. — 2e — . . . 14, 88, 194.
— 1895. — 1re session . . . 199, 285, 286, 291.
— 1895. — 2e — . . . 268, 314, 429, 483.
— 1896. — 1re session . . . 485.

Ecole des Mines de Saint-Etienne :

Année 1894 . . . . . 79, 119, 121.
— 1895 . . . . . 343, 433.

Ecole des Ponts et Chaussées :

Année 1892. — Elèves externes. . . 189.
— 1894. — Cours préparatoires. 32, 60, 61.
— 1894. — Cours spéciaux. . . 361, 498.
— 1895. — Cours préparatoires. 295, 388, 408, 432.
— 1895. — Cours spéciaux. . . 260, 397.

Ecole Navale :

Année 1894 . . . . . 29.
— 1895 . . . . . 168.
— 1896 . . . . . 457.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

Ecole Normale supérieure : 1895 . 383.
Ecole Polytechnique : 1894 . . . . 72, 118, 145, 217.
Ecole Centrale : 1894. . . . . 270, 275, 367, 389.
Ecole Centrale : 1895. . . . . 460, 486, 509.
Ecole des Mines de St-Etienne : 1894 247.
Ecole des Mines de St-Etienne : 1895 462.
Ecole Navale : 1895. . . . . 463.

NOMS D'AUTEURS

ALPHA, 367.
ANDOYER (H.), 130, 213, 345.
ANTOMARI (X.), 23, 47, 67, 86, 106, 147, 180, 242, 313, 320.
APPELL (P.), 129, 390.
AUDIBERT, 10.
AUZERAM, 343, 344, 362, 366, 428, 432, 440, 478, 483, 504.
BADARD (J.), 496.
BAILLY (L.), 112.
BALLY (E.), 497.
BARISIEN (E.-N.), 2, 80, 108, 187, 264, 310, 343, 351, 386, 432, 488, 505.
BARRÉ (E.), 262.
BARTHE (C.), 453.
BERTHELOT (E.), 16, 224, 272, 285, 368, 477.
BERTRAND (Victor), 51, 110, 338.
BIOCHE (Ch.), 48, 80, 285, 502.
BLANDIN (J.), 386, 440.
BLAZY-LACOMBE, 341, 401, 426, 473, 480.
BONNARD (H.), 219.
BOURGUIGNON (P.), 359.
C. (N.), 59.
CARRUS (M.-V.), 165.
CAUSSÉ (A.), 389, 409, 415.
CELS, 321.
CHAMBON (J.), 336.
CHAMPION (B.), 221.
CHASSIOT (S.), 224.
CHEVALLIER (Joseph), 96.
CLARIN (J.), 53, 100.
CLAUZEL (L.), 55.
COLLARD, 88.
COMBETTE, 460, 461.
D. (E.), 31, 173, 460.
DAVID (J.), 183.
DELACROIX (R.), 421.
DUCLOS (P.), 196.
DUMONT (F.), 176.
DURAND (A.), 225.
ESCOT (R.), 4, 83, 87, 103.
ESPINAT (Louis), 128.
FÉNET, 211.
FÉREY (H.), 121.
FÈVRE (M.), 112.
GIROD, 300, 489.
GOUILLY, 295, 367, 389, 488, 509.
GOUJON (L.-J.), 320, 337, 392, 435, 505.
GOULARD (A.), 73, 285, 291, 469.
GRATIEN (H.), 16.
GRIESS (J.), 440.
GROLLEAU, 450.
GUESDE (Mario), 363.
H. (E.), 19, 32, 39, 46, 96, 119, 152, 176, 209, 262, 277, 320, 344, 369, 374, 392, 397.
HAIS (James), 176, 339.
HÉNET, 119, 147, 314, 344, 477.
HENRY (Ch.), 152.
HIOUX (V.), 297.
HUBLOT (H.), 277.
HUGON, 9, 158, 194, 242.
HYVERT, 501.
JAMET (V.), 117.
JORGE F. d'AVILLEZ, 505.
KLEIN (Félix), 440.
KŒNIGS (G.), 96, 296.
L. (A.), 307.
L. (J.), 12, 118, 263.
L. (P.), 294.
LAISANT (C.-A.), 65, 320.
LAPOINTE (G.), 476.
LAURÉAUX (A.), 189, 197, 222, 265, 383.
LEBOURG (A.), 116.
LEFEVRE (L.), 273, 393.
LEVASSOR (Albert), 453.
LEVI, 511.
LHÉRIAUD (J.), 406).
LŒDERICH (G.), 482.
MALPLAT, 425.
MAUPIN (G.), 81, 107, 145, 320.
MERLIN (E.), 340.
MESSENT (L.), 224, 382, 408.
MOREL (A.), 112, 152, 200.
MORILLOT (O.), 416, 439, 509.
OUDIN (E.), 248.
P. (G.), 440.
PAGÈS (A.), 14, 39.
PÉGORIER (F.), 175.
PHILIPPE (V.), 272.
POUILLIART (G.-A.), 368, 392.
PUIG (P.), 56, 219, 502.
R. (C.), 72, 191, 217, 282, 284.
RAFFY (L.), 153.
RICHARD (J.), 249, 465.
ROUBAUDI (C.), 181, 394.
SABOT (Pierre), 110.
SUEUR (Lucien), 109, 268, 310.
T. (A.), 92, 369.
DE TANNENBERG (W.), 441.
TANNERY (J.), 96, 177.
THÉVENOT (F.), 4.
TZITZEICA, 80, 117.
VALDÈS (Enrique), 468.
LE VAVASSEUR (R.), 464.
VASNIER, 48, 57, 78, 88, 99, 104, 144, 242, 255, 266, 335, 349, 355, 432, 450, 488, 501.
VOGT (H.), 417, 464.
WITZIG (A.), 5.
XAMBEU, 223, 267.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. — Facdouel, dir.

QA
1
R486
année 6

Revue de mathématiques
spéciales

Physical &
Applied Sci.
~~Social~~

Math

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY